

## ТЕПЛОПЕРЕНОС С ПОГЛОЩЕНИЕМ В АНИЗОТРОПНОЙ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ИЗДЕЛИЙ

В.Ф. Формалев

С.А. Колесник

Б.А. Гарибян

formalev38@yandex.ru

sergey@oviont.com

bagarib@yandex.ru

МАИ, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Исследованы нестационарный теплоперенос в анизотропной тепловой защите под действием распределенных вдоль тела нестационарных тепловых потоков, когда внутри тела имеются стоки тепловой энергии, пропорциональной температуре, за счет эндотермических физико-химических превращений. Тепловая защита выполнена из анизотропного материала (фенольно-формальдегидные стеклопластики, асбопластики, углерод-углеродные пластики и т. п.). Получено новое аналитическое решение задачи о нагреве пластины под действием распределенных вдоль тела нестационарных тепловых потоков. С использованием этого решения исследованы температурные поля при изменении компонентов и углов ориентации главных осей тензоров теплопроводности анизотропных теплозащитных материалов. Показано, что с увеличением времени температурное поле внутри пластины локализуется и не распространяется дальше предельной изотермы

### Ключевые слова

*Теплоперенос, поглощение, анизотропная тепловая защита, тензор теплопроводности, тепловые потоки, температура, теплоемкость, плотность, аналитическое решение, математическая модель, локализация*

Поступила 25.12.2018

© Автор(ы), 2019

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект РНФ № 16-19-10340)*

**Введение.** Постановка и решение задач теплопереноса в анизотропных телах связаны со значительными трудностями, возникающими, во-первых, вследствие многомерности задач по пространственным переменным, во-вторых, ввиду наличия смешанных производных в дифференциальных уравнениях и, в-третьих, вследствие присутствия всех компонентов градиента температур при задании тепловых потоков на границах анизотропных тел. Поэтому к настоящему времени аналитических решений задач

теплопереноса в анизотропных телах немного на фоне огромного числа решений для изотропных тел, например, [1–3].

К наиболее заметным за последнее время работам по теории теплопроводности в анизотропных телах являются работы [4–12], в которых, кроме прямых, решены и обратные задачи теплопроводности по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности.

В работе рассмотрено аналитическое решение задачи о теплопереносе в тепловой защите с поглощением (эндотермическими стоками), изготовленной из анизотропного материала (например, любого волокнистого композита).

Тепловая защита является одним из основных элементов конструкций гиперзвуковых летательных аппаратов, подверженных интенсивному аэрогазодинамическому нагреву. Таким образом, на обе свободные границы рассматриваемой пластины действуют распределенные по продольной переменной нестационарные тепловые потоки.

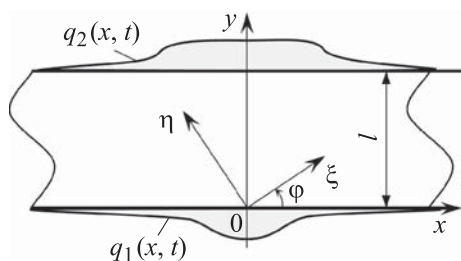
**Постановка задачи.** Для расчетной области (рис. 1), состоящей из анизотропного материала толщиной  $l$ , рассмотрим задачу теплопереноса с граничными условиями второго рода:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{xy} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + \lambda_{yx} \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - gT, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < l, \quad t > 0; \quad (1)$$

$$-\left( \lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = q_1(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (2)$$

$$\lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} = q_2(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = l, \quad t > 0; \quad (3)$$

$$T(x, y, 0) = f(x, y), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq l, \quad t = 0. \quad (4)$$



**Рис. 1.** Схема анизотропной пластины

Здесь  $c$  — теплоемкость анизотропного материала;  $\rho$  — плотность;  $T$  — температура;  $\lambda_{xx}, \lambda_{xy}, \lambda_{yx}, \lambda_{yy}$  — компоненты тензора теплопроводности анизотропного материала;  $x, y$  — пространственные переменные;  $g$  — коэффициент поглощения;  $t$  — время;  $q_1, q_2$  — плотности тепловых потоков.

