

## ТЕМПЕРАТУРНОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ШАРОВОГО СЛОЯ ПРИ КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

В.С. Зарубин

zarubin\_vs@mail.ru

В.В. Леонов

lv-05@mail.ru

В.С. Зарубин мл.

vszarubin@gmail.com

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Рассмотрен процесс стационарной теплопроводности в шаровом слое теплозащитного покрытия, выполненном из анизотропного материала. Внутренняя поверхность слоя принята идеально теплоизолированной, а его внешняя поверхность подвержена нагреву за счет конвективного теплообмена с окружающей средой, температура которой изменяется вдоль этой поверхности. На основе полученного решения линейной задачи теплопроводности проведена количественная оценка влияния степени анизотропии материала покрытия, его относительной толщины, интенсивности конвективного теплообмена и неравномерности распределения температуры окружающей среды на выравнивание распределения температуры в шаровом слое. Полученные результаты могут быть использованы для подбора характеристик анизотропного материала покрытия в целях снижения температуры внешней поверхности шарового слоя в зоне наиболее интенсивного нагрева

### Ключевые слова

*Конвективный теплообмен, анизотропный материал, теплозащитное покрытие, задача теплопроводности, шаровой слой*

Поступила 22.01.2019

© Автор(ы), 2019

---

*Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект РНФ №17-79-10450)*

**Введение.** Большинство материалов, применяемых для изготовления теплозащитных покрытий, неоднородно по своей структуре, в которой обычно выделяют включения и связующее (матрицу) [1, 2]. В зависимости от пространственной ориентации и формы включений такие материалы, называемые композиционными (композитами), могут обладать анизотропией не только механических характеристик, но и иметь в разных направлениях

различные значения коэффициента теплопроводности [3–6]. В общем случае характеристикой теплопроводности композита является симметричный тензор второго ранга, который в частном случае изотропного композита будет шаровым. Для анизотропного композита тензор коэффициентов теплопроводности может быть преобразован к ортогональным главным осям, в которых ему можно поставить в соответствие диагональную матрицу третьего порядка.

Анизотропия теплопроводности композита, применяемого в качестве материала теплозащитного покрытия, может быть использована для рационального перераспределения степени нагрева поверхности покрытия при интенсивном локальном тепловом воздействии на эту поверхность. Такое воздействие возникает, например, при облучении твердого тела концентрированным тепловым потоком или при гиперзвуковом обтекании летательного аппарата, когда перед затупленным участком его поверхности возникает отошедшая ударная волна, формирующая слой нагретого до высокой температуры воздуха [7, 8].

Процессы теплопроводности в анизотропном твердом теле рассмотрены во многих работах, обзор которых приведен в статье [9] и монографии [10]. Применительно к плоскому слою теплозащитного покрытия, выполненного из анизотропного материала, следует отметить исследования, в которых представлены решения как при стационарном, так и нестационарном режимах процессов теплопроводности, а также постановки и решения задач по оптимизации параметров, определяющих условия работы такого покрытия [11–14]. В нескольких работах установлено, что применение анизотропного теплозащитного материала, теплопроводность которого вдоль нагреваемой поверхности превосходит теплопроводность в направлении нормали к этой поверхности, может способствовать более равномерному распределению температуры на этой поверхности и тем самым повысить работоспособность материала покрытия в зоне наиболее интенсивного нагрева. При высокой степени анизотропии материала покрытия, определяемой отношением коэффициентов теплопроводности в продольном и поперечном направлениях, и некоторых режимах обтекания покрытия высокотемпературным потоком расчетным путем прогнозируется инверсия теплового потока на поверхности теплообмена [15–17].

Следует ожидать, что проявление аналогичного эффекта возможно и в случае обтекания анизотропного теплозащитного покрытия на осесимметричном теле с затуплением в виде фрагмента сферической поверхности. При фиксированной интенсивности теплообмена и неравномерном

распределении температуры окружающей среды увеличение степени анизотропии материала покрытия должно привести к снижению температуры этой поверхности в зоне наибольшей интенсивности нагрева и, наоборот, некоторому повышению температуры на остальной части поверхности. В настоящей работе в целях количественной оценки предполагаемого эффекта применительно к сферическому затуплению приведена постановка и получено аналитическое решение осесимметричной стационарной задачи теплопроводности в анизотропном шаровом слое теплозащитного покрытия при произвольной степени неравномерности распределения температуры окружающей среды.

