

ИНДИКАТОРЫ ПРИМЕНИМОСТИ И МЕТОДИКИ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ТИПА МАКСВЕЛЛА ДЛЯ РЕОНОМНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО КРИВЫМ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ СТУПЕНЧАТЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

А.В. Хохлов

andrey-khokhlov@ya.ru

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Аналитически исследованы общие свойства кривых ползучести, порождаемых физически нелинейным определяющим соотношением с двумя произвольными материальными функциями при любых ступенчатых нагружениях. Выявлен ряд индикаторов применимости определяющего соотношения и разработаны три общие методики идентификации модели (в одномерном случае). Они позволяют определить массивы значений двух материальных функций определяющего соотношения на произвольно заданной сетке точек и не требуют задания конкретных аппроксимаций, минимизации среднеквадратичного отклонения для определения их параметров и численного решения системы нелинейных уравнений, так как выведены явные формулы для прямого (независимого) определения значений материальных функций по минимальным наборам регистрируемых величин, предотвращающие накопление погрешности. Эти методики опираются на следующие системы базовых испытаний: 1) серия кривых обратной ползучести; 2) одно испытание на ползучесть при ступенчатом нагружении с нарастающими уровнями напряжения; 3) одно испытание на ползучесть при ступенчатом нагружении с различными уровнями напряжения и полной разгрузкой между ними. Рассмотрены различные варианты базовых методик, их достоинства и недостатки и возможные модификации

Ключевые слова

Вязкоупругопластичность, физическая нелинейность, материальные функции, скорость ползучести, пластическая деформация, индикаторы применимости, разгрузка, кривые обратной ползучести

Поступила в редакцию 20.11.2017
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146_а)

Испытания на ползучесть при ступенчатых нагружениях (с кусочно-постоянным во времени напряжением) позволяют уловить и обследовать разные аспекты поведения материала и детали реализации многих эффектов, собрать более богатую информацию для выбора, идентификации и верификации определяющих соотношений по сравнению с кривыми ползучести при постоянном напряжении. В частности, они позволяют обнаружить признаки нелинейности в поведении материала, исследовать зависимость кривых ползучести от напряжения и предыстории

нагрузки, восстановление и остаточную деформацию при полной и частичной разгрузках, влияние начальной стадии нагружения и перестановки ступеней, эффекты, сопровождающие скачок напряжения вниз или его быстрое убывание за малый промежуток времени (*dip tests, non-monotonic creep behavior*), влияние скачков напряжения на длительную прочность и отклонение от правила линейного суммирования поврежденности (*Miner's rule, linear damage rule, cumulative damage theory*). Обзоры экспериментальных данных и наблюдаемых эффектов приведены, например, в работах [1–19].

Для обоснованного выбора определяющего соотношения (ОС), определения его арсенала возможностей и области применимости, для грамотной обработки опытных данных и идентификации материальных функций (МФ) и параметров выбранного ОС требуется системное *аналитическое* изучение общих свойств теоретических кривых ползучести при любых ступенчатых нагружениях (а также кривых релаксации и деформирования при разных программах нагружения), порождаемых ОС с *произвольными* МФ, исследование влияния параметров нагружения и характеристик МФ, выявление необходимых условий (индикаторов) применимости ОС к моделируемому материалу.

Такой анализ проведен в работах [19–27] для физически нелинейного ОС

$$\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \eta^{-1} \int_0^t V(\sigma(\tau))d\tau, \text{ или } \dot{\varepsilon} = E^{-1}F'(\sigma)\dot{\sigma} + \eta^{-1}V(\sigma), \quad t > 0, \quad (1)$$

