УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Ю. И. Димитриенко

Московский государственый технический университет
им. Н.Э. Баумана, Москва (e-mail: dimit.bmstu@gmail.com)

Предложена теория тонких многослойных анизотропных пластин, построенная на основе уравнений общей трехмерной теории упругости с использованием асимптотических разложений по малому параметру, введенному как отношение толщины к характерной длине, без принятия каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине. Сформулированы рекуррентные последовательности локальных задач и получены их решения в явном виде. Показано, что глобальная (осредненная по определенным правилам) задача теории пластин в разработанной теории получается близкой к теории пластин Кирхгофа–Лява. Предложенный метод позволяет вычислить все 6 компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига.

Ключевые слова: многослойные пластины, асимптотические разложения, локальные задачи.

ASYMPTOTIC THEORY OF MULTILAYER THIN PLATES

Yu. I. Dimitrienko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow,
Russia (e-mail: dimit.bmstu@gmail.com)

A theory of thin multilayer anisotropic plates is offered. The theory is constructed on the basis of equations of the general three-dimensional theory of elasticity by means of introducing asymptotic expansions with respect to a small parameter defined as a ratio of a thickness to the characteristic length without involvement of any hypotheses regarding a nature of distribution of displacements and stresses along the thickness. Recurrent sequences of local problems are formulated and their solutions are obtained in the explicit form. It is shown that the global (averaged by certain rules) problem of theory of plates turns out in the developed theory to be close to the Kirchhoff–Love theory of plates. The offered method makes it possible to calculate all six components of the tensor of stresses including the transverse normal stresses and stresses of multilayer shear.

Keywords: multilayer plates, asymptotic expansions, local problems.

Несмотря на появление в последнее время высокопроизводительных вычислительных средств, позволяющих решать задачи теории упругости в общей трехмерной постановке для конструкций сложной формы, интерес к решению задач в двумерной постановке (для пластин и оболочек) не ослабевает. Очевидные преимущества двумерных постановок — снижение размерности задачи, отсутствие необходимости детального построения сеток по толщинной координате для достижения приемлемой точности расчета напряжений, сохраняются и в настоящее время и, по-видимому, будут актуальны еще достаточно долго. В связи с этим попытки модификации классических теорий пластин и оболочек, направленные на получение уточненных алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния тонких тел, продолжают быть востребованными. Таких модификаций, как известно, предложено достаточно много. Не претендуя на полноту списка, отметим лишь некоторые исследования в этой области [1–9]. Сравнительно недавно [2, 3] появились работы, в которых предложены теории тонких пластин и оболочек с двумерной микроструктурой — сотовыми, сетчатыми конструкциями, используя для этого метод асимптотического осреднения (метод гомогенизации (МГ)), хорошо зарекомендовавший себя при осреднении композитов с трехмерной периодической структурой [10–14]. Применение МГ для двумерных структур вызывает определенные сложности и не является частным случаем общей трехмерной задачи, поскольку двумерные пластины и оболочки сохраняют третью координату, но не обладают по ней периодической структурой. В работах [2, 3] был предложен вариант МГ для тонких пластин, в котором использовалось допущение о линейном характере распределения по толщине главных членов асимптотического ряда для перемещений, что позволило получить систему уравнений типа Кирхгофа–Лява.

Цель настоящей статьи — разработка МГ для тонких многослойных пластин, в котором не делается предположение о линейности распределения перемещений. Показано, что для многослойных пластин такое линейное распределение отсутствует, а имеет место аналог гипотезы ломаной линии, используемой в теории Григолюка–Куликова [1].

Основные допущения. Рассмотрим многослойную пластину постоянной толщины и введем малый параметр $\kappa = h/L \ll 1$ как отношение общей толщины пластины h к характерному размеру всей пластины L (например, к ее максимальной длине). Введем также глобальные x_k и локальную ξ координаты

$$x_k = \tilde{x}_k/L, \quad \xi = x_3/\kappa, \quad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\tilde{x}_k$ — обычные декартовы координаты, ориентированные таким образом, что ось $O\tilde{x}_3$ направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2$ лежат в срединной плоскости пластины. Полагаем, что существует два масштаба изменения перемещений u_k: один по направлениям $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2$, а второй по направлению $O\tilde{x}_3$. Координаты x_3 и ξ, как это принято в методе асимптотического осреднения, рассматриваются как независимые переменные. Координата ξ по толщине пластины изменяется в диапазоне $-0{,}5 < \xi_3 < 0{,}5$.