**Постановка задачи.** Рассмотрим шаровой слой из анизотропного материала с коэффициентами теплопроводности  $\lambda_r = \text{const}$  в направлении радиальной координаты  $r$  и  $\lambda_\theta = \text{const}$  в любом из тангенциальных направлений. На внешней поверхности слоя радиусом  $r_1$  заданы коэффициент конвективного теплообмена  $\alpha = \text{const}$  и зависящая от угловой координаты  $\theta$  (полярного угла) температура  $T^*(\theta)$  окружающей среды. Внутреннюю поверхность слоя радиусом  $r_0$  примем идеально теплоизолированной.

Установившееся распределение температуры в шаровом слое описывает искомая функция  $T(r, \theta)$ , удовлетворяющая дифференциальному уравнению в сферической системе координат:

$$\lambda_r \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{\lambda_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial \theta} \right) = 0, \quad r \in (r_0, r_1), \quad \theta \in (0, \pi). \quad (1)$$

Решение уравнения (1) должно удовлетворять граничным условиям

$$\left. \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad \left. \lambda_r \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \alpha (T^*(\theta) - T(r, \theta)), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi} = 0. \quad (3)$$

Зависимость температуры окружающей среды от полярного угла примем в виде  $T^*(\theta) = T_0^*(1 + \beta f(\theta))$ , где  $T_0^* = \text{const} > 0$ ,  $\beta = \text{const} > 0$ ,  $f(\theta)$  — безразмерная функция угловой координаты  $\theta \in [0, \pi]$ . В целях сокращения числа определяющих параметров введем безразмерные величины  $\rho = r / r_1$ ,  $\rho_0 = r_0 / r_1$ ,  $\Lambda = \lambda_\theta / \lambda_r$ ,  $\Psi_*(\rho, \theta) = T(r, \theta) / T_0^*$  и число Био  $Bi = \alpha r_1 / \lambda_r$ . Тогда вместо соотношений (1)–(3) запишем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial \Psi_*(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right) + \frac{\Lambda}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi_*(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right) = 0, \quad \rho \in (\rho_0, 1), \quad \theta \in (0, \pi) \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial \Psi_*(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_*(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \text{Bi} (1 + f(\theta) - \Psi(\rho, \theta)), \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_*(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial \Psi_*(\rho, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi} = 0. \quad (6)$$

В силу линейной формулировки задачи (4)–(6) для ее решения удобно использовать метод редукции.

**Решение задачи.** Выбранный вариант зависимости температуры окружающей среды от угловой координаты позволяет в искомой функции, описывающей распределение безразмерной температуры в анизотропном шаровом слое, выделить равную единице постоянную составляющую, записав  $\Psi_*(\rho, \theta) = 1 + \Psi(\rho, \theta)$ . Ясно, что функция  $\Psi(\rho, \theta)$  будет удовлетворять уравнению (4), первому равенству (5) и условиям (6), а второе равенство (5) примет вид неоднородного граничного условия

$$\left. \frac{1}{\text{Bi}} \frac{\partial \Psi(\rho, \theta)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} + \Psi(1, \theta) = \beta f(\theta). \quad (7)$$

В этом случае для нахождения функции  $\Psi(\rho, \theta)$  можно применить метод разделения переменных (метод Фурье), использовав ее представление в виде произведения  $R(\rho)\Theta(\theta)$  функций, каждая из которых зависит лишь от одного аргумента.

После замены в уравнении (4) искомой функции произведением  $R(\rho)\Theta(\theta)$  получим

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2\rho}{R(\rho)} \frac{dR(\rho)}{d\rho} = - \frac{\Lambda}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) = \mu,$$

где  $\mu$  — подлежащий определению параметр разделения. Отсюда следуют два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка

$$\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} - \mu R(\rho) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \frac{\mu}{\Lambda} \Theta(\theta) = 0. \quad (9)$$

Равенство (8) является однородным дифференциальным уравнением Эйлера второго порядка [18]. Структура решения этого уравнения зависит от соотношения между значением параметра  $\mu$  и коэффициентом 2 в слагаемом, содержащем первую производную искомой функции  $R(\rho)$  [19]. Это соотношение можно установить, если предварительно выяснить структуру решения дифференциального уравнения (9), которое при использовании подстановки  $x = \cos \theta$  принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right) + \frac{\mu}{\Lambda} P(x) = 0. \quad (10)$$

Здесь  $P(x)$  — функция, соответствующая искомой функции  $\Theta(\theta)$  при замене в ней аргумента в соответствии с равенством  $\theta = \arccos x$ . Известно, что нетривиальными решениями этого уравнения при выполнении условия  $\mu / \Lambda = n(n+1)$  являются многочлены Лежандра  $P_n(x)$ , определяемые формулой Родрига [10, 20]:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $n$  — степень многочлена Лежандра.

