

4D-ИССЛЕДОВАНИЕ ВИХРЕВЫХ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТЕЙ ВНУТРИ ГЛАЗА

С.А. Складчиков¹

skladtchikov@mail.ru

Н.П. Савенкова¹

mknandrew@mail.ru

Ф.И. Высикайло²

filvys@yandex.ru

С.Э. Аветисов³

s.avetisov@niigb.ru

Д.В. Липатов^{4,5}

glas1966@rambler.ru

В.В. Новодережкин⁶

lazer_vv@mail.ru

¹ МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

² МГОУ, Мытищи, Московская обл., Российская Федерация

³ ФГБНУ «НИИ глазных болезней», Москва, Российская Федерация

⁴ ФГБУ «НМИЦ эндокринологии» Минздрава России,

Москва, Российская Федерация

⁵ Медицинский институт РУДН, Москва, Российская Федерация

⁶ ГКБ №15 им. О.М. Филатова, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Глаз является сложной системой границ и жидкостей внутри них с различной вязкостью. В настоящее время отсутствуют экспериментальные возможности детально наблюдать динамические 4D-процессы после применения того или иного метода лечения глаз. Сложность кумулятивных (фокусирующихся) и диссипативных (рассеивающихся) конвективных и диффузионных 4D-потоков жидкостей в глазу требует развития 4D аналитических и численных моделей переноса жидкостей в глазном яблоке человека. Разработана и верифицирована численная модель 4D кумулятивно-диссипативных процессов переноса жидкости в глазном яблоке. Впервые численно оценены: 1) значения характерного времени нахождения лекарственного вещества в полости стекловидного тела до его полного вымывания в зависимости от места инъекции; 2) визуализированы пути вихревого движения лекарственного вещества в полости стекловидного тела; 3) определены основные параметры 4D-потоков жидкости лекарственного вещества в полости стекловидного тела в зависимости от наличия или отсутствия отслойки стекловидного тела от стенки задней камеры

Ключевые слова

Вихревые образования, конвективные диффузионные потоки, математическое моделирование

глаза. Полученные результаты верифицируются имеющимися у врачей экспериментальными данными. В глазе, как в частично открытой кумулятивно-диссипативной системе, определены области Эйлера с высокими скоростями кумулирующих потоков и области с малыми скоростями или застойными потоковыми зонами Лагранжа

Поступила 30.11.2020

Принята 10.01.2021

© Автор(ы), 2021

Введение. В природных и живых системах имеют место сложные кумулятивные (фокусирующие) и диссипативные (рассеивающие) гидродинамические процессы формирования 3D вихревых структур. Такие процессы происходят и в человеческом глазе, как частично открытой кумулятивно-диссипативной 3D-структуре, вследствие разнесенного входа жидкости и ее удаления из глаза, имеющего несколько упругих мембран. Изучение состояния внутриглазного вещества и физических явлений, происходящих в глазе, представляет существенный научный и практический интерес. Проникнуть в живой глаз и наблюдать основные процессы переноса невозможно. Для выяснения особенностей таких процессов необходимо использовать весь опыт теоретической физики — области физики, занимающейся математической формулировкой закономерностей физических явлений, наблюдаемых экспериментально, в том числе и в структурах в конденсированных средах с частично открытыми границами. Опираясь будем на связи, которые устанавливаются с использованием аналитических и численных вычислений, численных моделей и сравнением с имеющимися экспериментальными данными. Будем применять физико-математические модели, опробованные в других областях теоретической физики [1–7].

В работе представлены результаты численных расчетов по 4D-модели (пространственно-временной) биомеханических процессов в глазе на основе моделей механики сплошных сред и численных методов решения соответствующих систем дифференциальных уравнений в частных производных. Математическое моделирование как нормальных физиологических, так и патологических процессов в глазе — одно из самых актуальных направлений в научных исследованиях зрения человека. Дело в том, что современная медицина глазных болезней и утраты зрения населением Земли представляет собой в основном экспериментальную науку с огромным эмпирическим опытом воздействия на ход тех или иных глазных болезней различными средствами. В то же время экспериментальное исследование процессов в биологических средах ограничено несколькими очевидными причинами, связанными как с этическими проблемами

(не навреди живому глазу), так и с чисто экспериментальными ограничениями.

Разработка математического аппарата предполагает:

– построение замкнутой механико-математической 4D-модели кумулятивно-диссипативных (конвективных и диффузионных) потоков, описывающей поведение биологической среды на основе системы уравнений в частных производных механики сплошных сред (МСС);

– разработку замыкающих систему МСС реологических соотношений, описывающих поведение той или иной среды (для гидродинамики это уравнения состояния, для механики деформируемого твердого тела — соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций);

– корректную математическую постановку задачи, т. е. представление замкнутой системы МСС и необходимых начальных и граничных условий и условий на контактных границах (если они есть);

– разработку, реализацию и верификацию вычислительных методов, адаптированных к специфике решения конкретной задачи;

– разработку алгоритма численного решения задачи, его верификацию и его программную реализацию для решения новых задач;

– численное решение ряда задач и визуализацию численных результатов;

– разработку автоматизированного рабочего места для практикующего врача (хирурга) или формуляра рекомендаций по трафарету характеристик биологического объекта — глаза — как кумулятивно-диссипативной структуры с конвективными потоками жидкости, фокусирующейся (кумулирующейся) в глазу и структурированными потоками, истекающими (диссипирующимися) из глаза.

