

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОПРЯЖЕННОМ ТЕПЛООБМЕНЕ МЕЖДУ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ И АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСОЙ

В.Ф. Формалев

formalev38@yandex.ru

С.А. Колесник

sergey@oviont.com

Б.А. Гарибян

bagarib@yandex.ru

МАИ, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Сформулирована задача о сопряженном (совместном) теплопереносе между теплогазодинамическим пограничным слоем и анизотропной полосой в условиях аэродинамического нагрева летательных аппаратов. При допущении о несжимаемом течении, имеющем место в ударном слое за прямой частью ударной волны, получено новое аналитическое решение для компонентов вектора скорости, распределения температуры и тепловых потоков в пограничном слое. Полученные тепловые потоки на границе сопряжения между газом и телом включены в качестве граничных условий в задачу анизотропной теплопроводности в теле. Приведено аналитическое решение второй начально-краевой задачи теплопроводности в анизотропной полосе с произвольными граничными условиями на границах, причем на границе сопряжения использованы тепловые потоки, полученные при решении задачи теплового пограничного слоя. Аналитическое решение сопряженной задачи теплообмена между пограничным слоем и анизотропным телом можно эффективно использовать для регулировки (например, уменьшения) тепловых потоков от газа к телу, если материал полосы выбрать таким, что продольный компонент тензора теплопроводности во много раз превышает поперечный компонент тензора теплопроводности. Такая регулировка возможна за счет повышения температуры тела в продольном направлении, а, следовательно, уменьшения теплового потока от газа к телу, а также за счет благоприятного из-

Ключевые слова

Газодинамика, пограничный слой, вязкость, теплопроводность, тепловые потоки, температура, компоненты тензора теплопроводности, анизотропия, сопряженная задача, граница сопряжения

менения физических характеристик газа. Получены Поступила 22.12.2019
и проанализированы результаты численных экспе- Принята 28.01.2020
риментов © Автор(ы), 2020

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ
(проект РФФИ № 18-01-00446, № 18-01-00444А)*

Введение. При решении задач сопряженного теплопереноса между вязкими пристенными течениями и обтекаемыми телами в условиях аэродинамического нагрева летательных аппаратов (ЛА) приходится преодолевать значительные трудности. Эти трудности связаны, прежде всего, с определением граничных условий на границе сопряжения газ–твердое тело [1–6], поскольку в сопряженных средах решаются задачи, имеющие разную физическую природу и описываемые различными уравнениями в частных производных. Проблема усложняется, если обтекаемое тело обладает анизотропией свойств теплопереноса, так как уравнения анизотропной теплопроводности содержат смешанные производные, для аналитического решения которых можно использовать только методы интегральных преобразований и только для областей, у которых хотя бы одна из границ устремлена в бесконечность [7–12].

Система уравнений газодинамического пограничного слоя существенно нелинейна, поэтому для ее решения применяют в основном численные методы [6]. Однако при упрощающих предположениях, в частности о несжимаемости течения в ударном слое на затупленных телах, можно получить приближенно-аналитическое решение для определения тепловых потоков к телу, которые в качестве граничных условий используются в задаче теплопроводности [13, 14].

Получено приближенно-аналитическое решение системы уравнений теплового пограничного слоя в целях определения тепловых потоков к телу, которые используются затем в качестве граничных условий для аналитического решения задачи теплопроводности в анизотропной полосе. В результате решены сопряженная задача теплообмена в пограничном слое и задача теплопроводности в анизотропной полосе, причем в качестве граничных условий использована непрерывность тепловых потоков и температуры на границе сопряжения газ–твердое тело.

Неизвестным параметром сопряжения является температура границы газ–твердое тело, через который определяются все газодинамические функции, а также распределения температуры в анизотропной полосе. Указанная температура определяется из условия непрерывности тепловых потоков на границе сопряжения.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о сопряженном теплообмене при обтекании окрестности критической точки затупленной анизотропной полосы (рис. 1). По характеристикам набегающего потока (скорости V_H , высоте H , числу Маха M_H) необходимо определить теплогазодинамические характеристики несжимаемого пограничного слоя и тепловые потоки к телу. Используя указанные характеристики в качестве граничных условий на границе сопряжения газ–твердое тело, требуется решить задачу теплопроводности в анизотропной полосе.