Рассмотрим для пластины трехмерную задачу линейной теории упругости

$$\begin{aligned} &\nabla_j \sigma_{ij} = 0; \\ &\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j\right); \\ &\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}; \\ &\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} = -\kappa^3 p_{\pm}\delta_{i3}, \quad \Sigma_T : u_i = u_{ei}, \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}] = 0, \quad [u_3] = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

состоящую из уравнений равновесия, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на на внешней и внутренней поверхностях пластины $\Sigma_{3\pm}$ (их уравнение имеет вид $\tilde{x}_3 = \pm h/2$) и на торцевой поверхности Σ_T, а также граничных условий на поверхности контакта Σ_S слоев пластины ($[u_i]$ — скачок функций), которые могут и отсутствовать (для однослойной пластины).

Основное допущение состоит в том, что давление $\tilde{p}_{\pm}$ на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости $O(\kappa^3)$ (т.е. $\tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}$) — это допущение, как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин. В уравнениях (2) σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, ε_{ij} — компоненты тензора деформаций, u_j — компоненты вектора перемещений, $\nabla_j = \partial/\partial\tilde{x}_j$ — оператор дифференцирования по декартовым координатам, $C_{ijkl}(\xi)$ — компоненты тензора модулей упругости, который полагается зависящим от координаты $\xi_3 = \xi$, так как этот тензор различен для разных слоев пластины. Никакого специального допущения об анизотропии материалов слоев пока не делаем, т.е. тензоры модулей упругости имеют по 21 независимой компоненте [15].

Асимптотические разложения для многослойной пластины. Задача (2) содержит локальную координату ξ, а также малый параметр κ в граничных условиях (это коэффициент при давлении), поэтому ее решение будем искать в виде асимптотических разложений по параметру κ как функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \cdots . \tag{3}$$

Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами I, J, K, L принимают значения 1, 2, а индексы i, j, k, l — значения 1, 2, 3.

Подставим разложения (3) в соотношения Коши в системе (2), при этом используем правила дифференцирования функций локальных координат [10–12] $\partial/\partial\tilde{x}_j \to \partial/\partial x_j + (1/\kappa)\delta_{j3}\partial/\partial\xi$, тогда получим асимптотические разложения для деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{(1)} + \kappa^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + \cdots , \tag{4}$$

где

$$\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(1)}), \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(1)};$$

$$\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(2)}), \quad \varepsilon_{33}^{(1)} = u_{3/3}^{(2)}; \tag{5}$$

$$\varepsilon_{IJ}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(2)} + u_{J,I}^{(2)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(2)} + u_{I/3}^{(3)}), \quad \varepsilon_{33}^{(2)} = u_{3/3}^{(3)}, \text{ и т.д.}$$

Здесь производные по локальной координате обозначены как $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)}/\partial\xi$ и по глобальным координатам как $u_{i,j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)}/\partial x_j$.

Подставляя выражение (4) в закон Гука в системе (2), получаем асимптотическое разложения для напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \kappa\sigma_{ij}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{ij}^{(2)} + \ldots, \tag{6}$$

где

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(0)}, \quad \sigma_{i3}^{(0)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)};$$

$$\sigma_{IJ}^{(1)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(1)}, \quad \sigma_{i3}^{(1)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(1)}; \tag{7}$$

$$\sigma_{IJ}^{(2)} = C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{IJk3}\varepsilon_{k3}^{(2)}, \quad \sigma_{i3}^{(2)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(2)} \text{ и т.д.}$$

Формулировка локальных задач. Подставив разложения (3), (4) и (6) в уравнения равновесия и граничные условия системы (2), получим