Следовательно, параметр разделения  $\mu$  в уравнениях (8)–(10) может принимать бесконечное множество положительных значений  $\mu_n / \Lambda = n(n+1)$ , каждому из которых соответствует решение уравнения (8) в виде [19]  $R'_n(\rho) = C'_n \rho^{\nu_n - 1/2} + C''_n \rho^{-\nu_n - 1/2}$ , где  $\nu_n = (\Lambda n(n+1) + 1/4)^{1/2}$ ;  $C'_n$ ,  $C''_n$  — произвольные постоянные. Из первого условия (5) следует

$$\left. \frac{dR'_n(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0,$$

что приводит к равенству  $C''_n = C'_n \rho_0^{2\nu_n} (\nu_n - 1/2) / (\nu_n + 1/2)$  и в результате к формуле  $R'_n(\rho) = C'_n R_n(\rho)$ , где

$$R_n(\rho) = \rho^{\nu_n - 1/2} + \rho_0^{2\nu_n} \rho^{-\nu_n - 1/2} (\nu_n - 1/2) / (\nu_n + 1/2). \quad (11)$$

Для каждого фиксированного значения  $n$  функция  $\Psi_n(\rho, \theta) = R_n(\rho) P_n(\cos \theta)$  удовлетворяет уравнению вида (4), первому равенству (5) и условиям (6). Поэтому искомое решение можно представить в виде ряда

$$\Psi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n R_n(\rho) P_n(\cos \theta). \quad (12)$$

Коэффициенты  $C'_n$  ряда (12) найдем путем удовлетворения определяемого равенством (7) граничного условия на внешней поверхности шарового слоя, используя свойства ортогональности и полноты системы многочленов Лежандра  $P_n(x)$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Это свойство позволяет любую функцию, непрерывную на указанном отрезке, представить разложением в ряд по этим многочленам. Подставив ряд (12) с использованием подстановки  $\theta = \arccos x$  в левую часть равенства (7), с учетом формулы (11) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} C'_n \left( \frac{(v_n - 1/2)(1 - \rho_0^{2v_n})}{Bi} + 1 + \frac{v_n - 1/2}{v_n + 1/2} \rho_0^{2v_n} \right) P_n(x) = \beta f(\arccos x). \quad (13)$$

Если обе части равенства (13) умножить на многочлен Лежандра  $P_m(x)$  степени  $m = 0, 1, 2, \dots$  и затем проинтегрировать полученные произведения по  $x$  при  $-1 \leq x \leq 1$ , то можно записать

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C'_n \left( \frac{(v_n - 1/2)(1 - \rho_0^{2v_n})}{Bi} + 1 + \frac{v_n - 1/2}{v_n + 1/2} \rho_0^{2v_n} \right) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \\ = \beta \int_{-1}^1 f(\arccos x) P_m(x) dx = \beta \int_0^{\pi} f(\theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

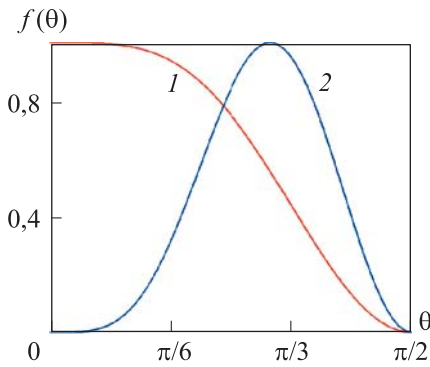
В силу ортогональности многочленов Лежандра в области интегрирования интеграл в левой части этого равенства отличен от нуля лишь при  $m = n$ . Тогда с учетом равенства квадрата нормы многочлена  $P_n(x)$  на отрезке  $[-1; 1]$  значению  $1/(n + 1/2)$  получим

$$C'_n = \frac{\beta(n + 1/2)(v_n + 1/2)}{(1 - \rho_0^{2v_n})(v_n^2 - 1/4) / Bi + 1 + \rho_0^{2v_n}(v_n - 1/2)} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Таким образом, при выбранной зависимости температуры окружающей среды от угла  $\theta$  распределение безразмерной температуры в шаровом слое в соответствии с равенством (12) будет описывать соотношение

$$\begin{aligned} \Psi_*(\rho, \theta) = 1 + \Psi(\rho, \theta) = \\ = 1 + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 1/2)(v_n + 1/2) R_n(\rho) P_n(\cos \theta)}{(1 - \rho_0^{2v_n})(v_n^2 - 1/4) / Bi + 1 + \rho_0^{2v_n}(v_n - 1/2)} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

**Результаты количественного анализа.** Проведем количественный анализ полученного решения задачи для двух вариантов функции  $f(\theta)$ , опре-



**Рис. 1.** Два варианта выбора функции  $f(\theta)$

соответствует передней критической точке ( $\theta = 0$ ). В случае турбулентного режима течения максимум интенсивности теплового воздействия смещается в направлении отсчета угла  $\theta$  (кривая 2, см. рис. 1).