В настоящее время во всем мире наблюдается лавинообразный рост инъекций лекарственных веществ (ЛВ) внутрь полости стекловидного тела (СТ), в связи с чем построение адекватной математической модели глаза является актуальной и значимой задачей. Так, по данным *Medicare* в США в 2016 г. выполнено более 5,9 млн инъекций. Предполагается, что в текущем году их число превысит 10 млн. Закономерно увеличивается и число лекарственных препаратов, применяемых интравитреально, и число перспективных направлений, например создание комбинированных медикаментов и разработка новых препаратов длительного терапевтического действия.

Многие заболевания — возрастная макулярная дегенерация (ВМД), диабетический макулярный отек (ДМО), тромбоз центральной вены сетчатки (ЦВС) и ее ветвей, воспалительные заболевания глаза (увеиты)

и некоторые дегенеративные заболевания сетчатки (миопия высокой степени) — эффективно лечатся препаратами, которые доставляются прямо в СТ глазного яблока.

Цель работы — исследование поведения лекарственных препаратов при введении их в заднюю камеру глаза в область СТ. Результаты анализа времени функционирования вихревых потоков позволят определять конкретные места укола (вкола) для достижения наилучшего эффекта нахождения ЛВ в задней камере глаза. Поскольку каждое вводимое вещество имеет различное назначение (в одних случаях требуется, чтобы вещество как можно дольше находилось в задней камере глаза, в других, — чтобы вещество как можно быстрее распространилось по объему глаза), знание местоположения застойных зон, а также зон активного течения жидкости внутри полости глаза позволит достигать максимального эффекта при введении того или иного препарата с различными физическими характеристиками. Общая структура физической модели глазного яблока с условными обозначениями приведена на рис. 1.

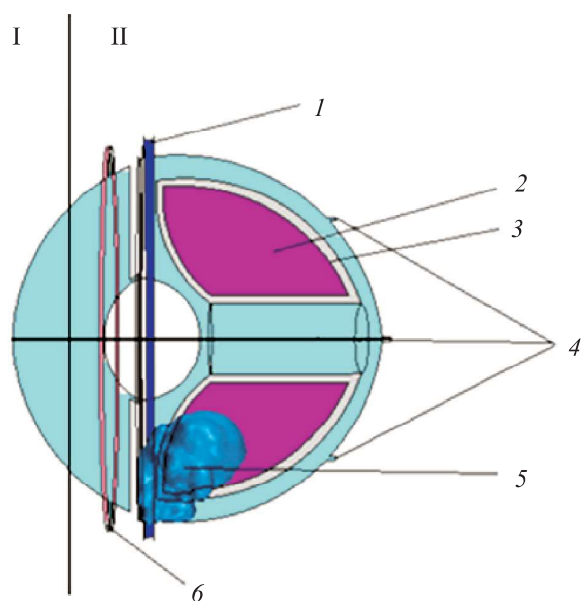


Рис. 1. Общая структура физической модели глазного яблока:

I, II — внешняя и внутренняя области; 1 — приток; 2 — СТ;
3 — граница СТ (пористое тело); 4 — область пульсации; 5 — область с концентрацией ЛВ более 1%; 6 — отток

Стекловидное тело представляет собой бесцветную, прозрачную массу, напоминающую по консистенции желе [8–14]. Оно располагается позади хрусталика и цинновой связки и составляет большую часть содержимого

глазного яблока (65 %), соприкасаясь снаружи с плоской частью цилиарного тела, а на остальном протяжении — с сетчаткой; сзади СТ соприкасается с диском зрительного нерва. При различных заболеваниях, а также ввиду возрастных особенностей в некоторых случаях у пациентов происходит отслойка СТ от задней стенки глазной камеры, что может оказывать существенное влияние на процесс распространения ЛВ внутри глаза.

При математическом моделировании примем следующие допущения в структуре СТ:

- ЛВ распространяется в полости СТ равномерно (без учета наличия цистерн СТ ввиду их индивидуального расположения у каждого человека);
- отслойка СТ при наличии создает в заднем полюсе глаза полость, где ЛВ распространяется быстрее, чем в самом СТ (вследствие наличия цистерн в последнем).

Предлагаемая модель позволяет учитывать:

- наличие клокетова канала — пространства, по которому ЛВ распространяется с большей скоростью, чем в полости СТ;
- наличие (незначительной) «пульсации» глазного яблока в месте выхода из него четырех вортикозных вен;
- образование внутриглазной влаги в зоне проекции цилиарного тела;
- выход внутриглазной влаги в область угла передней камеры глаза в области проекции трабекулы и шлемова канала.