$$\begin{gathered}
\frac{1}{\kappa}\sigma_{i3/3}^{(0)} + (\sigma_{iJ,J}^{(0)} + \sigma_{i3/3}^{(1)}) + \kappa(\sigma_{iJ,J}^{(1)} + \sigma_{i3/3}^{(2)}) + \kappa^2(\sigma_{iJ,J}^{(2)} + \sigma_{i3/3}^{(3)}) + \cdots = 0;\\
\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} + \kappa\sigma_{i3}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{i3}^{(2)} + \cdots = -\kappa^3 p_{\pm}\delta_{i3};\\
\Sigma_T : u_i = u_i^{(0)} + \kappa u_i^{(1)} + \kappa^2 u_i^{(2)} + \kappa^3 u_i^{(3)} + \cdots = u_{ei}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Приравнивая в уравнениях равновесия члены при κ^{-1} нулю, а при остальных степенях от κ к некоторым величинам $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$, не зависящим от ξ_l, получим рекуррентную последовательность локальных задач. Задача для нулевого приближения имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_{i3/3}^{(0)} = 0,\\
&\sigma_{i3}^{(0)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)},\\
&\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(1)}), \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(1)},\\
&\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} = 0; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(0)}] = 0, \quad [u_i^{(1)}] = 0, \quad \langle u_i^{(1)} \rangle;
\end{aligned} \tag{9}$$

для первого приближения

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{i3/3}^{(1)} + \sigma_{iJ,J}^{(0)} = h_i^{(0)}, \\
&\sigma_{i3}^{(1)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(1)}, \\
&\varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(1)} = \tfrac{1}{2}(u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(2)}), \quad \varepsilon_{33}^{(1)} = u_{3/3}^{(2)}, \\
&\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(1)} = 0; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(1)}] = 0, \quad [u_i^{(2)}] = 0, \quad \langle u_i^{(2)} \rangle;
\end{aligned}
\tag{10}
$$

для второго приближения

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{i3/3}^{(2)} + \sigma_{iJ,J}^{(1)} = h_i^{(1)}, \\
&\sigma_{i3}^{(2)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(2)}, \\
&\varepsilon_{IJ}^{(2)} = \tfrac{1}{2}(u_{I,J}^{(2)} + u_{J,I}^{(2)}, \quad \varepsilon_{I3}^{(2)} = \tfrac{1}{2}(u_{3,I}^{(2)} + u_{I/3}^{(3)}), \quad \varepsilon_{33}^{(2)} = u_{3/3}^{(3)}, \\
&\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(2)} = 0; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(2)}] = 0, \quad [u_i^{(3)}] = 0, \quad \langle u_i^{(3)} \rangle = 0;
\end{aligned}
\tag{11}
$$

для третьего приближения

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{i3/3}^{(3)} + \sigma_{iJ,J}^{(2)} = h_i^{(2)}, \\
&\sigma_{i3}^{(3)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(3)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(3)}, \\
&\varepsilon_{IJ}^{(3)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(3)} + u_{J,I}^{(2)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(3)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(3)} + u_{I/3}^{(4)}), \quad \varepsilon_{33}^{(3)} = u_{3/3}^{(4)}, \\
&\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(3)} = -p_{\pm}\delta_{i3}; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(3)}] = 0, \quad [u_i^{(4)}] = 0, \quad \langle u_i^{(4)} \rangle,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

и т.д. Здесь

$$
\langle u_i^{(1)} \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(3)} d\xi \tag{13}
$$

— операция осреднения по толщине пластины.

Уравнения равновесия (8) после введения функций $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$ принимают вид

$$
h_i^{(0)} + \kappa h_i^{(1)} + \kappa^2 h_i^{(2)} + \cdots = 0. \tag{14}
$$

Решением локальной задачи нулевого приближения (9) являются функции $u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$; они зависят от локальных координат ξ_l и входных данных этой задачи — перемещений $u_j^{(0)}(x_J)$. Решением задачи (10) являются функции $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$, а $u_j^{(1)}, \sigma_{ij}^{(0)}$ в этой задаче — входные данные. В задаче (11) функции $u_j^{(3)}, \varepsilon_{kl}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$ — неизвестные, а $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ — входные данные и т.д.

Решение задачи нулевого приближения. Ввиду того, что задачи (9)–(11) одномерные по локальной переменной ξ, их решение можно найти аналитически. Решение уравнений равновесия с граничными условиями в локальной задаче (9) имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \quad \forall \xi : -0{,}5 < \xi < 0{,}5. \tag{15}$$

Подставляя сюда выражение (7) для $\sigma_{i3}^{(0)}$, получим

$$C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)} = 0. \tag{16}$$

Выразим из этой системы уравнений деформации $\varepsilon_{k3}^{(0)}$:

$$\varepsilon_{k3}^{(0)} = -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL}\ \varepsilon_{KL}^{(0)}, \tag{17}$$