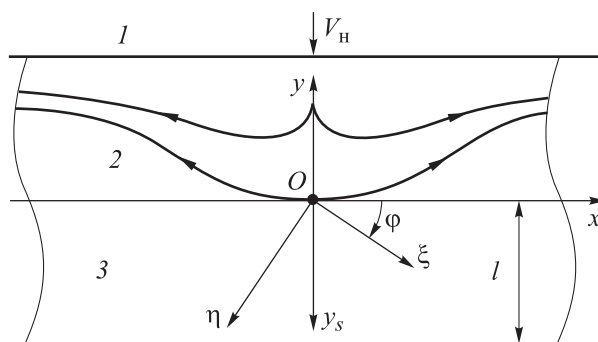


Рис. 1. Расчетная схема:

1 — ударная волна; 2 — пограничный слой; 3 — анизотропная полоса;
O — критическая точка

Начало O системы координат Oxy находится на границе газ–твердое тело, причем ось Ox направлена вдоль этой границы, ось Oy — внутрь пограничного слоя, ось Oy_s — внутрь анизотропной полосы толщиной l , $O\xi$, $O\eta$ — главные оси тензора теплопроводности, ориентированные относительно оси Ox углом φ .

Основным является предположение о квазистационарности (стационарности в каждый момент времени) пограничного слоя, а теплопроводность в анизотропной полосе полагается нестационарной. Кроме того, течение симметрично относительно оси Oy , а теплопроводности в полосе нет.

Система уравнений динамического и теплового пограничных слоев относительно компонентов $u(x, y)$, $v(x, y)$ вектора скорости, температуры $T(x, y)$, плотности $\rho(x, y)$, давления $p(x)$ имеет вид [3, 6, 10]:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad 0 < y < \delta(x), \quad |x| < \infty; \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < y < \delta(x), \quad |x| < \infty; \quad (2)$$

$$0 = -\frac{dp}{dy}; \quad p = p_e(x), \quad \frac{dp_e}{dx} = -\rho_e u_e \frac{du_e}{dx}, \quad y = \delta(x), \quad |x| < \infty; \quad (3)$$

$$\rho u \frac{\partial I}{\partial x} + \rho v \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu(T)}{\text{Pr}} \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\mu(T)}{2} \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial u^2}{\partial y} \right], \quad (4)$$

$$0 < y < \delta(x), \quad |x| < \infty;$$

$$p = \rho RT, \quad 0 < y < \delta(x), \quad |x| < \infty. \quad (5)$$

При $y = 0$:

$$u(x, 0) = 0; \quad v(x, 0) = 0; \quad T(x, 0) = T_w(x);$$

$$\rho(x, 0) = \rho_w = \frac{p_e(x)}{RT_w(x)}. \quad (6)$$

При $y = \delta(x)$:

$$u(x, \delta(x)) = u_e(x); \quad v(x, \delta(x)) = v_e(x);$$

$$T(x, \delta(x)) = T_e(x); \quad \rho(x, \delta(x)) = \rho_e(x). \quad (7)$$

При $x = 0$:

$$u(0, y) = 0; \quad p(0, 0) = p_0; \quad (8)$$

$$dp_e / dx = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (9)$$

Здесь p_0 — давление торможения; Pr — число Прандтля, $\text{Pr} = \mu c_p / \lambda$; I — энтальпия газа, $I = C_p T_n + u^2 / 2$. Индекс «w» обозначает границу газ-твердое тело $y = 0$, «e» — границу пограничного слоя.

Задача теплопроводности в анизотропной полосе по определению функции $T(x, y, t)$ рассматривается с граничными условиями второго рода, причем на границе $y_s = 0$ тепловой поток $q_w = -\lambda \partial T / \partial y|_{y=0}$ подводится от пограничного слоя:

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y_s = 0, \quad t > 0; \quad (10)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \left(\lambda_{11} \frac{\partial T(x, y_s, t)}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T(x, y_s, t)}{\partial y} \right) \Big|_{y_s=0}, \quad (11)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad y = y_s = 0, \quad t > 0;$$

$$T(x, y) \Big|_{y=0} = T(x, y_s, t) \Big|_{y_s=0} = T_w(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = y_s = 0, \quad t > 0; \quad (12)$$

$$\left(\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y_s=l} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y_s = l, \quad t > 0; \quad (13)$$

$$T(x, y_s, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y_s < l, \quad t = 0; \quad (14)$$

$$T(\pm\infty, y_s, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\pm\infty, y_s, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T(\pm\infty, y_s, t)}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y_s < l, \quad t > 0.$$

Полагаем газ совершенным, уравнение состояния газа удовлетворяет уравнению Клапейрона — Менделеева (5), толщины динамического ($\delta(x)$) и теплового ($\delta_T(x)$) пограничных слоев равными (число $Pr = 1$), вязкость и теплопроводность газа определяем по формуле Сезерленда [15].