Компоненты тензора теплопроводности вычисляются по формулам [6, 7]:

$$\begin{aligned}\lambda_{xx} &= \lambda_{\xi} \cos^2 \varphi + \lambda_{\eta} \sin^2 \varphi; \\ \lambda_{xy} &= \lambda_{yx} = (\lambda_{\xi} - \lambda_{\eta}) \cos \varphi \sin \varphi; \\ \lambda_{yy} &= \lambda_{\xi} \sin^2 \varphi + \lambda_{\eta} \cos^2 \varphi,\end{aligned}\quad (5)$$

где  $\lambda_{\xi}, \lambda_{\eta}$  — компоненты главного тензора теплопроводности;  $\varphi$  — угол между главной осью  $O\xi$  и осью  $Ox$  декартовой системы координат  $Oxy$ .

**Метод решения.** Для решения задачи (1)–(4) исключим источник-вый член, для чего введем подстановку

$$T(x, y, t) = \exp(-gt/(cp))\theta(x, y, t), \quad (6)$$

где  $\theta(x, y, t)$  — новая искомая функция. Подстановка (6) в задачу (1)–(4) приводит к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} &= a_{xx} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2a_{xy} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + a_{yy} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}, \\ -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < l, \quad t > 0;\end{aligned}\quad (7)$$

$$-\left(\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{\tilde{q}_1(x, t)}{\lambda_{yy}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (8)$$

$$\left(\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{\tilde{q}_2(x, t)}{\lambda_{yy}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = l, \quad t > 0; \quad (9)$$

$$\theta(x, y, 0) = f(x, y), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq l, \quad t = 0. \quad (10)$$

Здесь

$$\alpha = \lambda_{xy} / \lambda_{yy}; \quad \{a_{xx}, a_{xy}, a_{yy}\} = \{\lambda_{xx}, \lambda_{xy}, \lambda_{yy}\} / (cp);$$

$$\tilde{q}_1(x, t) = q_1(x, t) \exp\left(\frac{gt}{cp}\right); \quad \tilde{q}_2(x, t) = q_2(x, t) \exp\left(\frac{gt}{cp}\right).$$

Для решения задачи (6)–(10) используем метод функций источника (функций Грина) [1, 3], для чего в точке  $M(\zeta, \psi) \in \in(-\infty < x < \infty) \cup [0 < y < l]$  поместим тепловой источник единичной мощности в виде произведения дельта-функций Дирака  $\delta(x - \zeta)\delta(y - \psi)$ . Тогда в соответствии с общей теорией метода функций источника рас-

пределение температуры  $G(x, y, \zeta, \psi, t)$  от этого источника по всей области описывается задачей, включающей в себя однородное дифференциальное уравнение, однородные граничные условия и неоднородное начальное условие:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a_{xx} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 2a_{xy} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + a_{yy} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2},$$

$$-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < l, \quad t > 0; \quad (11)$$

$$\alpha \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \quad t > 0; \quad (12)$$

$$\alpha \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = l, \quad t > 0; \quad (13)$$

$$G(x, y, \zeta, \psi, 0) = \delta(x - \zeta) \delta(y - \psi), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq l, \quad t = 0. \quad (14)$$

Поскольку дифференциальное уравнение (11) содержит смешанные производные, классический метод разделения переменных Фурье здесь не применим. Поэтому для решения задачи в постановке (11)–(14) использован интегральный метод преобразования Фурье по переменной  $x$ :

$$G_\omega(y, \zeta, \psi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \zeta, \psi, t) \exp(-i\omega x) dx.$$

Применяя к задаче (11)–(14) это преобразование и учитывая естественные условия

$$T(\pm \infty, y, t) = 0, \quad \frac{\partial T(\pm \infty, y, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T(\pm \infty, y, t)}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

получаем задачу

$$\frac{\partial G_\omega}{\partial t} = -a_{xx} \omega^2 G_\omega + 2a_{xy} i\omega \frac{\partial G_\omega}{\partial y} + a_{yy} \frac{\partial^2 G_\omega}{\partial y^2}, \quad 0 < y < l, \quad t > 0; \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial G_\omega}{\partial y} \right|_{y=0} + i\alpha \omega G_\omega(0, \zeta, \psi, t) = 0; \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial G_\omega}{\partial y} \right|_{y=l} + i\alpha \omega G_\omega(l, \zeta, \psi, t) = 0; \quad (18)$$

$$G_\omega(y, \zeta, \psi, 0) = \exp(-i\omega \zeta) \delta(y - \psi), \quad 0 \leq y \leq l, \quad t = 0. \quad (19)$$

Условия (15) использованы при применении процедуры интегрирования по частям.