выражающего деформацию $\varepsilon(t)$ через историю напряжения $\sigma(\tau)$, $\tau \in [0; t]$, в изотермических процессах деформирования стабильных реономных материалов. Оно основано на разложении полной деформации $\varepsilon(t)$ в сумму упругой и вязкопластической компонент: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$; $\varepsilon_e = F(\sigma)/E$; $\dot{\varepsilon}_v = V(\sigma)/\eta$, и нацелено на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для материалов, обладающих наследственностью, высокой скоростной чувствительностью и, возможно, разносопротивляемостью. В ОС (1) входят две МФ $F(x)$, $V(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$, и две постоянные: модуль упругости $E > 0$ и коэффициент вязкости $\eta > 0$. Параметры E и η выделены из МФ для удобства учета влияния температуры в форме $E = E(T)$, $\eta = \eta(T)$ [24]. Если ω_+ и ω_- конечны, они могут быть интерпретированы как пределы прочности при растяжении и сжатии (как материальные параметры ОС).

В случае $F(x) \equiv 0$, $V(x) = x|x|^{n-1}$, $n > 1$, ОС (1) дает степенной закон течения (*Norton — Bailey model*), самый популярный (в силу простоты) в теории ползучести, вязкопластичности, реологии полимеров и гидродинамике неньютоновских жидкостей. Он используется для моделирования зависимости скорости установившейся ползучести от напряжения, течения степенных жидкостей и сверхпластического течения материалов [1–12, 28–34]. Задав $F(x) = x$ и $V(x) = x|x|^{n-1}$, получим модель с линейной упругостью и степенной вязкостью, которая применялась в ряде работ для описания экспериментальных кривых

ползучести, моделирования сверхпластичности и решения конкретных задач [2, 5, 32, 35–39]. Модель с произвольными МФ $F(x)$ и $V(x)$ системному исследованию и аттестации не подвергалась.

Аналитически изучены в работах [19–27] уравнения семейств порождаемых ОС (1) базовых квазистатических кривых: кривых релаксации и ползучести с произвольной начальной стадией нагружения до заданного уровня, ползучести при ступенчатых нагружениях, длительной прочности, диаграмм деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях деформации или нагружения, при циклическом нагружении. Исследованы общие свойства этих кривых в зависимости от характеристик МФ и параметров программ нагружения: интервалы монотонности и выпуклости, точки перегиба, отклики на разрывы входного процесса (скачки и изломы), асимптотики и двусторонние оценки теоретических кривых, характер сходимости их семейств к предельным кривым при стремлении параметров программ нагружения (скорости деформирования или нагружения, длительности начальной стадии нагружения и др.) к нулю и бесконечности, условия затухания памяти, влияние перестановки ступеней нагружения на асимптотику и остаточную деформацию и т. п. В результате сопоставления обнаруженных свойств теоретических кривых с типичными качественными свойствами кривых испытаний широкого класса вязкоупругопластичных материалов (с целевым списком механических эффектов) выведены необходимые дополнительные ограничения на МФ, обеспечивающие адекватное моделирование основных реологических эффектов, выявлены теоретико-экспериментальные индикаторы применимости ОС (1) и те эффекты, которые оно принципиально не может описать ни при каких МФ. Математические свойства оператора (1), обзоры литературы и родственных соотношению (1) моделей, применяемых в теории ползучести, сверхпластичности и механике полимеров, вывод ограничений на МФ, учет влияния температуры и обобщение ОС (1) на трехмерный случай приведены в работах [19–27].

Цель работы — разработка способов идентификации ОС (1) по кривым ползучести материала при ступенчатых нагружениях, в частности по кривым обратной ползучести.

Об ограничениях на материальные функции определяющего соотношения и области его применимости. Материальная функция F определяет в (1) упругую деформацию $\varepsilon_e(\sigma)$. Минимальные первичные ограничения на нее: $F(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$, — непрерывная (строго) возрастающая функция с кусочно-непрерывной производной, такая что $F(0) = 0$. Эти условия обеспечивают совпадение знаков напряжения и упругой деформации $\varepsilon_e(\sigma)$ и соблюдение условия $\varepsilon_e(0) = 0$. Из строгого возрастания $F(x)$ следует возрастание $\varepsilon_e(|\sigma|)$ и энергии упругой деформации с ростом $|\sigma|$ и существование обратной к F функции f . Функция вязкости $V(x)/\eta$ в ОС (1) управляет вязкопластическими свойствами: она регулирует память материала, вязкость, скорость диссипации, релаксации, ползучести и накопления пластической деформации, чувствительность напряже-