Математическая модель. Общий вид математической постановки задачи представляет собой двухфазную (фаза внутриглазной жидкости и фаза лекарства) четырехмерную в пространстве–времени математическую модель гидродинамики, описывающую перемещение и взаимодействие жидкостей во времени. Математическая модель учитывает тензор вязких напряжений, силу тяжести, условия оттока и притока жидкости, фокусировку (кумуляцию) и диссипацию (распыл) конвективных потоков, а также температурные особенности среды. Математическая постановка для m -й фазы среды имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_m \rho_m u_m}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m u_m^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m u_m v_m}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m u_m w_m}{\partial x_3} + \frac{\partial \alpha_m p}{\partial x_1} = \\ = (\text{Div } \tau)_1 - \frac{\partial \alpha_m u_m^2 \rho_m}{\partial x_1} \theta, \\ \frac{\partial \alpha_m \rho_m v_m}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m u_m v_m}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m v_m^2}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m v_m w_m}{\partial x_3} + \frac{\partial \alpha_m p}{\partial x_2} = \\ = (\text{Div } \tau)_2 - \frac{\partial \alpha_m u_m^2 \rho_m}{\partial x_2} \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_m \rho_m w_m}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m u_m w_m}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m v_m w_m}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m w_m^2}{\partial x_3} + \frac{\partial \alpha_m P}{\partial x_3} = \\ & = (\text{Div } \tau)_3 - \alpha_m \rho_m g - \frac{\partial \alpha_m u_m^2 \rho_m}{\partial x_3} \theta, \\ & \frac{\partial \alpha_m \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m u_m}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m v_m}{\partial x_2} + \frac{\partial \alpha_m \rho_m w_m}{\partial x_3} = 0, \\ & (\text{Div } \tau)_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k}, \\ & \tau_{ki} = 2\mu_m S_{ki}, \\ & S_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_{km}}{\partial x_i} + \frac{\partial v_{im}}{\partial x_k} \right), \\ & \frac{\partial \rho_m T}{\partial t} + (\rho_m V \nabla) T = \chi \Delta (\rho_m T), \\ & \left(P + \frac{a \vartheta^2}{V^2} \right) (V - b \vartheta) = \vartheta R T, \\ & \theta = \frac{T - T_0}{T_0}. \end{aligned}$$

Здесь α_m ($m = 1, 2$) — доля m -й фазы вещества в единице элементарного объема, для каждого элементарного объема $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$; $u_m = v_{1m}$, $v_m = v_{2m}$, $w_m = v_{3m}$ — компоненты скорости газа по координатам для m -й фазы; P , T , ρ , μ и χ — давление, температура, плотность, динамическая вязкость и коэффициент температуропроводности; R — универсальная газовая постоянная; a , b — поправочные коэффициенты уравнения Ван-дер-Ваальса.

Такой подход к построению математической модели хорошо зарекомендовал себя при формировании сложных многофазных математических моделей сложных задач газо- и гидродинамики (см. [1–6]).

Граничные условия. На поверхности внутренней области учитывается давление, инициированное пульсацией кровеносных сосудов, и задается температура тела. Для всей поверхности расчетной области, кроме притока и оттока, задается условие непротекания. В области притока задается скорость поступления внутриглазной жидкости в расчетную область, в области оттока — условие на давление на выходе из расчетной области.

На наружной поверхности расчетной области задается температура окружающей среды и условие непротекания.

В момент укола внутри расчетной области в точке вкола задается объемная скорость поступления ЛВ в течение всего времени введения

вещества. После окончания введения вещества место инъекции не имеет каких-либо особенностей по отношению к остальным пространственным точкам расчетной области.

Построение сетки. Для проведения моделирования внутри расчетной области строится трехмерная неравномерная шестигранная сетка, т. е. вся расчетная область разбивается на элементарные объемы, в каждом из которых на каждом шаге по времени проводится численное решение системы уравнений математической модели. Число ячеек сетки для рассматриваемой задачи составляет примерно 400 тыс.

Результаты математического моделирования. *Распределение поля скоростей внутри глаза.* Результаты анализа распределения поля скоростей в задней камере глаза на базе численных расчетов (рис. 2) наглядно демонстрируют неравномерность течения внутриглазной жидкости, наличие вихревых структур с фокусирующимися потоками и застойных зон, местоположение которых существенно влияет на распространение ЛВ во внутриглазном пространстве.