Для определенности выберем в соотношении (14) значение  $\beta = 1$ . Тогда зависящую от координат составляющую распределения безразмерной температуры в шаровом слое будет описывать функция

$$\Psi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1/2)(v_n+1/2)R_n(\rho)P_n(\cos \theta)}{(1-\rho_0^{2v_n})(v_n^2-1/4)/\text{Bi}+1+\rho_0^{2v_n}(v_n-1/2)} \int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (15)$$

Следует отметить, что сходимость ряда в формуле (15) оказывается достаточно медленной и для получения достоверного результата при выборе функции  $f(\theta)$  в вариантах, приведенных на рис. 1, может возникнуть необходимость в вычислении значительного числа слагаемых.

Главная цель количественного анализа состоит в установлении влияния степени анизотропии материала шарового слоя на распределение температуры в этом слое. Если с приемлемой точностью можно представить каждый используемый вариант функции  $f(\theta)$  линейной комбинацией нескольких многочленов Лежандра, то при вычислениях удастся ограничиться суммированием лишь тех членов ряда, в которые входят только эти несколько многочленов. В первом варианте эту функцию, имеющую ординату максимума, равную единице, и удовлетворяющую граничным условиям  $df(\theta)/d\theta = 0$  при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ , можно представить в виде

$$f_1(\theta) = \frac{0,6125P_0(\cos \theta) + P_2(\cos \theta) - 0,3P_4(\cos \theta)}{1,3125}. \quad (16)$$



Для второго варианта функции  $f(\theta)$ , имеющей ординату максимума, равную единице с точностью  $10^{-4}$ , и также удовлетворяющей указанным граничным условиям, можно записать

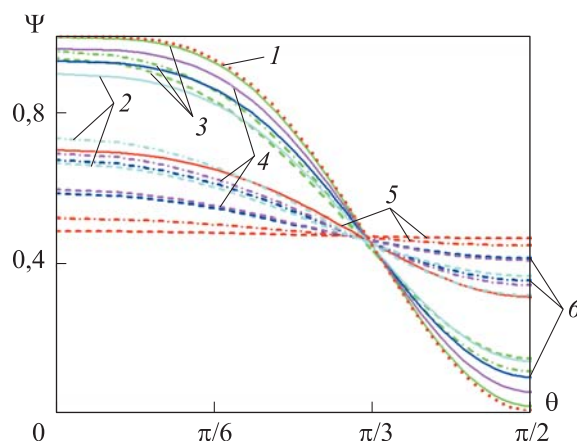
$$f_2(\theta) = \frac{0,52381P_0(\cos \theta) - P_4(\cos \theta) + (10/21)P_6(\cos \theta)}{1,0185}. \quad (17)$$

Графики именно этих двух функций приведены на рис. 1. Представление функции  $f(\theta)$  линейной комбинацией трех многочленов Лежандра позволяет при вычислении ряда в формуле (15) ограничиться лишь тремя слагаемыми.

Степень анизотропии теплопроводности материала теплозащитного покрытия, определяемая значением параметра  $\Lambda$ , может изменяться в достаточно широких пределах. Для композитов она зависит от свойств армирующих элементов и может быть оценена методами математического моделирования [22, 23]. С применением для армирования наноструктурных элементов связана перспектива увеличения степени анизотропии теплопроводности до значений порядка  $10^2$  [17, 24].