Упростим одномерную по пространственной переменной  $y$  задачу (16)–(19), исключив из нее функцию  $G_\omega(y, \zeta, \psi, t)$  и частную производную  $\partial G_\omega(y, \zeta, \psi, t) / \partial y$ , для чего выполним подстановку:

$$G_\omega(y, \zeta, \psi, t) = \exp(Ay + Bt)G_0(y, \zeta, \psi, t), \quad (20)$$

в которой коэффициенты  $A$  и  $B$  найдем из условий равенства нулю коэффициентов при функциях  $G_0(y, \zeta, \psi, t)$  и  $\frac{\partial G_0(y, \zeta, \psi, t)}{\partial y}$ . После подстановки (20) в (16) получим

$$A = -i\omega\alpha; \quad B = -\omega^2\beta / \gamma, \quad (21)$$

где

$$\alpha = \lambda_{xy} / \lambda_{yy}; \quad \beta = \frac{\lambda_{xx}\lambda_{yy} - \lambda_{xy}^2}{\lambda_{yy}^2}; \quad \gamma = \frac{c\rho}{\lambda_{yy}}.$$

Таким образом, (20) запишется в виде

$$G_\omega(y, \zeta, \psi, t) = \exp\left(-i\omega\alpha y - \frac{\omega^2\beta}{\gamma}t\right)G_0(y, \zeta, \psi, t). \quad (22)$$

Подставляя (20) в соотношения (16)–(19), получаем вторую начально-краевую задачу для одномерного уравнения теплопроводности относительно функции  $G_0(y, \zeta, \psi, t)$ :

$$\frac{\partial G_0(y, \zeta, \psi, t)}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 G_0(y, \zeta, \psi, t)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < l, \quad t > 0; \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial G_0}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad t > 0; \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial G_0}{\partial y} \right|_{y=l} = 0, \quad t > 0; \quad (25)$$

$$G_0(y, \zeta, \psi, 0) = \exp(-i\omega\zeta) \exp(i\omega\alpha y) \delta(y - \psi), \quad 0 \leq y \leq l, \quad t = 0. \quad (26)$$

Для решения этой задачи используем метод разделения переменных, полагая

$$G_0(y, \zeta, \psi, t) = Y(y)\Theta(t). \quad (27)$$

Подставляя (27) в систему (23)–(25), получаем краевую задачу на собственные значения  $k$  и собственные функции  $Y(y)$ :

$$Y''(y) + k^2 Y(y) = 0; \tag{28}$$

$$Y'(0) = 0; \tag{29}$$

$$Y'(l) = 0, \tag{30}$$

где  $k$  — постоянная разделения, а также уравнение (начальное условие (26) пока не использовано):

$$\Theta'(t) + \frac{k^2}{\gamma} \Theta(t) = 0. \tag{31}$$

Решением задачи (28)–(30) являются собственные функции

$$Y_n(y) = C_n \cos(k_n y), \quad n = 1, 2, \dots, \quad Y_0 = C_0, \tag{32}$$

и собственные значения

$$k_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{33}$$

Из уравнения (28) при  $Y_0 = C_0 \neq 0$  следует, что  $k_0 = 0$ .

Легко можно показать, что собственные функции (32) ортогональны на отрезке  $y \in [0; l]$ , а квадрат их нормы вычисляется как

$$\|Y_n(y)\|^2 = \int_0^l \cos^2(k_n y) dy = \frac{l}{2}.$$

Тогда

$$\int_0^l Y_n(y) Y_m(y) dy = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n; \\ \|Y_n(y)\|^2 = \frac{l}{2} & \text{при } m = n. \end{cases} \tag{34}$$

Решением уравнения (31) будут функции

$$\Theta_n(t) = B_n \exp\left(-\left(k_n^2 / \gamma\right)t\right), \quad n = 1, 2, \dots \tag{35}$$

Подставляя (32) и (35) в (27) и учитывая свойство линейности исходной задачи, получаем

$$G_0(y, \zeta, \psi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \exp\left(-\left(k_n^2 / \gamma\right)t\right) \cos(k_n y). \tag{36}$$

Здесь коэффициенты  $F_n$  найдем из условия (26):

$$G_0(y, \zeta, \psi, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(k_n y) = \exp(-i\omega(\zeta - \alpha y)) \delta(y - \psi),$$

т. е.  $F_n$  — коэффициенты, являющиеся косинус-коэффициентами функции Фурье  $\exp[-i\omega(\zeta - \alpha y)] \delta(y - \psi)$ ,

$$F_n = \frac{2}{l} \exp[-i\omega(\zeta - \alpha \psi)] \cos(k_n \psi), \quad (37)$$