где C_{i3k3}^{-1} — матрица компонент, обратная к C_{i3k3}. Подставляя в (16) выражения для деформаций $\varepsilon_{k3}^{(0)}$ из задачи (9), после интегрирования с учетом условий $\langle u_i^{(1)} \rangle = 0$, находим перемещения $u_i^{(1)}$:

$$u_I^{(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)} + 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \left(\left\langle \int\limits_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \right\rangle - \int\limits_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \right), \tag{18}$$

$$u_3^{(1)} = \varepsilon_{KL}^{(0)} \left(\left\langle \int\limits_{-0,5}^{\xi} C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \right\rangle - \int\limits_{-0,5}^{\xi} C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \right); \tag{19}$$

здесь учтено, что деформации $\varepsilon_{KL}^{(0)}(x_J)$ согласно (9), не зависят от ξ.

Подставляя выражение (17) в первую группу соотношений (7), находим, что напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$, в отличие от $\sigma_{i3}^{(0)}$, являются ненулевыми

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(0)}; \tag{20}$$

$$C_{IJKL}^{(0)} = C_{IJKL} - C_{IJk3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL}. \tag{21}$$

Решение задачи первого, второго и третьего приближений. Решение уравнений равновесия в системах (10)–(12) вместе с граничными условиями на Σ_S и $\xi = -0{,}5$ имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(1)} = -\int\limits_{-0,5}^{\xi} \sigma_{iJ,J}^{(0)} d\xi + h_i^{(0)}(\xi + 0{,}5); \tag{22}$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = -\int\limits_{-0,5}^{\xi} \sigma_{iJ,J}^{(1)} d\xi + h_i^{(1)}(\xi + 0,5); \tag{23}$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = -p_- \delta_{i3} - \int\limits_{-0,5}^{\xi} \sigma_{iJ,J}^{(2)} d\xi + h_i^{(2)}(\xi + 0,5). \tag{24}$$

Условия существования решения (22)–(24) задач (10)–(12), удовлетворяющих граничным условиям $\sigma_{i3}^{(1)} = 0$, $\sigma_{i3}^{(2)} = 0$, $\sigma_{i3}^{(1)} = -p_+$ на внешней поверхности $\xi = 0{,}5$, приводят к следующей системе уравнений для вычисления функций $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$

$$h_i^{(0)} = \langle \sigma_{iJ,J}^{(0)} \rangle; \tag{25}$$

$$h_i^{(1)} = \langle \sigma_{iJ,J}^{(1)} \rangle; \tag{26}$$

$$h_i^{(2)} = \langle \sigma_{iJ,J}^{(2)} \rangle - \Delta p \delta_{i3}, \quad \Delta p = p_+ - p_-. \tag{27}$$

С учетом формул (25)–(27) напряжения $\sigma_{i3}^{(m)}$ (22)–(24) принимают вид

$$\sigma_{i3}^{(1)} = \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{iJ,J}^{(0)} \rangle - \sigma_{iJ,J}^{(0)}) d\xi; \tag{28}$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{iJ,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{iJ,J}^{(1)}) d\xi; \tag{29}$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = -(p_- + \Delta p(\xi + 0,5))\delta_{i3} + \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{iJ,J}^{(2)} \rangle - \sigma_{iJ,J}^{(2)}) d\xi. \tag{30}$$

Если подставить выражения (20) в (28), то получим для напряжений $\sigma_{i3}^{(1)}$ формулу

$$\sigma_{I3}^{(1)} = \varepsilon_{KL,J}^{(0)} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi, \quad \sigma_{33}^{(1)} = 0. \tag{31}$$

Выразим деформации $\varepsilon_{k3}^{(1)}$ из четвертой группы соотношений (7), тогда с учетом формул (28) получим

$$\varepsilon_{k3}^{(1)} = -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} - \varepsilon_{KL,J}^{(0)} C_{k3I3}^{-1} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi. \tag{32}$$

Если подставить теперь (32) в третью группу соотношений (7), то найдем оставшиеся напряжения первого приближения:

$$\sigma^{(1)}_{IJ} = C^{(0)}_{IJKL}\varepsilon^{(1)}_{KL} + N^{(0)}_{IJKLM}\varepsilon^{(0)}_{KL,M};$$
$$N^{(0)}_{IJKLM} = -C_{IJk3}C^{-1}_{k3P3}\int\limits_{-0,5}^{\xi}(\langle C^{(0)}_{PMKL}\rangle - C^{(0)}_{PMKL})d\xi. \qquad (33)$$