ния (в частности, мгновенного модуля и предела текучести) к скорости деформации, длительную прочность [19–27]. Минимальные первичные ограничения на нее: $V(x)$ — непрерывная (нестрого) возрастающая функция на интервале (ω_-, ω_+) , такая что $V(0) = 0$. Эти ограничения на МФ обеспечивают, в частности, возрастание диаграмм деформирования и кривых ползучести, убывание кривых релаксации и длительной прочности и термодинамическую согласованность модели, т. е. положительность работы напряжения $\sigma(\tau)$ в произвольном процессе деформирования и неотрицательность и возрастание диссипации $W[t, \sigma(\tau)]$ в любой момент времени: $\dot{W}(t) = \sigma(t)V(\sigma(t))/\eta > 0$.

Анализ свойств основных теоретических кривых, порождаемых ОС (1), обнаружил, что следует различать два основных случая, в которых ОС (1) (моделируемый материал) ведет себя по-разному: 1) $|V(x)| > 0$ при $x \neq 0$; 2) $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $Z := [\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ \geq 0$, $\sigma_+ \neq \sigma_-$ (по определению σ_- и σ_+ — нижняя и верхняя грани множества нулей МФ $V(x)$). Во втором случае, пока $\sigma(t) \in Z$, ОС (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала: диссипации и гистерезиса нет, релаксация и ползучесть отсутствуют, кривая деформирования не зависит от скорости нагружения (или деформации) при $\varepsilon \in [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$, где $\varepsilon_{\pm} := F(\sigma_{\pm})/E$; σ_- , σ_+ играют роль пределов упругости (и порогов ползучести) материала при сжатии и растяжении, а при $\sigma > \sigma_+$ (или $\sigma < \sigma_-$) начинают проявляться диссипативные и вязкопластические свойства.

Системное исследование ОС (1), проведенное в работах [19–27], показало, что его можно применять для описания комплекса основных реологических эффектов, типичных для вязкоупругопластичных материалов, обладающих памятью, высокой чувствительностью к скорости нагружения и, возможно, разносопротивляемостью, для которых характерны следующие особенности механического поведения: 1) возрастающие кривые нагружения с постоянной скоростью, которые могут быть как выпуклыми вверх, так и могут обладать точкой перегиба; 2) положительная скоростная чувствительность; 3) монотонное убывание и выпуклость кривой разгрузки или наличие на ней точки максимума или точки перегиба (в зависимости от скорости и уровня нагружения); 4) отсутствие восстановления (релаксации деформации) после импульса нагрузки, превышающей предел упругости, и полной разгрузки; 5) существенное влияние длительности и скорости нагружения на величину пластической деформации; 6) выраженная стадия течения при постоянном напряжении на диаграммах деформирования с постоянной скоростью и (возрастающая) зависимость предела текучести от скорости; 7) «неограниченное» нарастание пластической деформации при циклическом нагружении за пределом упругости (рэтчетинг без стабилизации и приспособляемости, циклическое разупрочнение); 8) ползучесть с постоянной скоростью; 9) релаксация напряжения до нулевого или ненулевого значения; 10) возрастание податливости и скоростной чувствительности, увеличение скоростей диссипации, релаксации, ползучести и рэтчетинга с ростом температуры. К таким материалам

(в определенных режимах деформирования) относятся, например, многие полимеры, их расплавы и растворы, твердые топлива, асфальтобетоны, высокомолекулярные полиэтиленовые нити, геоткани и георешетки, льды, титановые и алюминевые сплавы в состоянии, близком к сверхпластичности, углеродные и керамические материалы (при высоких температурах) и др.