Метод решения. Выразим производную $\partial u / \partial x$ в левой части уравнения сохранения импульса (2) из уравнения неразрывности (1) для несжимаемого газа ($\rho = \text{const}$), получим уравнение

$$-\rho \frac{\partial(uv)}{\partial y} + 2\rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Проинтегрировав это уравнение дважды по переменной y при сделанных предположениях, а также полагая $\mu(T) \approx \mu(T_w) = \text{const}$, приходим к выражению (индекс «ср» обозначает усреднение по толщине пограничного слоя):

$$-(\rho uv)_{\text{ср}} y + 2(\rho v u)_{\text{ср}} y = -\frac{dp_e}{dx} \frac{y^2}{2} + \mu_w u + C_1(x) y + C_2(x), \quad (16)$$

в котором $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из краевых условий.

При $y = 0$: $u(x, 0) = 0$ $C_2(x) = 0$. При $y = \delta_e$: $u(x, \delta) = u_e(x)$,

$$C_1(x) = (\rho uv)_{\text{ср}} + \frac{dp_e}{dx} \frac{\delta}{2} - \mu_w \frac{u_e}{\delta}.$$

С учетом этих соотношений и (16) определяем продольный компонент $u(x, y)$ скорости

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu_w} \frac{dp_e}{dx} (y^2 - \delta y) + \frac{u_e}{\delta} y. \quad (17)$$

Поперечный компонент вектора скорости можно найти из уравнения неразрывности (1) для несжимаемого течения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (18)$$

с граничным условием

$$v(x, 0) = 0. \quad (19)$$

Подставив в (18) распределение продольной скорости (17) и проинтегрировав полученное выражение по переменной y с учетом условия (19), запишем

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\mu_w} \frac{d^2 p_e}{dx^2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{\delta}{2} y^2 \right) - \frac{du_e}{dx} \frac{y^2}{2\delta}.$$

Здесь производная du_e/dx определяется из уравнения Бернулли в форме (3) и в форме $p_e + \rho_e u_e^2/2 = p_0$:

$$\frac{du_e}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{2\rho_e(p_0 - p_e)}} \frac{dp_e}{dx} \quad (20)$$

так, что

$$v(x, y) = -\frac{1}{2\mu_w} \frac{d^2 p_e}{dx^2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{\delta}{2} y^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_e(p_0 - p_e)}} \frac{dp_e}{dx} \frac{y^2}{2\delta}. \quad (21)$$

Для уточнения продольного $u(x, y)$ и поперечного $v(x, y)$ компонентов вектора скорости выражения (17), выражение (21) можно подставить в левую часть уравнения (2) и в производную $\partial u/\partial x$ уравнения (1).

При сделанных предположениях проинтегрируем уравнение сохранения энергии (4) по переменной y , полагая, что производная $\partial I/\partial x$ слабо зависит от переменной y , получаем

$$(\rho u)_{\text{ср}} \frac{\partial I}{\partial x} y + (\rho v)_{\text{ср}} I = \frac{\mu_w}{\text{Pr}} \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\mu_w}{2} \left(1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial u^2}{\partial y} + D_1(x).$$

Полученное выражение проинтегрируем еще один раз по переменной y :

$$(\rho u)_{\text{ср}} \frac{\partial I}{\partial x} \frac{y^2}{2} + (\rho v)_{\text{ср}} \int_0^y I dy = \frac{\mu_w}{\text{Pr}} I + \frac{\mu_w}{2} k u^2 + D_1(x) y + D_2(x), \quad (22)$$

где $k = 1 - 1/\text{Pr} \approx -0,4$ (при $\text{Pr} = 0,71$).

При $y = 0$:

$$u = 0, \quad I(x, 0) = I_w(x), \quad D_2(x) = -\frac{\mu_w}{\text{Pr}} I_w.$$

При $y = \delta$:

$$u = u_e, \quad I = I_e,$$

$$D_1(x) = -\frac{\mu_w}{\text{Pr}} \frac{I_e - I_w}{\delta} - \frac{\mu_w \cdot 0,4}{2} \frac{u_e^2}{\delta} + \frac{(\rho u)_{\text{cp}}}{\delta} \frac{\partial I_e}{\partial x} \frac{\delta}{2} + \frac{(\rho v)_{\text{cp}}}{\delta} \int_0^{\delta} I dy.$$