Деформации $\varepsilon^{(1)}_{KL}$ с учетом формул (10), (19) можно представить в виде

$$\varepsilon^{(1)}_{KL} = \xi\eta^{+}_{KL}\varPhi_{KLMNS}\varepsilon^{(0)}_{MN,S}; \qquad (34)$$

$$\eta^{=}_{KL} - u^{(0)}_{3,KL}, \quad \varPhi_{KLMNS}(\xi) = \tilde{\varPhi}_{KLMNS}(\xi) - \langle\tilde{\varPhi}_{KLMNS}(\xi)\rangle; \qquad (35)$$

$$\tilde{\varPhi}_{KLMNS}(\xi) = -\int\limits_{-0,5}^{\xi}(C^{-1}_{K3i3}\delta_{SL}+C^{-1}_{L3i3}\delta_{SK})C^{d}_{i3MN}\xi. \qquad (36)$$

С учетом формул (34), выражения (33) принимают вид

$$\sigma^{(1)}_{IJ} = \xi C^{(0)}_{IJKL}\eta^{+}_{KL}\tilde{N}^{(0)}_{IJKLM}\varepsilon^{(0)}_{KL,M};$$
$$\tilde{N}^{(0)}_{IJKLM} = N^{(0)}_{IJKLM} + \varPhi_{IJKLM}. \qquad (37)$$

Осредненные уравнения равновесия многослойных пластин. Подставляя выражения (25)–(27) в асимптотическое разложение (14) уравнений равновесия, получаем

$$\langle\sigma^{(0)}_{iJ,J}\rangle + \kappa\langle\sigma^{(1)}_{iJ,J}\rangle + \kappa^2(\langle\sigma^{(2)}_{iJ,J}\rangle - \Delta p\delta_{i3}) + \ldots = 0. \qquad (38)$$

Домножим уравнения равновесия системы (8) на $\xi\kappa$ и проинтегрируем их по толщине, тогда получим следующее вспомогательное уравнение:

$$\kappa(\langle\xi\sigma^{(0)}_{IJ,J}\rangle - \langle\sigma^{(1)}_{I3}\rangle) + \kappa^2(\langle\xi\sigma^{(1)}_{IJ,J}\rangle - \langle\sigma^{(2)}_{I3}\rangle) + \ldots = 0. \qquad (39)$$

Здесь учтено, что $\langle\xi\sigma^{(1)}_{i3/3}\rangle = -\langle\sigma^{(1)}_{i3}\rangle$, $\langle\xi\sigma^{(2)}_{i3/3}\rangle = -\langle\sigma^{(2)}_{i3}\rangle$.

Введем обозначения для усилий T_{IJ}, моментов M_{IJ} и перерезывающих сил Q_I в пластине

$$T_{IJ} = \langle\sigma^{(0)}_{IJ}\rangle + \kappa\langle\sigma^{(1)}_{IJ}\rangle + \ldots;$$
$$Q_I = \kappa\langle\sigma^{(1)}_{I3}\rangle + \kappa^2\langle\sigma^{(2)}_{I3}\rangle + \ldots; \qquad (40)$$
$$M_{IJ} = \kappa\langle\xi\sigma^{(0)}_{IJ}\rangle + \kappa^2\langle\xi\sigma^{(1)}_{IJ}\rangle + \ldots\ .$$

Тогда уравнения (38), (39) можно записать в традиционном виде уравнений равновесия и уравнений моментов

$$T_{IJ,J} = 0, \quad Q_{J,J} = \Delta\bar{p}, \quad M_{IJ,J} - Q_I = 0. \tag{41}$$

Это и есть искомые осредненные уравнения равновесия многослойной пластины, где обозначено $\Delta\bar{p} = \kappa^2 \Delta p$.