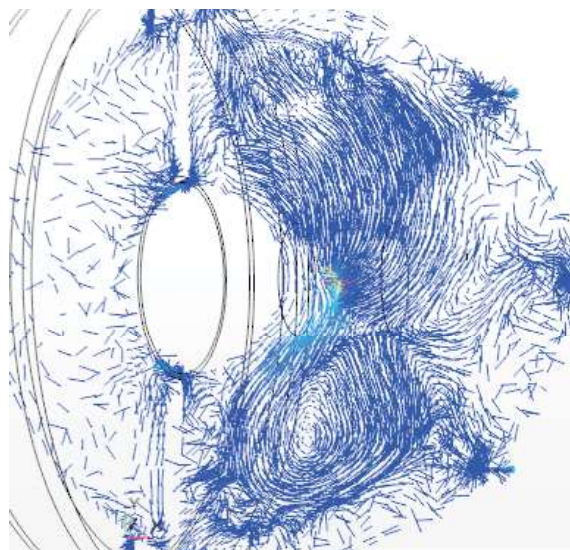


Рис. 2. Распределение поля скоростей внутри глаза

Расчеты проведены при следующих параметрах элементов глаза: склера, роговица находятся вне расчетной области и в моделировании не учитываются; хрусталик рассматривается как твердое тело — препятствие; СТ и лекарство: $\mu = 8,887110^{-4}$ Па · с, $\rho = 1$ г/см³, $c = 4181,72$ Дж/(кг · К).

Численное исследование влияния места укола и положения стекловидного тела на 4D-динамику распространения лекарственного вещества.

В расчетах рассматривались два варианта введения ЛВ (пристеночно и в центр СТ) и два варианта расположения СТ (без изменений и при полной отслойке СТ). Таким образом, возможны четыре варианта инъекций:

- 1) через плоскую часть цилиарного тела при нормальном расположении СТ и введение ЛВ в области вкола (рис. 3, а);
- 2) через плоскую часть цилиарного тела при нормальном расположении СТ и введение ЛВ ближе к центру глазного яблока (рис. 3, б);
- 3) через плоскую часть цилиарного тела при полной задней отслойке СТ и введение ЛВ около места вкола (рис. 3, в);
- 4) через плоскую часть цилиарного тела при полной задней отслойке СТ и введение ЛВ ближе к центру глазного яблока (рис. 3, г).

Далее представлены этапы распространения ЛВ при вариантах 1–4. Численное моделирование указанных вариантов показало, что положение введения ЛВ, а также наличие или отсутствие отслоения СТ оказывают значительное влияние на время нахождения ЛВ внутри глаза.

Вариант 1:

- почти все ЛВ к 216-й секунде выведено из полости СТ;
- ЛВ глубоко в полость СТ не проходит, а «омывает» хрусталик и быстро переходит в переднюю камеру глаза;
- начиная с 10-й секунды численного эксперимента, небольшая доля ЛВ перетекает из задней камеры глаза в переднюю.

Вариант 2:

- почти все ЛВ к 293-й секунде выведено из полости СТ;
- ЛВ равномерно и симметрично движется по объему СТ;
- начиная с 10-й секунды эксперимента небольшая доля ЛВ перетекает из задней камеры глаза в переднюю.

Вариант 3:

- все ЛВ к 245-й секунде выведено из полости глазного яблока;
- ЛВ глубоко в полость СТ не проходит, но продолжительно находится в области за хрусталиком;
- начиная с 10-й секунды эксперимента небольшая доля ЛВ перетекает из задней камеры глаза в переднюю.

Вариант 4:

- небольшое количество ЛВ к 652-й секунде эксперимента продолжает находиться в полости глаза;
- ЛВ равномерно и симметрично движется по объему СТ;
- ЛВ начинает попадать из задней камеры в переднюю только к 170-й секунде эксперимента, общая доля ЛВ, попавшего в переднюю камеру, в несколько раз меньше, чем в предыдущих вариантах.