Подставляя $D_1(x)$, $D_2(x)$ в (22), получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_w}{\text{Pr}} (I - I_w) + \frac{\mu_w}{\text{Pr}} \frac{I_e - I_w}{\delta} y - 0,2\mu_w \left(\frac{u_e^2}{\delta} y - u^2 \right) = \\ & = (\rho u)_{\text{cp}} \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial I_e}{\partial x} \frac{\delta^2}{2} y - \frac{\partial I}{\partial x} \frac{y^2}{2} \right) + (\rho v)_{\text{cp}} \left(\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} I dy - \int_0^y I dy \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Оценим в (23) члены, стоящие в правой части относительно толщины пограничного слоя δ , для чего вычислим $(\rho u)_{\text{cp}}$ и $(\rho v)_{\text{cp}}$, используя выражения (17) и (21):

$$\begin{aligned} (\rho u)_{\text{cp}} &= \rho_{\text{cp}} \frac{1}{\delta_e} \int_0^{\delta} u(y) dy = -\frac{\rho_{\text{cp}} \delta^2}{12\mu_w} \frac{dp_e}{dx} + \frac{\rho_{\text{cp}} u_e}{2}; \\ (\rho v)_{\text{cp}} &= \rho_{\text{cp}} \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} v(y) dy = \\ &= \frac{\rho_{\text{cp}}}{\delta} \left[-\frac{1}{2\mu_w} \frac{d^2 p_e}{dx^2} \left(-\frac{\delta^4}{12} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_e(p_0 - p_e)}} \frac{dp_e}{dx} \frac{\delta^2}{6} \right] \approx \rho_{\text{cp}} \frac{dp_e}{dx} \frac{\delta}{6}. \end{aligned}$$

Тогда в (23)

$$\begin{aligned} (\rho u)_{\text{cp}} \left[\frac{1}{\delta} \frac{\partial I_e}{\partial x} \frac{\delta^2}{2} y - \frac{\partial I}{\partial x} \frac{y^2}{2} \right]_{\text{cp}} &= O(\delta^2); \\ (\rho v)_{\text{cp}} \left[\frac{y}{\delta} \int_0^{\delta} I dy - \int_0^y I dy \right] &= \frac{\rho_{\text{cp}} \delta}{6} \frac{dp_e}{dx} \left[\frac{y}{\delta} I_{\text{cp}} \delta - I_{\text{cp}} y \right] = O(\delta^2). \end{aligned}$$

Таким образом, члены в правой части (23) имеют порядок квадрата толщины пограничного слоя, и в первом приближении ими можно пренебречь, т. е.

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_w}{\text{Pr}} (I(x, y) - I_w(x)) - \frac{\mu_w}{\text{Pr}} \frac{I_e(x) - I_w(x)}{\delta} y + \\ & + 0,2\mu_w \left[\frac{u_e^2(x)}{\delta} y - u^2(x, y) \right] = 0, \end{aligned}$$

отсюда

$$I(x, y) = I_w(x) + \frac{I_e(x) - I_w(x)}{\delta(x)} y - 0,2 \text{Pr} \left[\frac{u_e^2(x)}{\delta(x)} y - u^2(x, y) \right]. \quad (24)$$

Продифференцировав (24) по переменной y , затем приняв $y = 0$ ($u(x, y) = 0$) и умножив полученное выражение на теплопроводность газа при температуре стенки λ_w , получим

$$q_w(x) = \lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w = \lambda_w \frac{T_e(x) - T_w(x)}{\delta} - 0,2\mu_w \frac{u_e^2(x)}{\delta}.$$

Поскольку $u_e^2(x) = \frac{2}{\rho_e}(p_0 - p_e(x))$, то

$$\begin{aligned} q_w(x) &= -\lambda_w \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w = \lambda_w \frac{T_w(x) - T_e(x)}{\delta(x)} + \frac{0,4\mu_w}{\rho_e(x)\delta(x)}(p_0 - p_e(x)) = \\ &= T_w(x) \left(\frac{\lambda_w}{\delta(x)} \right) + \left(\frac{0,4\mu_w}{\rho_e(x)\delta(x)}(p_0 - p_e(x)) - \frac{\lambda_w T_e(x)}{\delta(x)} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Для решения сопряженных задач необходимо тепловые потоки в форме (25) подставить в аналитическое решение задачи анизотропной теплопроводности (10)–(15).

Решение второй начально-краевой задачи теплопроводности в анизотропной полосе впервые получено авторами настоящей работы методом функции Грина и приведено в [15]. В связи с этим здесь оно приводится без вывода. При нулевом тепловом потоке на внутренней границе полосы $y_s = l$ ($q_2 = 0$) это решение имеет вид

$$\begin{aligned} T(x, y_s, t) &= \frac{1}{2\gamma l \lambda_{22} \sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos \left(k\pi \frac{l - y_s}{l} \right) \exp \left(-\frac{k^2 \pi^2}{\gamma l^2} (t - \tau) \right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-l_1}^{l_1} \left[\frac{q_w(\xi)}{\sqrt{\beta(t - \tau)/\gamma}} \exp \left(-\frac{(\xi + \alpha y_s - x)^2}{4\beta(t - \tau)/\gamma} \right) \right] d\xi d\tau. \right. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $q_w(x)$ — тепловой поток, определяемый выражением (25), $q_w(x) \neq 0$, а вне слоя $q_w(x) \approx 0$; l_1 — расстояние от критической точки $x = 0$; $\alpha = \lambda_{12}/\lambda_{22}$; $\beta = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2)/\lambda_{22}^2 = \lambda_\xi \lambda_\eta / \lambda_{22}^2$; $\gamma = c\rho/\lambda_{22}$.