Осредненные определяющие соотношения. Подставляя выражения (20), (22) для напряжений $\sigma_{IJ}^{(0)}$, $\sigma_{IJ}^{(1)}$ в формулы (40), получим

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL}\eta_{KL} + K_{IJKLM}\varepsilon_{KL,M}^{(0)}; \tag{42}$$

$$M_{IJ} = B_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL}\eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM}\varepsilon_{KL,M}^{(0)}; \tag{43}$$

$$Q_I = K_{IJKL}\varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \kappa^2\langle\sigma_{I3}^{(2)}\rangle, \tag{44}$$

где для тензоров осредненных упругих констант пластины введены обозначения:

$$\begin{gathered}\bar{C}_{IJKL} = \langle C_{IJKL}^{(0)}\rangle = \langle C_{IJKL}\rangle - \langle C_{IJk3}C_{k3i3}^{-1}C_{i3KL}\rangle, \\ B_{IJKL} = \kappa\langle\xi C_{IJKL}^{(0)}\rangle, \quad K_{IJKLM} = \kappa\langle\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)}\rangle, \\ K_{IJKL} = \kappa\left\langle \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)}\rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi \right\rangle, \\ \bar{D}_{IJKL} = \kappa^2\langle\xi^2 C_{IJKL}^{(0)}\rangle, \quad \bar{K}_{IJKLM} = \kappa^2\left\langle\xi\tilde{N}_{IJKLM}^{(0)}\right\rangle.\end{gathered} \tag{45}$$

В частном случае, когда слои пластины расположены симметрично относительно плоскости $\xi = 0$, часть тензоров (45) являются нулевыми:

$$B_{IJKL} = 0, \quad K_{IJKLM} = 0 \tag{46}$$

и определяющие соотношения (42)–(44) принимают такой же вид, как и в классической теории пластин Кирхгофа–Лява и Тимошенко:

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)}, \quad M_{IJ} = D_{IJKL}\eta_{KL}. \tag{47}$$

Осредненные кинематические соотношения. В систему осредненных определяющих соотношений (42)–(44) входят деформации срединной поверхности $\varepsilon_{KL}^{(0)}$, кривизны η_{KL} и градиенты деформаций $\varepsilon_{KL,N}^{(0)}$, которые зависят от функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$ глобальных переменных x_I:

$$\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \quad \eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)}. \tag{48}$$

Осредненная система уравнений для пластин. Подставляя далее выражения (42)–(44) и (48) в систему (41), получаем систему относительно неизвестных функций $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$:

$$\begin{aligned} &\bar{C}_{IJKL}u^{(0)}_{K,LJ} + B_{IJKL}u^{(0)}_{3,KLJ} + K_{IJKLM}u^{(0)}_{K,LMJ} = 0; \\ &B_{IJKL}u^{(0)}_{K,LJI} + D_{IJKL}u^{(0)}_{3,KLJI} + \bar{K}_{IJKLM}u^{(0)}_{K,LMJI} = \Delta\bar{p}. \end{aligned} \tag{49}$$

Эта система имеет и четвертый порядок относительно прогиба $u_3^{(0)}$, как в классической теории пластин Кирхгофа–Лява, и третий порядок производных относительно продольных перемещений $u_I^{(0)}$, чем отличается от теории Кирхгофа–Лява. Разработанная теория многослойных пластин близка по характеру распределения перемещений по толщине к теории ломаной нормали Э.И. Григолюка [1], поскольку перемещения с точностью до членов первого порядка малости имеют вид (18), (19).

Нелинейная зависимость перемещений u_k от ξ обусловлена различием модулей упругости для разных слоев пластины.

Напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения в пластине. После того как решена осредненная задача (49) и найдены функции $u_I^{(0)}$, $u_3^{(0)}$, вычисляют деформации (48), а затем напряжения $\sigma_{IJ}^{(0)}$ по формулам (20). Сдвиговые напряжения $\sigma_{I3}^{(0)}$ и поперечное напряжение $\sigma_{33}^{(0)}$, как было установлено, в пластине тождественно равны нулю. Ненулевые значения сдвиговых напряжений появляются у следующего члена асимптотического разложения — $\sigma_{I3}^{(1)}$ согласно (31). Для поперечного напряжения первое в асимптотическом ряду ненулевое значение — это значение $\sigma_{33}^{(0)}$, которое вычисляется согласно (27), (28):

$$\sigma_{33} = -\kappa^2 \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle\sigma^{(1)}_{3J,J}\rangle - \sigma^{(1)}_{3J,J})d\xi + \kappa^3\Big(-p_- - \Delta p(\xi+0,5) + \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle\sigma^{(2)}_{3J,J}\rangle - \sigma^{(2)}_{3J,J})d\xi\Big), \tag{50}$$

$$\sigma_{I3} = \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle\sigma^{(0)}_{IJ,J}\rangle - \sigma^{(0)}_{IJ,J})d\xi + \kappa \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle\sigma^{(1)}_{IJ,J}\rangle - \sigma^{(1)}_{IJ,J})d\xi. \tag{51}$$

Таким образом, разработанная теория тонких пластин позволяет найти все шесть компонент тензора напряжений.