Кривые ползучести и обратной ползучести, порождаемые определяющим соотношением (1). При $\sigma(t) = \bar{\sigma} = \text{const}$, $t > 0$, ОС (1) порождает семейство кривых ползучести (КП)

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = r(\bar{\sigma})t + cF(\bar{\sigma}) = E^{-1}[V(\bar{\sigma})\tau_r^{-1}t + F(\bar{\sigma})], \quad (2)$$

где $r(\bar{\sigma}) := \gamma V(\bar{\sigma})$, $\gamma := 1/\eta$; $c := 1/E$; $\tau_r := \eta/E = c/\gamma$ — время релаксации линейной модели Максвелла (с $V(x) = F(x) = x$); величину τ_r удобно использовать для обезразмеривания времени. Если $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+]$, $\sigma_- < 0$, $\sigma_+ > 0$, то при $\bar{\sigma} \in [\sigma_-, \sigma_+]$ ползучести нет, и ОС (1) моделирует упругое поведение материала. Если $V(\bar{\sigma}) \neq 0$, то все КП линейны по времени при $t > 0$, т. е. ОС (1) моделирует только ползучесть с постоянной скоростью $r(\bar{\sigma})$. Оно не способно описывать стадии замедленной и ускоренной ползучести, а также ограниченную ползучесть, свойственную, например, многим полимерам. Поскольку $V(\bar{\sigma}) > 0$ при $\bar{\sigma} > \sigma_+ \geq 0$ и возрастает, то КП (2) возрастает по t (при $\bar{\sigma} > 0$) и по $\bar{\sigma}$, что совпадает с типичными качественными свойствами КП структурно стабильных однородных материалов.

Выраженная стадия ползучести с постоянной скоростью характерна для многих пластичных металлов, полимеров в вязкотекучем состоянии и для материалов в состоянии сверхпластичности (высокому показателю скоростной чувствительности при сверхпластическом деформировании соответствуют значения показателя $n \leq 3$ в отличие от металлов в обычном состоянии, у которых всегда $n \in (3; 10)$ или более) [30–33]. Как правило, кривые ползучести полимеров имеют стадию установившейся ползучести при достаточно высоких температурах, когда полимер находится в вязкотекучем состоянии.

Кривые обратной ползучести (КОП) — отклики ОС (1) на прямоугольный импульс нагрузки $\sigma(t) = \bar{\sigma}$ при $t \in (0; t_*)$, $\sigma(t) = 0$ при $t > t_*$, т. е.

$$\sigma(t, \bar{\sigma}, t_*) = \bar{\sigma} [h(t) - h(t - t_*)], \quad (3)$$

где $t_* > 0$, $\bar{\sigma} > \sigma_+ \geq 0$; $h(t)$ — функция Хевисайда. Подстановка в (1) дает КОП

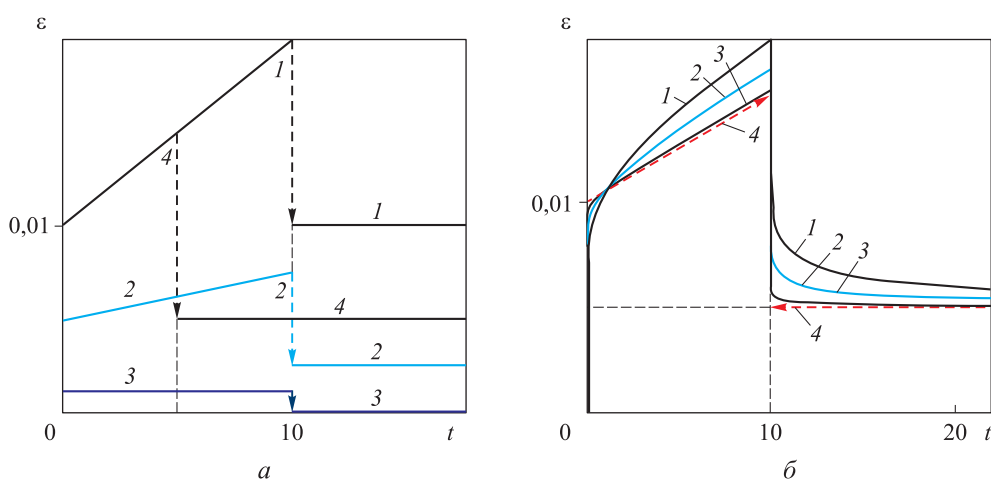
$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_*) = r(\bar{\sigma})t + cF(\bar{\sigma}) \text{ при } t < t_*; \quad \varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_*) = p(\bar{\sigma}, t_*) \text{ при } t > t_*; \quad (4)$$