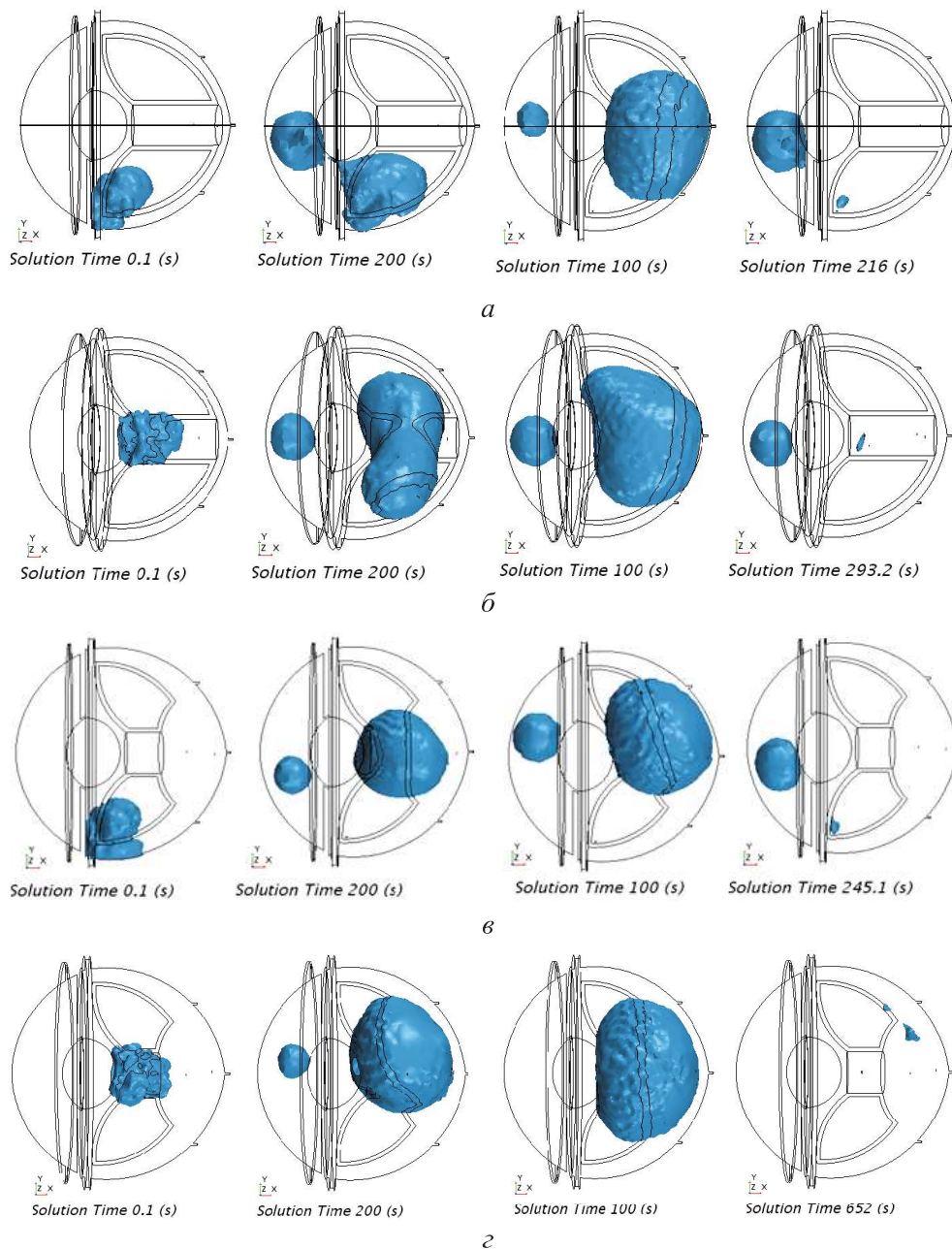


Рис. 3. Результаты расчета вариантов инъекций 1–4 (а–г)

Заключение. Численное исследование биомедицинских процессов в глазе показали эффективность его использования для решения задач в офтальмологии. Действительно, знание особенностей циркуляции внутриглазной жидкости позволяет представить характер 4D-распределения (в пространстве–времени) ЛВ в полости глаза. Это стало особенно актуально в последнее время в связи с лавинообразным ростом интравитреальных

инъекций вследствие диабетического макулярного отека у пациентов с сахарным диабетом. Визуализировано распределение во времени лекарства в полости глаза после введения в СТ. В частности, выполненное математическое моделирование доказало следующее:

– геометрия и расположение СТ оказывают существенное влияние на продолжительность нахождения ЛВ в задней камере глаза;

– местоположение инъекции значительно влияет на длительность нахождения ЛВ внутри глаза; так, в зависимости от параметров глаза и геометрии вкола время нахождения ЛВ изменяется в разы (от 216 до 652 с):

- при введении ЛВ ближе к центру глазного яблока время нахождения вещества возрастает по сравнению с пристеночным введением ЛВ (от 216 до 293 с);

- при отслоении СТ время нахождения ЛВ в глазу возрастает по сравнению с нормальным расположением СТ до 2 раз, что благоприятно влияет на пролонгацию его терапевтического эффекта при общем отрицательном влиянии отслоения;

– учет 3D геометрического строения глаза: расположение источников и стоков жидкости (трабекулы и т. д.) в глазу приводит в численных расчетах к открытию областей с кумуляцией (фокусировкой) конвективных потоков (области Эйлера) и застойных областей со слабыми конвективными скоростями (области Лагранжа).

Проведенные расчеты дали результаты, качественно соответствующие наблюдаемым в клинической практике фактам. Так, введение ЛВ, согласно этим наблюдениям, следует выполнять ближе к центру глазного яблока.

Наличие в СТ постоянного тока жидкости подтверждено результатами радиографических исследований: установлено передвижение индифферентных красок или радионуклидных изотопов, введенных экстраокулярно, в витреальных массах. Продуцируемая цилиарным телом жидкость поступает в основание СТ, откуда движется по путям оттока в переднюю камеру и в периваскулярные пространства зрительного нерва. В первом случае жидкость смешивается с камерной влагой и отводится вместе с нею, во втором из заднего отдела СТ, граничащего с оптической частью сетчатки, жидкость оттекает по периваскулярным пространствам сосудов сетчатки.

В результате моделирования и учета 3D-геометрии входа жидкости в глаз и ее выхода из глаза удалось получить численные характеристики вихревых динамических процессов при функционировании (при разнесении в пространстве вхождении и выходе) жидкости в глазу в любой

его области. Как было отмечено, в результате численного моделирования удалось открыть области кумуляции потоков жидкости (области Эйлера) и области с медленным (застойным) движением (области Лагранжа). При изменении вязкости в глазу в зависимости от возраста пациента должно наблюдаться существенное изменение этих областей. В практической офтальмологии эти области изучены недостаточно и требуют тщательных экспериментальных исследований.