Задача об изгибе симметричной пластины. Рассмотрим в качестве примера классическую задачу об изгибе многослойной пластины прямоугольной формы под действием равномерно распределенного давления. Слои пластины расположены симметрично относительно плоскости $\xi = 0$, поэтому имеют место соотношения (46). В этом случае $u_I^{(0)} = 0$, $\varepsilon_{KL}^{(0)} = 0$, $T_{IJ} = 0$, $\sigma_{IJ}^{(0)} = 0$, $\sigma_{I3}^{(1)} = 0$ и ненулевыми неизвестными функциями являются только $u_3^{(0)}(x)$, $M_{11}(x)$, $Q_1(x)$, где $x = x_1$ — безразмерная продольная координата пластины. Тождественно ненулевые уравнения равновесия (41), определяющие соотношения (43) и кинематические соотношения (48) принимают вид

$$M_{11,11} = \Delta\bar{p}, \quad M_{11} = D_{1111}\eta_{11}, \quad \eta_{11} = -u_{3,11}^{(0)}. \tag{52}$$

Напряжения первого и второго приближений согласно (37) и (29) в данной задаче имеют вид

$$\begin{gathered} \sigma_{IJ}^{(1)} = -\xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)}, \quad \sigma_{I3}^{(1)} = 0, \\ \sigma_{I3}^{(2)} = -u_{3,111}^{(0)} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi. \end{gathered} \tag{53}$$

Тогда изгибные напряжения, напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения, согласно (6), при сохранении главных членов в асимптотических разложениях вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} \sigma_{IJ} = -\kappa\xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)}, \;\; \sigma_{I3} = -\kappa^2 u_{3,111}^{(0)} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi, \\ \sigma_{33} = -\kappa^3 (p_- + \Delta p(\xi + 0{,}5) - \frac{\Delta\bar{p}}{D_{1111}} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma^{(2)} \rangle - \sigma^{(2)}) d\xi), \\ \sigma^{(2)} = \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{1111}^{(0)} \rangle - \xi C_{1111}^{(0)}) d\xi. \end{gathered} \tag{54}$$

Из этих выражений следует, что напряжения σ_{IJ} по толщине пластины распределены кусочно-линейным образом, а для однослойной пластины (для которой $C_{ijkl} =$ const) эти напряжения имеют линейное распределение по толщине, как и в классической теории пластин.

Если пластина однослойная, т.е. $C_{ijkl} =$ const, то напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения, согласно (54), вычисляются по формулам

$$\sigma_{I3} = -\frac{\kappa^2}{2} C^{(0)}_{I111} u^{(0)}_{3,111} \left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right);$$
$$\sigma_{33} = -\kappa^3 \left(p_- + \Delta p(\xi + 0{,}5) + u^{(0)}_{3,1111} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} + \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi}{4}\right)\right)\right). \qquad (55)$$

Решение уравнений (52) вместе с граничными условиями шарнирного закрепления $x = 0$ и $x = 1$: $u^{(0)}_3 = 0$, $u^{(0)}_{3,11} = 0$ — это классическое решение для прогиба пластины в теории Кирхгофа–Лява:

$$u^{(0)}_3 = -\frac{\Delta p}{24 D_{11}} x(x^3 - 2x + 1), \quad D_{11} = \langle \xi^2 C^{(0)}_{1111} \rangle, \qquad (56)$$

а напряжения (54) принимают вид

$$\sigma_{IJ} = \frac{C^{(0)}_{IJ11} \Delta\tilde{p}}{24 \kappa^2 D_{11}} x(x - 1);$$
$$\sigma_{I3} = \frac{\Delta\tilde{p}}{\kappa D_{11}} (x - 1/2) \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C^{(0)}_{I111} \rangle - \xi C^{(0)}_{I111}) d\xi;$$
$$\sigma_{33} = -(\tilde{p}_- + \Delta\tilde{p}(\xi + 0{,}5) - \frac{\Delta\tilde{p}}{D_{11}} \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma^{(2)} \rangle - \sigma^{(2)}) d\xi); \qquad (57)$$
$$\sigma^{(2)} = \int\limits_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C^{(0)}_{1111} \rangle - \xi C^{(0)}_{1111}) d\xi.$$

Здесь учтено, что $\dfrac{\kappa \Delta\bar{p}}{\bar{D}_{11111}} = \dfrac{\Delta\tilde{p}}{\kappa D_{11}}$.