Компоненты тензора теплопроводности анизотропной полосы определяются соотношениями [15]:

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= \lambda_{\xi} \cos^2 \varphi + \lambda_{\eta} \sin^2 \varphi; \\ \lambda_{22} &= \lambda_{\xi} \sin^2 \varphi + \lambda_{\eta} \cos^2 \varphi; \\ \lambda_{12} = \lambda_{21} &= (\lambda_{\xi} - \lambda_{\eta}) \sin \varphi \cos \varphi,\end{aligned}$$

где λ_{ξ} , λ_{η} — главные компоненты тензора теплопроводности, действующие в направлении главных осей $O\xi$, $O\eta$, ориентируемых относительно оси Ox углом φ (см. рис. 1).

Осталось подставить в (26) либо тепловой поток $q_w(x)$ (25), тогда получим неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно температуры $T_w(x)$, либо температуру $T_w(x)$ из (25) — в левую часть функции (26), тогда получим уравнение Фредгольма второго рода относительно теплового потока $q_w(x)$.

Подставим (25) в (26) вместо $q_w(\xi)$ и запишем

$$\begin{aligned}T(x, y_s, t) &= \\ &= \frac{1}{2\gamma l \lambda_{22} \sqrt{\pi}} \int_0^t \left\{ \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos\left(k\pi \frac{l-y_s}{y_s}\right) \exp\left(-\frac{k^2 \pi^2}{\gamma l^2} (t-\tau)\right) \right] \times \right. \\ &\quad \times \int_{-h}^h \left[\left(T_w(\xi) \frac{\lambda_w}{\delta(\xi)} + \frac{0,4\mu_w}{\rho_e(\xi)\delta(\xi)} (p_0 - p_e(\xi)) - \frac{\lambda_w T_e(\xi)}{\delta(\xi)} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \left. \times \exp\left(-\frac{(\xi + \alpha y_s - x)^2}{4\beta(t-\tau)/\gamma}\right) / \sqrt{\beta(t-\tau)/\gamma} \right] d\xi d\tau. \right. \quad (27)\end{aligned}$$

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода (27) решается итерационным методом. Это решение в замкнутой форме (одна функция) является решением сопряженной задачи (1)–(15) теплообмена между температурным газодинамическим пограничным слоем и анизотропной полосой.

Результаты численного решения. Разработанный метод решения сопряженных задач пограничного слоя и теплопроводности апробируем на простейшей задаче обтекания окрестности критической точки затупленного по радиусу $R_0 = 0,05$ м конуса (клина) с углом полураствора $\theta_0 = 10^\circ$ за прямой частью ударной волны, где скорость дозвуковая (течение несжимаемое). Скорость набегающего потока $V_H \sim 3000$ м/с ($M_H \sim 10$), теплофизические характеристики набегающего потока (ρ_H , T_H , a_H , p_H , μ_H , λ_H) приняты, согласно Международной стандартной атмосфере, для высоты $H = 12\,000$ м.

Динамическая вязкость и теплопроводность газа определялись по формуле Сезерленда [15]:

$$\frac{\mu_w}{\mu_H} = \frac{\lambda_w}{\lambda_H} = \left(\frac{T_w}{T_H} \right)^{3/2} \frac{T_H + 110}{T_w + 110}.$$

На внешней границе пограничного слоя газодинамические характеристики $T_e(x)$, $\rho_e(x)$, $u_e(x)$ рассчитываются по давлению газа $p_e(x)$, которое на затупленных по сфере конических телах определяется по интерполяционным формулам [15]:

$$p_e(\theta) = p_0(1 - 1,17 \sin^2 \theta + 0,225 \sin^6 \theta), \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \theta_0; \quad (28)$$

$$p_e(x) = p_0(A \ln(x+B) + C), \quad \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 < |x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L,$$

где $\theta = x/R_0$; $A = -0,028904$, $B = -1,238331$, $C = 0,017189$ для угла полураствора $\theta_0 = 10^\circ$; L — длина хвостовой части клина.