$$r(\bar{\sigma}) = \gamma V(\bar{\sigma}); \quad p(\bar{\sigma}, t_*) := \gamma V(\bar{\sigma})t_* = cV(\bar{\sigma})t_*\tau_r^{-1}. \quad (5)$$

Скачок деформации в точке $t = t_*$ равен $-cF(\bar{\sigma})$, при $t > t_*$ деформация не меняется и равна накопленной за время t_* деформации ползучести $p(\bar{\sigma}, t_*)$. При полной разгрузке исчезает лишь упругая деформация $\varepsilon(+0) = cF(\bar{\sigma})$, а вся дефор-

мация ползучести оказывается необратимой, пластической. Такое поведение демонстрируют многие металлы и полимеры при достаточно высоких температурах. Соотношение (1) не описывает восстановление («упругое последствие»), т. е. процесс *постепенной* релаксации накопленной деформации, как это наблюдается в испытаниях многих материалов (например, для сетчатых полимеров и для костной ткани КОП стремятся к асимптоте $\varepsilon = 0$). Соотношение (1) описывает лишь *мгновенное* восстановление упругой деформации (идеализированный случай).

Кривые обратной ползучести (4) модели (1) с $F(x) = x$, $V(x) = x|x|$, $E = 10$, $\eta = 10$ (тогда $\tau_r = 1$) для $t_* = 10$ и $\bar{\sigma} = 0,1$ (кривая 1), $\bar{\sigma} = 0,05$ (кривая 2) и $\bar{\sigma} = 0,01$ (кривая 3), а также для $t_* = 5$, $\bar{\sigma} = 0,1$ (кривая 4) приведены на рисунке, а. По оси абсцисс отложено безразмерное время: рассматриваемые качественные свойства кривых не зависят от его масштабирования.



Кривые обратной ползучести (4) модели (1) (а) для $t_* = 10$ и $\bar{\sigma} = 0,1$ (1), $\bar{\sigma} = 0,05$ (2) и $\bar{\sigma} = 0,01$ (3), для $t_* = 5$, $\bar{\sigma} = 0,1$ (4), КОП линейной модели вязкоупругости (б) с функцией ползучести $\Pi = At^u + \alpha t$, $u \in (0;1)$, $A, \alpha > 0$, при $\alpha = 0,05$, $A = 1$ и $u = 0,1$; 0,05; 0,01 (1–3), разрывная КОП модели Максвелла с $\Pi = 1 + \alpha t$ (4) при $t \neq t_*$.

Кривые обратной ползучести линейной модели вязкоупругости с функцией ползучести $\Pi = At^u + \alpha t$, $u \in (0;1)$, $A, \alpha > 0$, при трех разных (малых) показателях (КОП 1–3 соответствуют $\alpha = 0,05$, $A = 1$ и $u = 0,1$; 0,05; 0,01) для $t_* = 10$, $\bar{\sigma} = 0,01$ приведены на рисунке, б. Кривые обратной ползучести модели с $\Pi = At^u + \alpha t$ описывают восстановление при любых u, A, α и непрерывны в точке $t = t_*$ (так как $\Pi(0) = 0$), но при $u \rightarrow 0+$ их семейство сходится к разрывной КОП модели Максвелла с $\Pi = 1 + \alpha t$ (кривая 4) при $t \neq t_*$, а скачок деформации моделируется свойствами $\dot{\varepsilon}(0) = +\infty$ и $\dot{\varepsilon}(t_*) = -\infty$ (вытекающим из $\dot{\Pi}(0) = +\infty$).