Для однослойной пластины из (57) получаем

$$\sigma_{13} = \frac{6 \Delta\tilde{p}}{\kappa} \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right). \qquad (58)$$

Отсюда следует, что максимальное значение касательного напряжения $\max \sigma_{13} = \dfrac{3\Delta\tilde{p}}{4\kappa}$ такое же, как и в классической теории Кирхгофа–Лява. Однако, для многослойной пластины формулы для напряжений (57) отличаются от выражений, получаемых из теории Кирхгофа–Лява с единой деформируемой нормалью, а также от выражений, получаемых с помощью модели Григолюка–Куликова с ломаной линией.

Выводы. 1. Разработана теория тонких многослойных анизотропных пластин, которая построена из уравнений общей трехмерной теории упругости путем введения асимптотических разложений по малому параметру, без принятия каких-либо гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине.

2. Сформулированы рекуррентные последовательности локальных задач и получены их решения в явном виде. Показано, что осредненная задача теории пластин в разработанной теории получается близкой к теории пластин Кирхгофа–Лява, но отличается от нее наличием третьего порядка производных от продольных перемещений пластины. Слагаемые с этими производными отличны от нуля только для пластин с несимметричным расположением слоев по толщине.

3. Предложенный метод позволяет вычислить все шесть компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига. Приведен пример решения задачи об изгибе пластины, который показал, что для случая однослойной пластины, получающиеся формулы для перемещений и напряжений в точности совпадают с соответствующим решением по теории Кирхгофа–Лява, а для многослойной пластины распределения функций по толщине существенно отличаются как от линейной, так и от кусочно-линейной зависимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов// Механика композитных материалов. – 1988. – № 4. – С. 698–704.
2. Шешенин С. В. Асимптотический анализ периодических в плане пластин // Изв. РАН. МТТ. – 2006. – № 6. – С. 71–79.
3. Шешенин С. В., Ходос О. А. Эффективные жесткости гофрированной пластины // Вычислительная механика сплошной среды. – 2011. – Т. 4. № 2. – С. 128–139.
4. Зверяев Е. М., Макаров Г. И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. – 2008. – Т. 72, вып. 2. – С. 308–321.
5. Зверяев Е. М. Анализ гипотез, используемых при построении теории балок и плит // ПММ. – 2003. – Т. 67, вып. 3. – С. 472–483.
6. Kohn R. V., Vogelius M. A new model of thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids and Struct. – 1984. – V. 20, № 4. – P. 333–350.
7. Панасенко Г. П., Резцов М. В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // Докл. АН СССР. – 1987. – Т. 294. – № 5. – С. 1061–1065.
8. Levinski T., Telega J. J. Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. – Singapore; London: World Sci. Publ., 2000. – 739 p.
9. Kolpakov A. G. Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. – Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, 2004. – 228 p.
10. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
11. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984.
12. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984.
13. Димитриенко Ю. И., Кашкаров А. В. Конечно-элементный метод для вычисления эффективных характеристик пространственно-армированных композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2002. – № 2.

14. Д и м и т р и е н к о Ю. И., С о к о л о в А. П. Разработка системы автоматизированного вычисления эффективных упругих характеристик композитов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2008. – № 2. – С. 57–67.
15. Д и м и т р и е н к о Ю. И., С о к о л о в А. П. Об упругих свойствах композиционных материалов // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21. – № 4. – С. 96–110.
16. Д и м и т р и е н к о Ю. И., С о к о л о в А. П. Автоматизация прогнозирования свойств композиционных материалов на основе метода асимптотического осреднения // Информационные технологии. – 2008. – № 8. – С. 31–38.
17. Д и м и т р и е н к о Ю. И., С о к о л о в А. П. Современный численный анализ механических свойств композиционных материалов // Изв. РАН. Физическая серия. – 2011. – Т. 75, № 11. – С. 1551–1556.
18. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 367 с.
19. J o n e s R. M. Mechanics of composite materials. – Philadelphia; L.: Taylor&Francis, 1998. – 519 p.

Статья поступила в редакцию 9.04.2012