подставляя которые в (36), а затем полученную функцию  $G_0(y, \zeta, \psi, t)$  — в (22), окончательно получаем трансформанту Фурье

$$G_\omega(y, \zeta, \psi, t) = \exp\left(-i\omega\alpha y - \frac{\omega^2\beta}{\gamma}t\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\|Y_n(y)\|^2} \times \right. \\ \left. \times \exp[-i\omega(\zeta - \alpha\psi)] \cos(k_n\psi) \right\} \exp\left(-\frac{k_n^2}{\gamma}t\right) \cos(k_n y). \quad (38)$$

Для нахождения функции источника  $G(x, y, \zeta, \psi, t)$  необходимо к выражению (38) применить обратное преобразование Фурье:

$$G(x, y, \zeta, \psi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2\beta}{\gamma}t\right) \exp[-i\omega(\zeta - \alpha\psi + \alpha y - x)] d\omega \times \\ \times \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(k_n\psi) \cos(k_n y) \exp\left(-\frac{k_n^2}{\gamma}t\right). \quad (39)$$

Интеграл по параметру  $\omega$  преобразования Фурье вычисляется с учетом формулы Эйлера  $\exp(iu) = \cos u + i \sin u$ , нечетности синуса, четности косинуса и экспоненты относительно  $\omega$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\omega^2\beta}{\gamma}t\right) \exp[-i\omega(\zeta - \alpha\psi + \alpha y - x)] d\omega = \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi\beta t}} \exp\left(-\frac{(\zeta - x + \alpha(y - \psi))^2}{4\beta t / \gamma}\right).$$

Подставляя его в равенство (39), находим функцию источника как решение задачи (11)–(14):

$$G(x, y, \zeta, \psi, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi\beta t}} \exp\left(-\frac{(\zeta - x + \alpha(y - \psi))^2}{4\beta t / \gamma}\right) \times$$

$$\times \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(k_n \psi) \cos(k_n y) \exp\left(-\frac{k_n^2}{\gamma} t\right), \quad (40)$$

где  $k_n$  определяется по формуле (33) и  $k_0 = 0$ .

В соответствии с общей теорией применения функций источника к задаче теплопроводности (7)–(10) в анизотропных телах, находим ее решение в виде

$$\begin{aligned} \theta(x, y, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^l G(x, y, \zeta, \psi, t) f(\zeta, \psi) d\psi + \\ & + \frac{1}{\gamma \lambda_{yy}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \zeta, 0, t - \tau) \tilde{q}_1(\zeta, \tau) d\zeta + \\ & + \frac{1}{\gamma \lambda_{yy}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \zeta, l, t - \tau) \tilde{q}_2(\zeta, \tau) d\zeta. \end{aligned} \quad (41)$$

Решением исходной задачи (1)–(4) является функция  $T(x, y, t)$ , определяемая по выражению (6):

$$\begin{aligned} T(x, y, t) = \exp(-gt/(c\rho)) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^l G(x, y, \zeta, \psi, t) f(\zeta, \psi) d\psi + \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma \lambda_{yy}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \zeta, 0, t - \tau) \tilde{q}_1(\zeta, \tau) d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma \lambda_{yy}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, \zeta, l, t - \tau) \tilde{q}_2(\zeta, \tau) d\zeta \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Функции (42) и (40) определяют решение задачи (1)–(4).

**Анализ результатов.** Результаты расчетов температурных полей по формуле (42) в анизотропной пластине шириной  $l$  приведены на рис. 2–4. Входные данные:

$$l = 0,01 \text{ м}; \lambda_{\xi} = 3,0 \text{ Вт/(м·К)}; \lambda_{\eta} = 0,1 \text{ Вт/(м·К)}; \varphi = \pi/12; \varphi = \pi/6;$$

$$c = 0,4 \text{ кДж/(кг·К)}; \rho = 2500 \text{ кг/м}^3; T(x, y, 0) = f(x, y) = 0;$$