С использованием (28) температура $T_e(x)$ и плотность $\rho_e(x)$ определяются из соотношений

$$\frac{T_e(x)}{T_0} = \left(\frac{p_e(x)}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}}; \quad \frac{\rho_e(x)}{\rho_0} = \left(\frac{p_e(x)}{p_0} \right)^{1/k},$$

а скорость $u_e(x)$ — из уравнения Бернулли $p_e u_e \frac{du_e}{dx} = -\frac{dp_e}{dx}$,

$|x| \leq \left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) R_0 + L$ [15]:

$$u_e(x) = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0^{1/k}}{\rho_0} \left(p_0^{\frac{k-1}{k}} - (p_e(x))^{\frac{k-1}{k}} \right)}.$$

Распределение относительных (отнесенных к характеристикам торможения) газодинамических характеристик $\bar{p}_e = p_e(x)/p_0$, $\bar{T}_e = T_e(x)/T_0$, $\bar{\rho}_e = \rho_e(x)/\rho_0$ приведено на рис. 2, а, распределение скорости $u_e(x)$ на внешней границе пограничного слоя — на рис. 2, б.

Полоса толщиной $l = 0,005$ м в расчетах принималась металлической (с очень большой теплопроводностью), так что тепловой поток, вычисляемый по (25), весь идет на повышение во времени температуры полосы:

$$T_w(x, t) \frac{\lambda_w}{\delta(x)} + \frac{0,4\mu_w}{\rho_e(x)\delta(x)} (p_0 - p_B(x)) - \frac{\lambda_w T_e(x)}{\delta(x)} = (c\rho l)_s \frac{\partial T_w(x, t)}{\partial t}; \quad (29)$$

$$T_w(x, 0) = T_{w0},$$

где $T_{w0} = 300$ К; $c_s = 10^3$ Дж/(кг·К) — теплоемкость металла; $\rho_s = 4000$ кг/м³ — плотность металла.

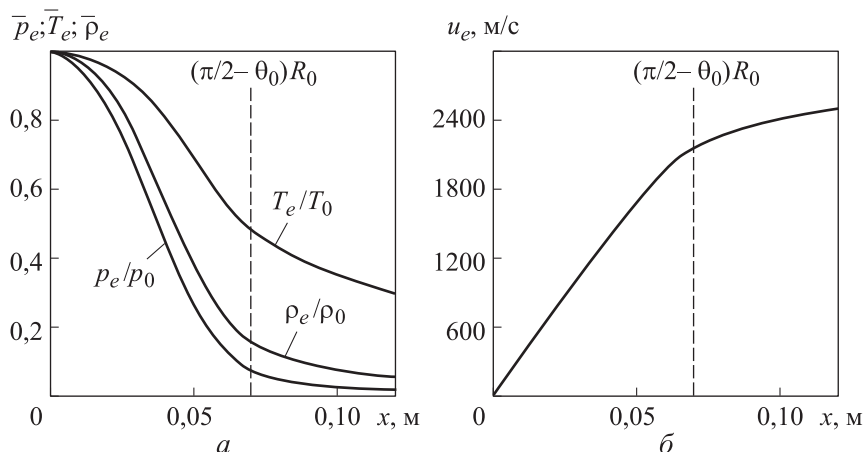


Рис. 2. Распределения относительных газодинамических характеристик (а) и скорости (б) на внешней границе пограничного слоя

Решением начальной задачи (29) является функция

$$T_w(x, t) = \left(T_{w0} + \frac{B}{A} \right) \exp\left(\frac{At}{(c\rho l)_s} \right) - \frac{B}{A}.$$

Здесь

$$A = -\frac{\lambda_w}{\delta(x)}; \quad B = \frac{0,4\mu_w}{\rho_e(x)\delta(x)} (p_0 - p_B(x)) + \frac{\lambda_w T_e(x)}{\delta(x)}.$$

Распределение теплового потока приведено на рис. 3, а, распределение температуры металлической полосы вдоль оси Ox в различные моменты времени — на рис. 3, б. В условиях квазистационарного пограничного слоя полоса нагревается в течение времени довольно интенсивно.

Заключение. Рассмотрена задача о сопряженном теплопереносе между высокотемпературным газодинамическим пограничным слоем и анизотропной полосой с тензором теплопроводности в общей форме. Для несжимаемого пограничного слоя в окрестности критической точки затупленного клина получено аналитическое решение по определению компонентов вектора скорости, плотности, температуры, тепловых потоков