Одной из областей успешного применения математического моделирования является создание механических моделей глаза на основе МСС. Внутриглазное давление — одна из важных характеристик человеческого глаза. Отклонение его от нормы является причиной снижения зрения значительного числа пациентов [15, 16]. В связи с этим совершенствование и разработка новых методов его измерения являются важным направлением исследований в офтальмологии. Уровень глазного давления позволяет судить о развитии патологических процессов, например глаукомы. На основании этой модели также можно оптимизировать режимы работы лазера, что выполнено в [17] с тем, чтобы снизить травмирующее воздействие на ткани как переднего, так и заднего сегментов глаза. Верификация модели по результатам работы [17] будет выполнена в следующей работе.

В результате численного исследования решены следующие задачи:

- создана математическая модель глазного яблока, на базе которой исследовано 4D-движение жидкости внутри глаза (при упрощенном строении глаза, без учета цистерн);
- оценены времена нахождения ЛВ в полости СТ до его полного вымывания в зависимости от места инъекции;
- выявлены и оценены во времени 3D-пути движения ЛВ в полости СТ;
- оценена разность времени нахождения ЛВ в полости СТ в зависимости от наличия или отсутствия полной отслойки СТ;
- исследована интерференция (взаимодействие) центробежных потенциалов конвективных потоков жидкости в глазу с 4D-границами внутри глаза до и после операций или внесения инородных тел. На этой базе можно выявлять и исследовать области конвективных потоков Эйлера и застойных областей Лагранжа в глазу.

Следовательно, доказано, что живой глаз является частично открытой кумулятивно-диссипативной системой [7], в которой ввиду взаимодействия границ глаза с эффективным центробежным потенциалом формируются области кумуляции (фокусировки) конвективных потоков (области Эйлера) и медленно вращающихся структур (области Лагранжа).

жа). Области Эйлера с высокими скоростями кумулирующих потоков являются аналогами областей возле линейных точек кумуляции (L_{1-3}) конвективных потоков, открытых Л. Эйлером в 1767 г. При этом области с малыми скоростями или застойными потоковыми зонами являются аналогами областей возле точек либрации Лагранжа ($L_{4, 5}$), открытых Ж.-Л. Лагранжем в 1772 г.

Полученные результаты верифицированы на базе имеющихся клинических исследований практикующих офтальмологов.

Благодарности

Авторский коллектив выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук А.А. Вороненко за техническое содействие в написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Yusupaliev U., Savenkova N.P., Troshchiev Yu.V., et al. Vortex rings and plasma toroidal vortices in homogeneous unbounded media. II. The study of vortex formation process. *Bull. Lebedev Phys. Inst.*, 2011, vol. 38, no. 9, pp. 275–282. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068335611090065>
- [2] Savenkova N.P., Anpilov S.V., Kuzmin R.N., et al. Reduction cell multiphase 3d model. *Applied Physics*, 2012, no. 3, pp. 111–115.
- [3] Savenkova N., Laponin V. A numerical method for finding soliton solutions in nonlinear differential equations. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2013, vol. 37, no. 2, pp. 49–54. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0278641913020076>
- [4] Кузьмин Р.Н., Лапонин В.С., Савенкова Н.П. и др. Математическое моделирование формирования уединенной волны на поверхности жидкости. *Инженерная физика*, 2014, № 8, с. 19–24.
- [5] Yusupaliyev U., Savenkova N.P., Shuteyev S.A., et al. Computer simulation of vortex self-maintenance and amplification. *Moscow Univ. Phys.*, 2013, vol. 68, no. 4, pp. 317–319. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027134913040115>
- [6] Bychkov V.L., Savenkova N.P., Anpilov S.V., et al. Modeling of vorticle objects created in Gatchina discharge. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2012, vol. 40, iss. 12, pp. 3158–3161. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPS.2012.2210566>
- [7] Vysikaylo P.I. Cumulative point — L_1 between two positively charged plasma structures (3-D strata). *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2014, vol. 42, iss. 12, pp. 3931–3935. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPS.2014.2365438>
- [8] Алексеев И.Б., Белкин В.Е., Самойленко А.И. и др. Стекловидное тело. Структура, патология и методы хирургического лечения (обзор литературы). *Новости глаукомы*, 2015, №1, с. 69–73.
- [9] Махачева З.А. Анатомия стекловидного тела. М., Русспринт, 2006.
- [10] Старков Г.Л. Патология стекловидного тела при биомикроскопическом исследовании. Автореф. дис. ... д-ра мед. наук. Новокузнецк, 1964.

[11] Busacca A., Goldmann H., Schiff-Wertheimer S. Biomicroscopie du corps vitre et Du Fond de l'oeil. Paris, Masson & Cie, 1957.

[12] Koeppel L. Die Mikroskopie des Lebenden Auges. Berlin, Springer, 1922.

DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-91818-6>

[13] Rao S., Kulkarni M., Cooper S., et al. Analysis of proteins of bovine lens, vitreous, and aqueous by electrophoresis and by Oudin's gel diffusion technique. *Brit. J. Ophthalmol.*, 1955, vol. 39, iss. 3, pp. 163–169. DOI: <http://dx.doi.org/10.1136/bjo.39.3.163>

[14] Worst J.G.F., Los L.I. Cisternal anatomy of the vitreous. Amsterdam, Kugler, 1955.

[15] Хусаинов Р.Р., Цибульский В.Р., Якушев В.Л. Моделирование деформации глаза при измерении внутриглазного давления оптическим методом. *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2011, т. 51, № 2, с. 349–362.

[16] Якушев В.Л. Постановка задачи о математическом моделировании измерения глазного давления пневмотонометрическим методом. *Механика твердого тела*, 2011, № 6, с. 149–158.

[17] Богомолова М.С., Петров И.Б. Численное моделирование динамических процессов в глазу при лазерной экстракции катаракты. *Вестник РГУ им. И. Канта*, 2007, № 10, с. 37–43.

Складчиков Сергей Андреевич — канд. физ.-мат. наук, факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова (Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1/3).

Савенкова Надежда Петровна — д-р физ.-мат. наук, факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова (Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1/3).

Высикайло Филипп Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической физики МГОУ (Российская Федерация, 141014, Мытищи, Московская обл., ул. Веры Волошиной, д. 24).

Аветисов Сергей Эдуардович — академик РАН, д-р мед. наук, профессор, научный руководитель ФГБНУ «НИИ глазных болезней» (Российская Федерация, 119021, Москва, ул. Россолимо, д. 11А).

Липатов Дмитрий Валентинович — д-р мед. наук, профессор, заведующий отделением диабетической ретинопатии и офтальмохирургии ФГБУ «НМИЦ эндокринологии» Минздрава России (Российская Федерация, 115478, Москва, ул. Дмитрия Ульянова, д. 11); профессор кафедры глазных болезней Медицинского института РУДН (Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6).

Новодережкин Владимир Владимирович — канд. мед. наук, врач-офтальмолог ГКБ №15 им. О.М. Филатова (Российская Федерация, 111539, Москва, ул. Вешняковская, д. 23).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Складчиков С.А., Савенкова Н.П., Высикайло Ф.И. и др. 4D-исследование вихревых движений жидкостей внутри глаза. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, № 5 (98), с. 73–88.

DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2021-5-73-88>

**4D INVESTIGATION OF VORTEX FLUID MOTION
INSIDE THE EYEBALL**

S.A. Skladchikov¹

skladtchikov@mail.ru

N.P. Savenkova¹

mknandrew@mail.ru

P.I. Vysikaylo²

filvys@yandex.ru

S.E. Avetisov³

s.avetisov@niigb.ru

D.V. Lipatov^{4,5}

glas1966@rambler.ru

V.V. Novoderezhkin⁶

lazer_vv@mail.ru

¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

²Moscow Region State University, Mytishchi, Moscow Region, Russian Federation

³Research Institute of Eye Diseases, Moscow, Russian Federation

⁴National Medical Research Center for Endocrinology
of the Ministry of Health of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation

⁵RUDN Medical Institute, Moscow, Russian Federation

⁶Municipal Clinical Hospital No. 15 named after O.M. Filatov,
Moscow, Russian Federation

Abstract

The eye is a complex system of boundaries and fluids with different viscosities within the boundaries. At present, there are no experimental possibilities to thoroughly observe the dynamic 4D processes after one or another method of eye treatment is applied. The complexity of cumulative, i.e., focusing, and dissipative, i.e., scattering, convective and diffusion 4D fluxes of fluids in the eye requires 4D analytical and numerical models of fluid transfer in the human eyeball to be developed. The purpose of the study was to develop and then verify a numerical model of 4D cumulative-dissipative processes of fluid transfer in the eyeball. The study was the first to numerically evaluate the values of the characteristic time of the drug substance in the vitreous cavity until it is completely washed out, depending on the injection site; to visualize the paths of the vortex motion of the drug in the vitreous cavity; to determine the main parameters of the 4D fluid flows of the medicinal substance in the

Keywords

Vortex formations, convective diffusion flows, mathematical simulation

vitreous cavity, depending on the presence or absence of vitreous detachment from the wall of the posterior chamber of the eye. The results obtained are verified by the experimental data available to doctors. In the eye, as a partially open cumulative-dissipative system, Euler regions with high rates of cumulative flows and regions with low speeds or stagnant Lagrange flow zones are defined