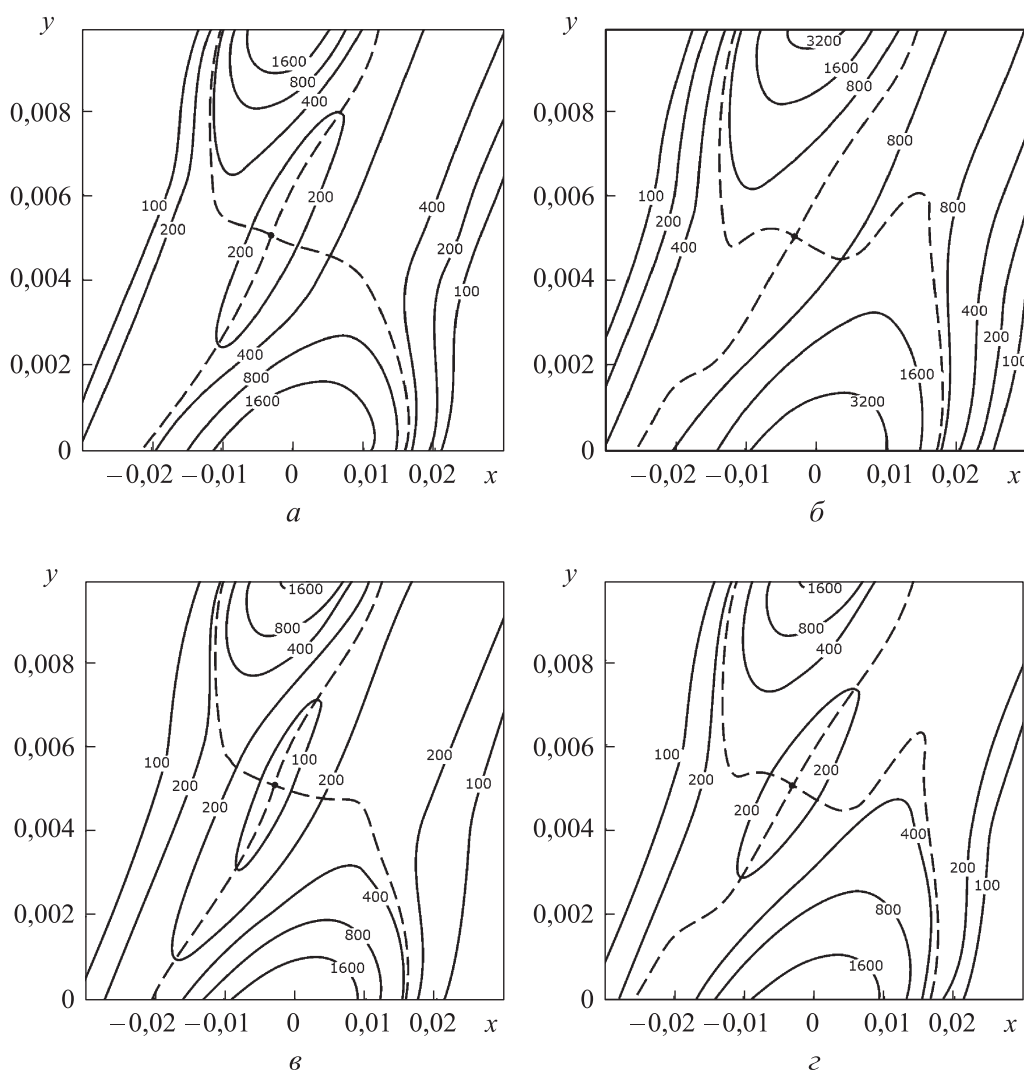
$$q_1(x, t) = A_1 \exp(-x^2/l_1^2); A_1 = 7,0 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2; l_1 = 2l/3;$$

$$q_2(x, t) = A_2 \eta(|l_2| - x), A_2 = 5,0 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2, l_2 = l/2, g = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Вт/(м}^3 \cdot \text{К)};$$

$\eta(x)$  — единичная функция.



Согласно температурным полям на рис. 2, нагрев более сориентирован в направлении главной оси тензора теплопроводности с большим коэффициентом теплопроводности, в данном случае в направлении оси  $O\xi$ . В центральной части пластины возникает область, ограниченная изотермой, имеющей форму эллипса, причем с ростом времени изотермы в форме эллипсов вырождаются в точку пересечения сепаратрис, разграничивающих распределение температур от тепловых потоков на противоположащих границах. Эта точка является седловой точкой.