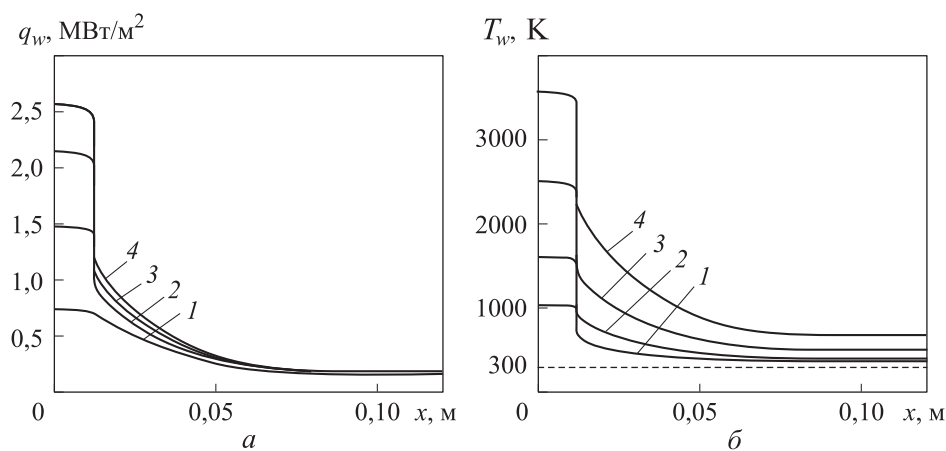


Рис. 3. Распределения теплового потока (а) и температуры (б) на границе металлической полосы в моменты времени 5 (1), 10 (2), 20 (3) и 40 с (4)

к анизотропной полосе. Получено аналитическое решение задачи для анизотропной полосы с произвольными тепловыми потоками на границах. В замкнутой форме в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода найдено решение всей комплексной проблемы сопряженного теплообмена. Численная реализация подтверждает адекватность математического моделирования и метода решения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого содержит пленочное покрытие. *Известия РАН. Энергетика*, 2015, № 3, с. 39–49.
- [2] Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропной разделительной стенки двух различных сред при локальном тепловом воздействии. *Тепловые процессы в технике*, 2018, т. 10, № 7–8, с. 345–353.
- [3] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Влияние продольной неизотермичности на сопряженный теплообмен между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами. *ТВТ*, 2009, т. 47, № 2, с. 247–252.
- [4] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Влияние компонентов тензора теплопроводности теплозащитного материала на величину тепловых потоков от газодинамического пограничного слоя. *ТВТ*, 2019, т. 57, № 1, с. 66–71.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0040364419010083>
- [5] Дорренс У.Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. М., Мир, 1966.
- [6] Формалев В.Ф., Колесник С.А. Сопряженный теплоперенос между пристенными газодинамическими течениями и анизотропными телами. *ТВТ*, 2007, т. 45, № 1, с. 85–93.

- [7] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Селин И.А. Локально-неравновесный теплоперенос в анизотропном полупространстве под действием нестационарного точечного источника тепловой энергии. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 5 (80), с. 99–111.
DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2018-5-99-111>
- [8] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Теплоперенос с поглощением в анизотропной тепловой защите высокотемпературных изделий. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 5 (86), с. 35–49.
DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49>
- [9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y. Two-sided thermal resistance estimates for heat transfer through an anisotropic solid of complex shape. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 116, pp. 833–839.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.054>
- [10] Формалев В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование теплопереноса в анизотропной полосе при задании тепловых потоков на границах. *ИФЖ*, 2016, т. 89, № 4, с. 973–982.
- [11] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Нестационарный теплоперенос в пластине с анизотропией общего вида при воздействии импульсных источников теплоты. *ТВТ*, 2017, т. 55, № 5, с. 778–783.
DOI: <https://doi.org/10.7868/S0040364417050064>
- [12] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Волновой теплоперенос в ортотропном полупространстве под действием нестационарного точечного источника тепловой энергии. *ТВТ*, 2018, т. 56, № 5, с. 756–760.
DOI: <https://doi.org/10.31857/S004036440003371-2>
- [13] Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильно-неравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности и диссипации энергии. *Теплофизика и аэромеханика*, 2017, т. 24, № 6, с. 929–935.
- [14] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Temperature-dependent anisotropic bodies thermal conductivity tensor components identification method. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 123, pp. 994–998. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.014>
- [15] Формалев В.Ф., Колесник С.А. Математическое моделирование сопряженного теплопереноса между вязкими газодинамическими течениями и анизотропными телами. М., Ленанд, 2019.