Выберем два значения относительной толщины шарового слоя  $\rho_0 = 0,8$  и  $\rho_0 = 0,9$ . С использованием функции  $f(\theta)$ , заданной формулой (16), по соотношению (15) построены графики зависимости безразмерной температуры  $\Psi$  шарового слоя от угла  $\theta$  при  $\rho_0 = 0,8$  для трех значений радиальной координаты  $\rho$ , соответствующих внешней поверхности слоя, его средней поверхности и внутренней идеально теплоизолированной поверхности (рис. 2). При достаточно высокой интенсивности конвективного теплообмена ( $Bi = 100$ ) и низкой степени анизотропии материала слоя ( $\Lambda = 2$ , кривые 3) температура на всей внешней поверхности ( $\rho = 1$ ) практически совпадает с температурой окружающей среды, а изменение температуры по толщине слоя оказывается сравнительно небольшим. Увеличение степени анизотропии на порядок ( $\Lambda = 20$ ) приводит к заметному отличию температуры внешней поверхности от температуры окружающей среды и более пологому распределению температуры внутри слоя (кривые 4). Снижение интенсивности теплообмена ( $Bi = 50$ ) при той же степени анизотропии увеличивает различие между температурой окружающей среды и температурой внешней поверхности, но мало влияет на распределение температуры внутри слоя (кривые 6). Уменьшение как интенсивности теплообмена, так и степени анизотропии (кривые 2) вызывает некоторое снижение перепада температуры по толщине слоя. Наконец, при  $Bi = 10$  и достаточно высокой степени анизо-

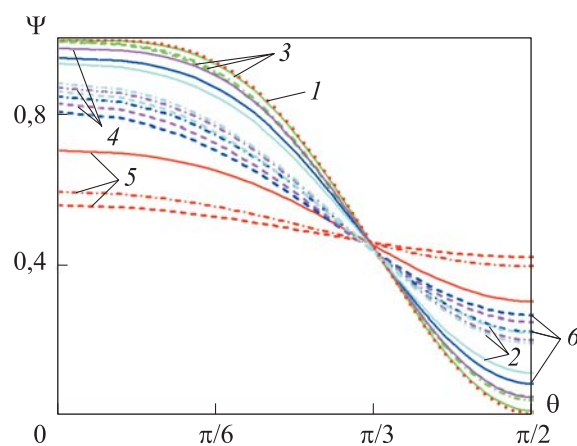




**Рис. 2.** Зависимость безразмерных температуры окружающей среды (1) и температуры шарового слоя от угловой координаты при  $\rho_0 = 0,8$  и различных сочетаниях значений параметров:

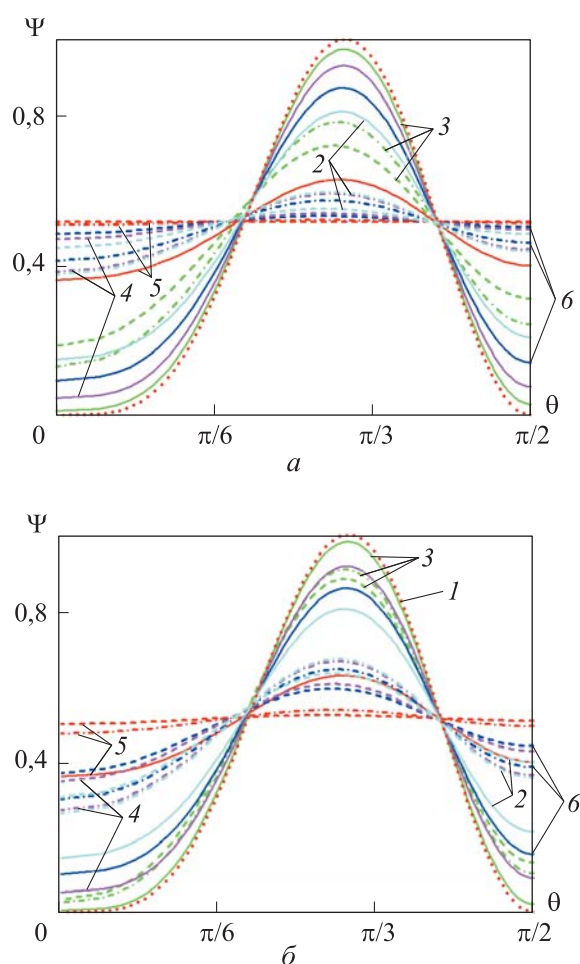
2 —  $Bi = 20$  и  $\Lambda = 10$ ; 3 —  $Bi = 100$  и  $\Lambda = 2$ ; 4 —  $Bi = 100$  и  $\Lambda = 20$ ; 5 —  $Bi = 10$  и  $\Lambda = 50$ ;  
6 —  $Bi = 50$  и  $\Lambda = 20$  (сплошные линии соответствуют значению  $\rho = 1$ ,  
штрихпунктирные —  $\rho = (1 + \rho_0)/2$ , штриховые —  $\rho = \rho_0$ )

тропии ( $\Lambda = 50$ ) распределения температуры при  $\rho = 0,9$  и  $\rho_0 = 0,8$  становятся почти однородными, а различие между распределениями температуры на внешней поверхности и окружающей среды наибольшим. С уменьшением относительной толщины шарового слоя (рис. 3,  $\rho_0 = 0,9$ ) отмеченные тенденции сохраняются, но влияние анизотропии на выравнивание распределения температуры в тангенциальном направлении несколько ослабевает.