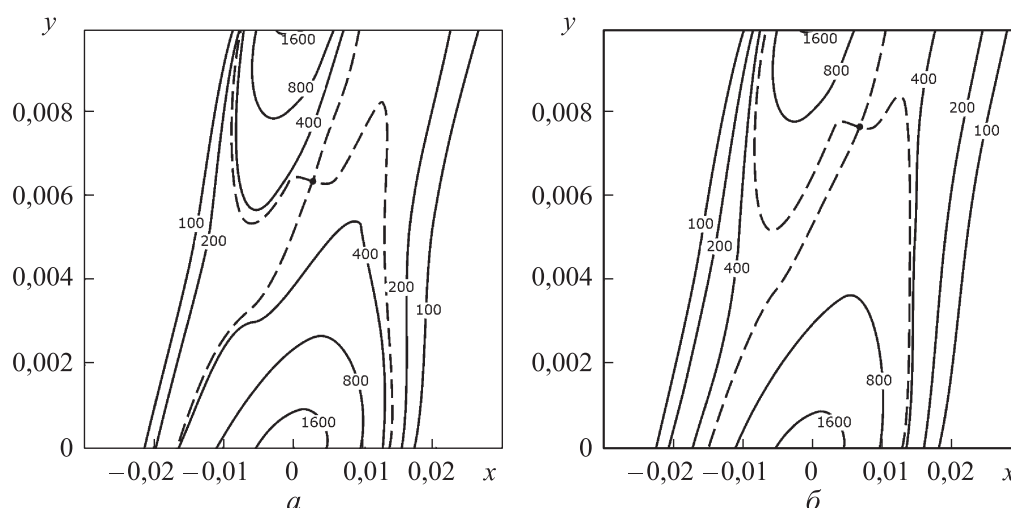


**Рис. 2.** Температурное поле в анизотропной пластине при  $\varphi = \pi/12$ :

$$a - g=0, t=5 \text{ с}; б - g=0, t=10 \text{ с}; в - g=1 \cdot 10^5 \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}), \\ t=5 \text{ с}; г - g=1 \cdot 10^5 \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}), t=10 \text{ с}$$

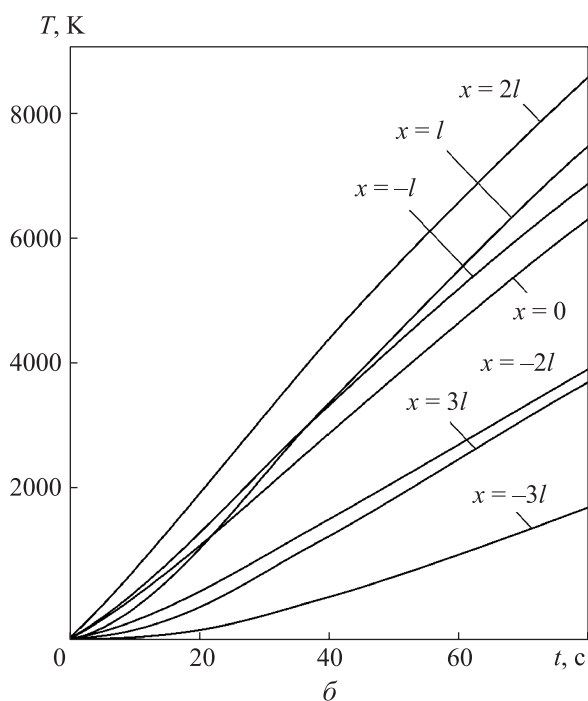
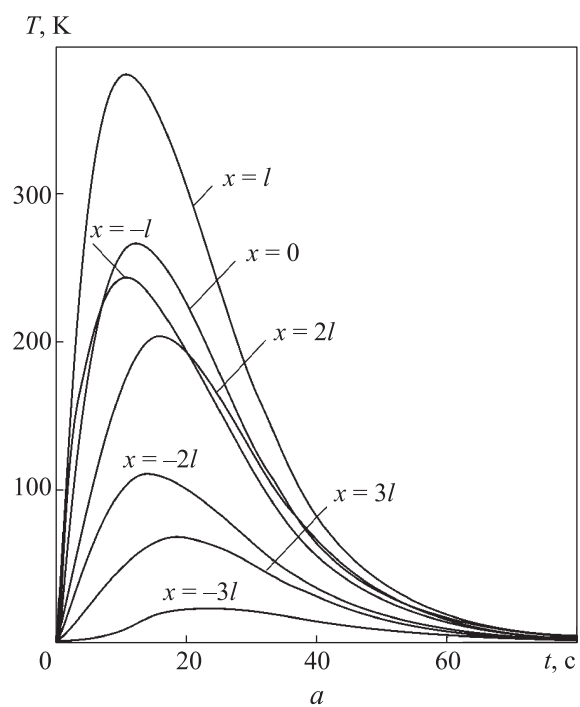
При отсутствии поглощения ( $g = 0$ , рис. 2, а, б) температурное поле не локализуется с увеличением времени ( $t = 5$  с, см. рис. 2, а и  $t = 10$  с, см. рис. 2, б). Иная картина наблюдается при  $g > 0$ . Температурные поля в случае  $g = 1 \cdot 10^5$  Вт/(м<sup>3</sup>·К), которые с увеличением времени не распространяются вдоль пространственных переменных  $x$ ,  $y$ , т. е. локализуются в окрестности центральной части пластины, приведены на рис. 2, в, г.