Индикаторы применимости и идентификация определяющего соотношения (1) по серии кривых обратной ползучести материала. Из общих свойств

КОП (4), порождаемых ОС (1) с произвольными МФ, вытекают необходимые признаки применимости ОС (1), которые удобно проверять при анализе экспериментальных КОП материалов и использовать как индикаторы (не)применимости ОС (1) для моделирования этих материалов.

Постоянство скорости ползучести $\dot{\varepsilon}(t) = r(\bar{\sigma}) = \gamma V(\bar{\sigma})$ при $t \in (0; t_*)$ (полагаем, что в (3) $\bar{\sigma} > \sigma_+ \geq 0$ и потому $V(\bar{\sigma}) > 0$) и постоянство деформации $\varepsilon(t; \bar{\sigma}, t_*) = p(\bar{\sigma}, t_*)$ при $t \geq t_*$ (отсутствие восстановления) — два важнейших атрибутивных свойства ОС (1) и два необходимых признака его применимости для моделирования поведения некоторого материала, легко проверяемых испытаниями. Пропорциональность остаточной деформации (5) длительности t_* прямоугольного импульса нагружения (3) — третий индикатор применимости ОС (1); для любых МФ ОС (1) предсказывает, что в двух испытаниях с одинаковым уровнем напряжения должно быть $p'' / p' = t'' / t'$.

Еще одна характерная точка на КОП (4) — при $t = t_*$, когда деформация максимальна:

$$\varepsilon_* := \varepsilon(t_* - 0; \bar{\sigma}, t_*) = cF(\bar{\sigma}) + \gamma V(\bar{\sigma})t_* = cF(\bar{\sigma}) + p(\bar{\sigma}, t_*). \quad (6)$$

Из (6) следует, что для любых $\bar{\sigma}, t_*$ разность $\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) - p(\bar{\sigma}, t_*)$ не зависит от t_* и МФ V :

$$\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) - p(\bar{\sigma}, t_*) = cF(\bar{\sigma}). \quad (7)$$

Первое свойство — еще один качественный индикатор применимости ОС (1). Его можно записать (и проверять по испытаниям (3) с фиксированным $\bar{\sigma}$ и различными t_*) в формах:

$$\begin{aligned} \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t''_*) - \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t'_*) &= p(\bar{\sigma}, t''_*) - p(\bar{\sigma}, t'_*); \\ [\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t''_*) - p(\bar{\sigma}, t''_*)] / [\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t'_*) - p(\bar{\sigma}, t'_*)] &\equiv 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Формулы (8) связывают только измеряемые характерные величины деформации и не зависят от МФ. Отсутствие МФ V в формуле (7) позволяет напрямую определить МФ F отдельно от V по испытаниям с разными напряжениями $\bar{\sigma}$. Кроме того, из (7) следует, что

$$\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t''_*) - \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t'_*) = \gamma V(\bar{\sigma})(t''_* - t'_*). \quad (9)$$

Следовательно, значение МФ $\gamma V(\bar{\sigma})$ можно определить как по измеренным значениям остаточной деформации (5), так и по разности максимальных деформаций (6) в испытаниях с одинаковым $\bar{\sigma}$ и разными t_* .