Формалев Владимир Федорович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

Колесник Сергей Александрович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

Гарибян Борис Александрович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Аналитическое решение задачи о сопряженном теплообмене между газодинамическим пограничным слоем и анизотропной полосой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2020, № 5 (92), с. 44–59. DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-5-44-59>

**ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM
OF CONJUGATE HEAT TRANSFER BETWEEN
A GASDYNAMIC BOUNDARY LAYER AND ANISOTROPIC STRIP**

V.F. Formalev

formalev38@yandex.ru

S.A. Kolesnik

sergey@oviont.com

B.A. Garibyan

bagarib@yandex.ru

**Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, Russian Federation**

Abstract

The paper focuses on the problem of conjugate heat transfer between the thermal-gas-dynamic boundary layer and the anisotropic strip in conditions of aerodynamic heating of aircraft. Under the assumption of an incompressible flow which takes place in the shock layer behind the direct part of the shock wave, we found a new analytical solution for the components of the velocity vector, temperature distribution, and heat fluxes in the boundary layer. The obtained heat fluxes at the interface between the gas and the body are included as boundary conditions in the problem of anisotropic heat conduction in the body. The study introduces an analytical solution to the second initial-boundary value problem of heat conduction in an anisotropic strip with arbitrary boundary conditions at the interfaces, with heat fluxes which are obtained by solving the problem of a thermal boundary layer used at the interface. An analytical solution to the conjugate problem of heat transfer between a boundary layer and an anisotropic body can be effectively used to control, e.g. to reduce, heat fluxes from the gas to the body if the

Keywords

Gas dynamics, boundary layer, viscosity, thermal conductivity, heat fluxes, temperature, thermal conductivity tensor components, anisotropy, conjugate problem, interface

strip material chosen is such that the longitudinal component of the thermal conductivity tensor is many times larger than the transverse component of the thermal conductivity tensor. Such adjustment is possible due to an increase in body temperature in the longitudinal direction, and, consequently, a decrease in the heat flow from the gas to the body, as well as due to a favorable change in the physical characteristics of the gas. Results of numerical experiments are obtained and analyzed

Received 22.12.2019

Accepted 28.01.2020

© Author(s), 2020

This work was supported by RFBR grants (RFBR project no. 18-01-00446, no. 18-01-00444A)

REFERENCES

- [1] Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field of the anisotropic half-space, which mobile boundary contains the film coating. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2015, no. 3, pp. 39–49 (in Russ.).
- [2] Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field of anisotropic separation wall of two different media under local thermal effect. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2018, vol. 10, no. 7-8, pp. 345–353 (in Russ.).
- [3] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. The effect of longitudinal nonisothermality on conjugate heat transfer between wall gasdynamic flows and blunt anisotropic bodies. *High Temp.*, 2009, vol. 47, no. 2, pp. 228–234.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X09020138>
- [4] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. Effect of components of the thermal conductivity tensor of heat-protection material on the value of heat fluxes from the gasdynamic boundary layer. *High Temp.*, 2019, vol. 57, no. 1, pp. 58–62.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X19010085>
- [5] Dorrance W.H. *Viscous hypersonic flow: theory of reacting and hypersonic boundary layers*. McGraw-Hill, 1962.
- [6] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Conjugate heat transfer between wall gasdynamic flows and anisotropic bodies. *High Temp.*, 2007, vol. 45, no. 1, pp. 76–84.
DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X07010105>
- [7] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Selin I.A. Local non-equilibrium heat transfer in an anisotropic half-space affected by a non-steady state point heat source. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, no. 5 (80), pp. 99–111 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2018-5-99-111>
- [8] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Heat transfer with absorption in anisotropic thermal protection of high-temperature products. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 5 (86), pp. 35–49 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49>

[9] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y. Two-sided thermal resistance estimates for heat transfer through an anisotropic solid of complex shape. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 116, pp. 833–839.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.054>

[10] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Analytical investigation of heat transfer in an anisotropic band with heat fluxes assigned at the boundaries. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2016, vol. 89, no. 4, pp. 975–984. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1460-2>

[11] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. Time-dependent heat transfer in a plate with anisotropy of general form under the action of pulsed heat sources. *High Temp.*, 2017, vol. 55, no. 5, pp. 761–766.

DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X17050066>

[12] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. Wave heat transfer in the orthotropic half-space under the action of a nonstationary point source of thermal energy. *High Temp.*, 2018, vol. 56, no. 5, pp. 727–731.

DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X18050073>

[13] Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Thermophys. Aeromech.*, 2017, vol. 24, no. 6, pp. 901–907. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0869864317060087>

[14] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Temperature-dependent anisotropic bodies thermal conductivity tensor components identification method. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 123, pp. 994–998. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.014>

[15] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Matematicheskoe modelirovanie sopryazhennogo teploperenosa mezhdu vyzkimi gazodinamicheskimi techeniyami i anizotropnymi telami [Mathematical modelling of conjugate heat transfer between viscous gas-dynamic flows and anisotropic bodies]. Moscow, Lenand Publ., 2019.

Formalev V.F. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computing Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Kolesnik S.A. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computing Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Garibyan B.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Analytical solution of the problem of conjugate heat transfer between a gasdynamic boundary layer and anisotropic strip. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2020, no. 5 (92), pp. 44–59 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-5-44-59>