С увеличением угла  $\varphi$ , ориентирующего главные оси тензора теплопроводности, характер температурных полей не меняется. Температурные поля для случая  $\varphi = \pi/6$  приведены на рис. 3. При этом температурное поле стремится к распределению температуры в случае  $\varphi = \pi/2$  (ортотропный случай), при котором поле станет симметричным относительно вертикальной оси с тем же самым коэффициентом поглощения.



**Рис. 3.** Температурное поле в анизотропной пластине с поглощением  $g = 1 \cdot 10^5$  Вт/(м<sup>3</sup>·К) при  $\varphi = \pi/6$  и  $t = 5$  (а) и 10 с (б)

Для каждой конкретной точки пластины существует момент времени, при котором температура достигает максимального значения, а затем с увеличением времени она уменьшается за счет поглощения и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Это подтверждают зависимости температуры от времени (рис. 4, а) в некоторых точках срединного сечения пластины, параллельного оси  $Ox$  ( $y = l/2$ ). Для сравнения показаны температурные зависимости от времени при  $g = 0$ , которые имеют монотонный возрастающий характер (рис. 4, б).



**Рис. 4.** Зависимость температуры от времени в точках срединного сечения пластины при  $\varphi = \pi/12$  с поглощением  $g = 1 \cdot 10^5$  Вт/(м<sup>3</sup>·К) (а) и без поглощения  $g = 0$  (б)

**Заключение.** На основе метода функции источника (Грина) получено новое аналитическое решение задачи теплопроводности в анизотропной пластине в условиях теплообмена на свободных границах с учетом поглощения тепловой энергии. Анализ результатов, полученных с помощью этого решения, показал локализацию температурных полей в окрестности области, где приложены тепловые потоки. Показано, что существуют моменты времени для каждой отдельной точки расчетной области, при которых нестационарная температура достигает максимума, а затем с увеличением времени температуры в этих точках стремятся к начальному значению за счет ненулевого коэффициента поглощения.

Полученное аналитическое решение и результаты расчетов можно использовать для формирования в тепловой защите локальной области нагрева, когда все окружающее пространство остается холодным.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М., Высш. шк., 2001.
- [2] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., Высш. шк., 1967.
- [3] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
- [4] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y. Two-sided thermal resistance estimates for heat transfer through an anisotropic solid of complex shape. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 116, pp. 833–839. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.054>
- [5] Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого содержит пленочное покрытие. *Известия РАН. Энергетика*, 2015, № 3, с. 39–49.
- [6] Формалев В.Ф., Колесник С.А. Аналитическое исследование теплопереноса в анизотропной полосе при задании тепловых потоков на границах. *Инженерно-физический журнал*, 2016, т. 89, № 4, с. 973–982.
- [7] Формалев В.Ф., Колесник С.А. Об обратных коэффициентных задачах теплопроводности по восстановлению нелинейных компонентов тензора теплопроводности анизотропных тел. *Инженерно-физический журнал*, 2017, т. 90, № 6, с. 1371–1379.
- [8] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Селин И.А. Локально-неравновесный теплоперенос в анизотропном полупространстве под действием нестационарного точечного источника тепловой энергии. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 5, с. 99–111. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-5-99-111
- [9] Bulychev N.A., Kuznetsova E.L., Bodryshev V.V., et al. Nanotechnological aspects of temperature-dependent decomposition of polymer solutions. *Int. J. Nanomech. Sci. Tech.*, 2018, vol. 9, no. 2, pp. 91–97.

[10] Формалев В.Ф., Колесник С.А. Сопряженный теплоперенос между пристенными газодинамическими течениями и анизотропными телами. *ТВТ*, 2007, т. 45, № 1, с. 85–93.

[11] Формалев В.Ф., Колесник С.А. Об обратных граничных задачах теплопроводности по восстановлению тепловых потоков к анизотропным телам с нелинейными характеристиками теплопереноса. *ТВТ*, 2017, т. 55, № 4, с. 564–569.