Received 30.11.2020

Accepted 10.01.2021

© Author(s), 2021

REFERENCES

- [1] Yusupaliev U., Savenkova N.P., Troshchiev Yu.V., et al. Vortex rings and plasma toroidal vortices in homogeneous unbounded media. II. The study of vortex formation process. *Bull. Lebedev Phys. Inst.*, 2011, vol. 38, no. 9, pp. 275–282. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1068335611090065>
- [2] Savenkova N.P., Anpilov S.V., Kuzmin R.N., et al. Reduction cell multiphase 3d model. *Applied Physics*, 2012, no. 3, pp. 111–115.
- [3] Savenkova N., Laponin V. A numerical method for finding soliton solutions in non-linear differential equations. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2013, vol. 37, no. 2, pp. 49–54. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0278641913020076>
- [4] Kuz'min R.N., Laponin V.S., Savenkova N.P., et al. Mathematical modeling of the formation of a solitary wave on a liquid surface. *Inzhenernaya fizika* [Engineering Physics], 2014, no. 8, pp. 19–24 (in Russ.).
- [5] Yusupaliyev U., Savenkova N.P., Shuteyev S.A., et al. Computer simulation of vortex self-maintenance and amplification. *Moscow Univ. Phys.*, 2013, vol. 68, no. 4, pp. 317–319. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0027134913040115>
- [6] Bychkov V.L., Savenkova N.P., Anpilov S.V., et al. Modeling of vorticle objects created in Gatchina discharge. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2012, vol. 40, iss. 12, pp. 3158–3161. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPS.2012.2210566>
- [7] Vysikaylo P.I. Cumulative point — L_1 between two positively charged plasma structures (3-D strata). *IEEE Trans. Plasma Sci.*, 2014, vol. 42, iss. 12, pp. 3931–3935. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPS.2014.2365438>
- [8] Alekseev I.B., Belkin V.E., Samoylenko A.I., et al. Vitreous. Anatomy, pathology and methods of surgical treatment (review). *Novosti glaukomy*, 2015, no. 1, pp. 69–73 (in Russ.).
- [9] Makhacheva Z.A. *Anatomiya steklovidnogo tela* [Anatomy of vitreous body]. Moscow, Rusprint Publ., 2006.
- [10] Starkov G.L. *Patologiya steklovidnogo tela pri biomikroskopicheskom issledovanii*. Avtoref. dis. d-ra med. nauk [Vitreous body pathology at biomicroscopic study. Dr. Med. Sc. Diss. Abs.]. Novokuznetsk, 1964 (in Russ.).
- [11] Busacca A., Goldmann H., Schiff-Wertheimer S. *Biomicroscopie du corps vitre et Du Fond de l'oeil*. Paris, Masson & Cie, 1957.

- [12] Koeppe L. Die Mikroskopie des Lebenden Auges. Berlin, Springer, 1922.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-91818-6>
- [13] Rao S., Kulkarni M., Cooper S., et al. Analysis of proteins of bovine lens, vitreous, and aqueous by electrophoresis and by Oudin's gel diffusion technique. *Brit. J. Ophthalmol.*, 1955, vol. 39, iss. 3, pp. 163–169. DOI: <http://dx.doi.org/10.1136/bjo.39.3.163>
- [14] Worst J.G.F., Los L.I. Cisternal anatomy of the vitreous. Amsterdam, Kugler, 1955.
- [15] Khusainov R.R., Tsibul'skii V.R., Yakushev V.L. Simulation of eye deformation in the measurement of intraocular pressure. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 2, pp. 326–338. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542511020096>
- [16] Yakushev V.L. Statement of the problem of intraocular pressure measurement modeling by a pneumotometric method. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 6, pp. 937–945. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654411060136>
- [17] Bogomolova M.S., Petrov I.B. Numerical modeling of dynamic processes in an eye during the procedure of surgeon cataract laser extraction. *Vestnik RGU im. I. Kanta*, 2007, no. 10, pp. 37–43 (in Russ.).

Skladchikov S.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (Leninskie Gory 1/3, Moscow, 119991 Russian Federation).

Savenkova N.P. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (Leninskie Gory 1/3, Moscow, 119991 Russian Federation).

Vysikaylo P.I. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Theoretical Physics, Moscow Region State University (Very Voloshinoy ul. 24, Mytishchi, Moscow Region, 141014 Russian Federation).

Avetisov S.E. — Academician of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sc. (Med.), Professor, Academic Advisor, Research Institute of Eye Diseases (Rossolimo ul. 11A, Moscow, 119021 Russian Federation).

Lipatov D.V. — Dr. Sc. (Med.), Professor, Head of the Department of Diabetic Retinopathy and Ophthalmosurgery, National Medical Research Center for Endocrinology of the Ministry of Health of the Russian Federation (Dmitriya Ulyanova 11, Moscow, 115478 Russian Federation); Professor, Department of Eye Diseases, RUDN Medical Institute (Miklylho-Maklaya ul. 6, Moscow, 117198 Russian Federation).

Novoderezhkin V.V. — Cand. Sc. (Med.), Ophthalmologist, Municipal Clinical Hospital No. 15 named after O.M. Filatov (Veshnyakovskaya ul. 23, Moscow, 111539 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Skladchikov S.A., Savenkova N.P., Vysikaylo P.I., et al. 4D investigation of vortex fluid motion inside the eyeball. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2021, no. 5 (98), pp. 73–88 (in Russ.).