**Рис. 3.** Зависимость безразмерных температуры окружающей среды (1) и температуры шарового слоя от угловой координаты при  $\rho_0 = 0,9$  и различных сочетаниях значений параметров (обозначения кривых идентичны обозначениям, приведенным на рис. 2)

Отмеченные выше закономерности остаются в силе и в случае, когда распределение безразмерной температуры окружающей среды описывает функция, определяемая формулой (17). Результаты вычислений по формуле (15) для тех же сочетаний параметров, которые использованы выше, приведены на рис. 4. Следует отметить, что в этом случае внутри шарового слоя эффект выравнивания распределения температуры в тангенциальном направлении проявляется сильнее, поскольку уменьшаются относительные расстояния от зоны максимальной интенсивности конвективного теплообмена до оси симметрии шарового слоя при  $\theta = 0$  и идеально теплоизолированной кольцевой поверхности при  $\theta = \pi/2$ . Несмотря на



**Рис. 4.** Зависимость безразмерных температуры окружающей среды (1) и температуры шарового слоя от угловой координаты при  $\rho_0 = 0,8$  (а)  $0,9$  (б) и различных сочетаниях значений параметров (обозначения кривых идентичны обозначениям, приведенным на рис. 2)

то что в таком случае вследствие осевой симметрии температура в широтном направлении не изменяется, одинаковое изменение значений  $V_i$  и  $\Lambda$  оказывает более существенное влияние на разность значений температуры окружающей среды и температуры поверхности теплообмена в зоне их наибольших значений по сравнению с предыдущим случаем, когда модуль градиента температуры при  $\theta = 0$  в любом из меридиональных направлений одинаков.

**Заключение.** Постановка модельной задачи стационарной теплопроводности при неравномерном нагреве внешней поверхности анизотропного шарового слоя и количественный анализ полученного решения этой задачи позволили оценить взаимное влияние степени анизотропии материала слоя, его относительной толщины и интенсивности конвективного теплообмена на выравнивание распределения температуры. При определенных условиях вследствие высокой степени анизотропии материала слоя, характеризуемой отношением коэффициентов теплопроводности в продольном и поперечном направлениях, возникает возможность снижения температуры поверхности теплообмена в зоне наиболее интенсивного нагрева и появления участков этой поверхности, температура которых оказывается выше температуры окружающей среды. Представленное решение задачи в замкнутой аналитической форме позволяет проводить сравнительный анализ влияния определяющих параметров в широком диапазоне изменения их значений на температурное состояние теплозащитного покрытия в виде шарового слоя из анизотропного материала.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Резник С.В., ред. Материалы и покрытия в экстремальных условиях. Взгляд в будущее. Т. 2. Передовые технологии производства. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
- [2] Никитин П.В. Тепловая защита. М., Изд-во МАИ, 2006.
- [3] Карпинос Д.М., ред. Композиционные материалы. Киев, Наукова думка, 1985.
- [4] Алифанов О.М., Иванов Н.А., Колесников В.А. и др. Определение температурных зависимостей теплофизических характеристик анизотропных материалов из решения обратной задачи. *Вестник МАИ*, 2009, т. 16, № 5, с. 247–254.
- [5] Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М., ФИЗМАТЛИТ, 2015.
- [6] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок теплопроводности однонаправленного волокнистого композита. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2016, № 5, с. 67–83.  
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-67-83