[12] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Temperature-dependent anisotropic bodies thermal conductivity tensor components identification method. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 123, pp. 994–998. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.014>

**Формалев Владимир Федорович** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

**Колесник Сергей Александрович** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

**Гарибян Борис Александрович** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика» МАИ (Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское ш., д. 4).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Теплоперенос с поглощением в анизотропной тепловой защите высокотемпературных изделий. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 5, с. 35–49.  
DOI: 10.18698/1812-3368-2019-5-35-49

**HEAT TRANSFER WITH ABSORPTION IN ANISOTROPIC THERMAL PROTECTION OF HIGH-TEMPERATURE PRODUCTS**

V.F. Formalev

formalev38@yandex.ru

S.A. Kolesnik

sergey@oviont.com

B.A. Garibyan

bagarib@yandex.ru

**Moscow Aviation Institute (National Research University),  
Moscow, Russian Federation**

---

**Abstract**

The purpose of the research was to study the non-stationary heat transfer in anisotropic thermal protection under the action of unsteady heat flows distributed along the body, when there are thermal energy sinks inside the body, the energy being proportional to temperature, due to endothermic physical and chemical

**Keywords**

*Heat transfer, absorption, anisotropic thermal protection, thermal conductivity tensor, heat flows, temperature, heat capacity, density, analytical solution, mathematical model, localization*

transformations. Thermal protection is made of anisotropic material, such as phenol-formaldehyde fiberglass, asboplastics, carbon-carbon plastics, etc. A new analytical solution has been obtained for the problem of plate heating under the action of unsteady heat flows distributed along the body. Using this solution, we studied the temperature fields when the components and orientation angles of the main axes of the thermal conductivity tensors of anisotropic heat-shielding materials were changed. Findings of research show that with increasing time, the temperature field inside the plate is localized and does not extend further than the limiting isotherm

Received 25.12.2018

© Author(s), 2019

*The study was supported by a Russian Science Foundation (grant RSF no. 16-19-10340)*

## REFERENCES

- [1] Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in solids heat conduction theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001.
- [2] Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Heat conduction theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967.
- [3] Carslaw H.S., Jager J.C. *Conduction of heat in solids*. Oxford Univ. Press, 1959.
- [4] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y. Two-sided thermal resistance estimates for heat transfer through an anisotropic solid of complex shape. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 116, pp. 833–839. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.09.054>
- [5] Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field of the anisotropic half-space, which mobile boundary contains the film coating. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2015, no. 3, pp. 39–49 (in Russ.).
- [6] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Analytical investigation of heat transfer in an anisotropic band with heat fluxes assigned at the boundaries. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2016, vol. 89, iss. 4, pp. 975–984. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1460-2>
- [7] Formalev V.F., Kolesnik S.A. On inverse coefficient heat-conduction problems on reconstruction of nonlinear components of the thermal-conductivity tensor of anisotropic bodies. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2017, vol. 90, iss. 6, pp. 1302–1309. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-017-1687-6>
- [8] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Selin I.A. Local non-equilibrium heat transfer in an anisotropic half-space affected by a non-steady state point heat source. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2018, no. 5, pp. 99–111 (in Russ.). DOI: [10.18698/1812-3368-2018-5-99-111](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2018-5-99-111)
- [9] Bulychev N.A., Kuznetsova E.L., Bodryshev V.V., et al. Nanotechnological aspects of temperature-dependent decomposition of polymer solutions. *Int. J. Nanomech. Sci. Tech.*, 2018, vol. 9, no. 2, pp. 91–97.

[10] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Conjugate heat transfer between wall gasdynamic flows and anisotropic bodies. *High Temp.*, 2007, vol. 45, iss. 1, pp. 760–84.

DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X07010105>

[11] Formalev V.F., Kolesnik S.A. On inverse boundary heat-conduction problems for recovery of heat fluxes to anisotropic bodies with nonlinear heat-transfer characteristics. *High Temp.*, 2017, vol. 55, iss. 4, pp. 549–554.

DOI: <https://doi.org/10.1007/s10891-017-1687-6>

[12] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Temperature-dependent anisotropic bodies thermal conductivity tensor components identification method. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2018, vol. 123, pp. 994–998. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.03.014>

**Formalev V.F.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computing Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

**Kolesnik S.A.** — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Computing Mathematics and Programming, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

**Garibyan B.A.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assist. Professor, Department of Mathematical Cybernetics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Volokolamskoe shosse 4, Moscow, 125993 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Heat transfer with absorption in anisotropic thermal protection of high-temperature products. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 5, pp. 35–49 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2019-5-35-49