- [7] Котович А., Зарубин В., Кувыркин Г. Локальное тепловое воздействие на теплозащитное покрытие. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015.
- [8] Суржигов С.Т. Аэрофизика гиперзвукового потока воздуха у поверхности спускаемого космического аппарата на высотах менее 60 км. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2016, № 5, с. 33–45.  
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-33-45
- [9] Формалев В.Ф. Тепломассоперенос в анизотропных телах. *ТВТ*, 2001, т. 39, № 5, с. 810–832.
- [10] Формалев В.Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М., ФИЗМАТЛИТ, 2014.
- [11] Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропной охлаждаемой пластины, находящейся под воздействием внешнего теплового потока. *Известия РАН. Энергетика*, 2012, № 6, с. 108–117.
- [12] Зарубин В.С., Котович А.В., Кувыркин Г.Н. Оптимальная толщина анизотропного покрытия на охлаждаемой стенке при локальном внешнем нагреве. *Известия РАН. Энергетика*, 2014, № 5, с. 45–50.
- [13] Аттетков А.В., Волков И.К. Оптимальная толщина анизотропной стенки, разделяющей две различные среды, при ее локальном нагреве. *Тепловые процессы в технике*, 2017, т. 9, № 9, с. 417–421.
- [14] Аттетков А.В., Волков И.К. Оптимальная толщина анизотропного покрытия разделительной стенки двух различных сред при локальном тепловом воздействии. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2018, № 4, с. 4–15.  
DOI: 10.18698/0236-3941-2018-4-4-15
- [15] Формалев В.Ф., Колесник С.А. Сопряженный теплоперенос между пристенными газодинамическими течениями и анизотропными телами. *ТВТ*, 2007, т. 45, № 1, с. 85–93.
- [16] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Влияние продольной неизотермичности на сопряженный теплообмен между пристенными газодинамическими течениями и затупленными анизотропными телами. *ТВТ*, 2009, т. 47, № 2, с. 247–253.
- [17] Формалев В.Ф., Колесник С.А., Селин И.А. О сопряженном теплообмене при аэродинамическом нагреве анизотропных тел с высокой степенью анизотропии. *Тепловые процессы в технике*, 2016, т. 8, № 9, с. 388–394.
- [18] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1971.
- [19] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Факториал, 1997.
- [20] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М., Наука, 1979.

[21] Авдугевский В.С., Кошкин В.К., ред. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М., Машиностроение, 1992.

[22] Алифанов О.М., Колесников В.А. Определение элементов тензора теплопроводности анизотропных материалов из решения обратной задачи. *Труды МАИ*, 2012, № 58, с. 1–14.

[23] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка методом самосогласования эффективной теплопроводности текстурированного композита с трансверсально изотропными эллипсоидальными включениями. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2015, № 4, с. 88–101.

DOI: 10.18698/1812-3368-2015-4-88-101

[24] Сергеева Е.С. Зависимость эквивалентных коэффициентов теплопроводности однослойной углеродной нанотрубки от ее хиральности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2018, № 2, с. 97–106.

DOI: 10.18698/1812-3368-2018-2-97-106

**Зарубин Владимир Степанович** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Леонов Виктор Витальевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Зарубин Владимир Сергеевич мл.** — инженер отдела «Крупногабаритные космические конструкции» НИИ СМ МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Зарубин В.С., Леонов В.В., Зарубин В.С. мл. Температурное состояние анизотропного шарового слоя при конвективном теплообмене с окружающей средой. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2019, № 4, с. 40–55.  
DOI: 10.18698/1812-3368-2019-4-40-55

**TEMPERATURE STATE OF THE ANISOTROPIC SPHERICAL LAYER  
DURING CONVECTIVE HEAT EXCHANGE  
WITH THE ENVIRONMENT**

V.S. Zarubin

zarubin\_vs@mail.ru

V.V. Leonov

lv-05@mail.ru

V.S. Zarubin Jr.

vszarubin@gmail.com

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

### Abstract

The paper focuses on the process of steady heat conduction in a spherical layer of a heat-shielding coating made of anisotropic material. The inner surface of the layer is ideally heat-insulated but its outer surface is exposed to heating by convective heat exchange with the environment, the temperature of which varies along this surface. Based on the obtained solution of the linear heat conduction problem, we quantitatively assessed the influence of the degree of anisotropy of the coating material, its relative thickness, intensity of convective heat transfer, and uneven distribution of ambient temperature on the equalization of temperature distribution in the spherical layer. The results obtained can be used to select the characteristics of an anisotropic coating material in order to reduce the temperature of the outer surface of the spherical layer in the zone of the most intense heating

### Keywords

*Convective heat transfer, anisotropic material, heat-shielding coating, problem of heat conductivity, spherical layer*

Received 22.01.2019

© Author(s), 2019

---

*This work was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project of the Russian Science Foundation no. 17-79-10450)*

### REFERENCES

- [1] Reznik S.V., ed. *Materialy i pokrytiya v ekstremalnykh usloviyakh. Vzglyad v budushchee*. Т. 2. *Peredovye tekhnologii proizvodstva* [Materials and coatings in extreme conditions. A look into the future. Vol. 2. Advanced production technologies]. Moscow, BMSTU Publ., 2002.
- [2] Nikitin P.V. *Teplovaya zashchita* [Thermal protection]. Moscow, MAI Publ., 2006.
- [3] Karpinos D.M., ed. *Kompozitsionnye materialy* [Composites]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985.
- [4] Alifanov O.M., Ivanov N.A., Kolesnikov V.A., et al. A technique to evaluate temperature dependences of thermal and physical characteristics for anisotropic materials basing on an inverse problem solution. *Vestnik MAI* [Aerospace MAI Journal], 2009, vol. 16, no. 5, pp. 247–254 (in Russ.).
- [5] Formalev V.F. *Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh. Chislennyye metody, teplovyye volny, obratnyye zadachi* [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, heat waves, inverse problems]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2015.
- [6] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. Comparative analysis for thermal conductivity estimates of unidirectional fiber composites. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2016, no. 5, pp. 67–83 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-67-83



- [7] Kotovich A., Zarubin V., Kuvyrkin G. Lokalnoe teplovoe vozdeystvie na teplozashchitnoe pokrytie [Local thermal effect on the thermal barrier coating]. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015.
- [8] Surzhikov S.T. Aerophysics of the hypersonic air flow above surface of space vehicle at altitudes of less than 60 km. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, no. 5, pp. 33–45 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2016-5-33-45
- [9] Formalev V.F. Heat and mass transfer in anisotropic bodies. *High Temp.*, 2001, vol. 39, iss. 5, pp. 753–774. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1012393413687>
- [10] Formalev V.F. Teploprovodnost anizotropnykh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach [Heat conduction of anisotropic bodies. Analytical methods of problem solution]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2014.
- [11] Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field of cooled anisotropic plate under the influence of external heat flow. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of RAS. Power Engineering], 2012, no. 6, pp. 108–117 (in Russ.).
- [12] Zarubin V.S., Kotovich A.V., Kuvyrkin G.N. Optimal thickness of the anisotropic surface on the cooling plate with applied local external heating. *Izvestiya RAN. Energetika* [Proceedings of RAS. Power Engineering], 2014, no. 5, pp. 45–50 (in Russ.).
- [13] Attetkov A.V., Volkov I.K. The optimum thickness of an anisotropic wall, which separates two different environments, at its local heating. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2017, vol. 9, no. 9, pp. 417–421 (in Russ.).
- [14] Attetkov A.V., Volkov I.K. Optimum anisotropic coating thickness for a wall separating two different media and subjected to local heating. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2018, no. 4, pp. 4–15 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2018-4-4-15
- [15] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Conjugate heat transfer between wall gasdynamic flows and anisotropic bodies. *High Temp.*, 2007, vol. 45, iss. 1, pp. 76–84. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X07010105>
- [16] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. The effect of longitudinal nonisothermality on conjugate heat transfer between wall gasdynamic flows and blunt anisotropic bodies. *High Temp.*, 2009, vol. 47, iss. 2, pp. 228–234. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X09020138>
- [17] Formalev V.F., Kolesnik S.A., Selin I.A. About coupled heat exchange in a case of aerodynamic heat of bodies with high degree of anisotropy. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2016, vol. 8, no. 9, pp. 388–394 (in Russ.).
- [18] Kamke E. Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1965.
- [19] Zaytsev V.F., Polyanin A.D. Spravochnik po lineynym obyknovennym differentsialnym uravneniyam [Handbook of linear ordinary differential equations]. Moscow, Faktorial Publ., 1997.
- [20] Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. Dover Publications, 1965.



[21] Avduevskiy V.S., Koshkin V.K., eds. *Osnovy teploperedachi v aviatsionnoy i raketno-kosmicheskoy tekhnike* [Fundamentals of heat transfer in aviation and rocket-space technologies]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1992.

[22] Alifanov O.M., Kolesnikov V.A. Defining the elements of the thermal conductivity tensor of anisotropic materials basing on an inverse problem solution. *Trudy MAI*, 2012, no. 58, pp. 1–14 (in Russ.).

[23] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Yu. Estimation of effective heat conductivity of the textured composite with transverse isotropic ellipsoidal inclusions by the self-coupling method. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2015, no. 4, pp. 88–101 (in Russ.).

DOI: 10.18698/1812-3368-2015-4-88-101

[24] Sergeeva E.S. Dependence of thermal-conductivity equivalent coefficients of single-walled carbon nanotubes on its chirality. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2018, no. 2, pp. 97–106 (in Russ.).

DOI: 10.18698/1812-3368-2018-2-97-106

**Zarubin V.S.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Leonov V.V.** — Cand. Sc. (Eng.) Assoc. Professor, Department of Spacecraft and Launch Vehicles, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Zarubin V.S. Jr.** — Engineer, Department of Large Space Structures, Research Institute of Special Machinery, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Zarubin V.S., Leonov V.V., Zarubin V.S. Jr. Temperature state of the anisotropic spherical layer during convective heat exchange with the environment. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences*, 2019, no. 4, pp. 40–55 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2019-4-40-55