Таким образом, прежде чем применять ОС (1) для моделирования поведения некоторого материала, следует провести несколько испытаний на нагружение вида (3) с разными t_* и $\bar{\sigma}$, а также проверить наличие у КОП материала таких же качественных свойств, что и у теоретических КОП (4) для любых $\bar{\sigma}, t_* > 0$ (индикаторов применимости ОС (1)):

- 1) постоянство скорости ползучести $r(\bar{\sigma}) = [\varepsilon(t''; \bar{\sigma}, t_*) - \varepsilon(t'; \bar{\sigma}, t_*)] / (t'' - t')$ для всех $t', t'' < t_*$;
- 2) постоянство деформации $\varepsilon(t; \bar{\sigma}, t_*) = p(\bar{\sigma}, t_*)$ при $t \geq t_*$;
- 3) пропорциональность остаточной деформации p длительности нагружения t_* : $p(\bar{\sigma}, t_*) / t_*$ не зависит от t_* , или $p'' / p' = t'' / t'$ в любых двух испытаниях с $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2$ и разными $t'_*, t''_* > 0$;
- 4) справедливость равенств (8) при любых $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}$, $t'_*, t''_* > 0$;
- 5) пропорциональность разности максимальных деформаций (9) в испытаниях с фиксированным $\bar{\sigma}$ и различными t_* разности длительностей нагружения $t''_* - t'_*$, т. е. выполнение пропорций $(\varepsilon''_* - \varepsilon'_*) / (\varepsilon''_* - \varepsilon'_*) = (t''_* - t'_*) / (t''_* - t'_*)$ при любых $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}$, $t'_*, t''_*, t'''_* > 0$.

Когда речь идет о проверке постоянства функции измеряемых величин (ее независимости от аргумента), имеется в виду приближенное равенство в пределах допустимой погрешности. Если одно из перечисленных свойств явно отсутствует у КОП материала, то применять ОС (1) для его моделирования нельзя. Если все проверки дают положительный результат, то можно переходить к идентификации.

Проведенный анализ позволяет предложить несколько способов прямого определения значений двух материальных функций $\gamma V(x)$ и $cF(x)$ в любом заданном наборе точек $s_k > \sigma_+ \geq 0$ из рабочего диапазона напряжений (например, $s_k = \sigma_+ + kh$) по серии КОП материала при растяжении и сжатии (при фиксированной температуре).

По формуле (7) можно найти массив значений функции $cF(s_k)$, если измерить максимальную деформацию $\varepsilon_*(s_k, t_*)$ и остаточную деформацию $p_k = p(s_k, t_{*k})$ в серии испытаний материала с разными уровнями напряжения $\bar{\sigma} = s_k$:

$$cF(\bar{\sigma}) = \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t_*) - p(\bar{\sigma}, t_*). \quad (10)$$

Найти $\gamma V(s_k)$ можно тремя способами. По измеренной остаточной деформации из (5):

$$\gamma V(\bar{\sigma}) = p(\bar{\sigma}, t_*) / t_*; \quad \bar{\sigma} = s_k. \quad (11)$$

Из формулы для скорости ползучести

$$\gamma V(\bar{\sigma}) = [\varepsilon(t''; \bar{\sigma}, t_*) - \varepsilon(t'; \bar{\sigma}, t_*)] / (t'' - t'), \quad t', t'' \leq t_*, \quad (12)$$

где деформации в любые выбранные моменты времени $t', t'' \leq t_*$ измеряются по КП материала для заданного уровня напряжения $\bar{\sigma}$. Третий способ следует из формулы (9):

$$\gamma V(\bar{\sigma}) = [\varepsilon_*(\bar{\sigma}, t''_*) - \varepsilon_*(\bar{\sigma}, t'_*)] / (t''_* - t'_*). \quad (13)$$

Здесь значения максимальной деформации в моменты времени t'_*, t''_* измеряются по двум КОП материала для заданного уровня напряжения $\bar{\sigma}$ и двух разных значений t_* .

Таким образом, для полного определения значений МФ в K узловых точках s_k по формулам (10), (11) необходимо провести K испытаний материала вида (3) с разными $\bar{\sigma} = s_k$ и t_{*k} , измеряя в каждом всего два характерных значения деформации $p_k = p(s_k, t_{*k})$ и $\varepsilon_{*k} = \varepsilon_*(s_k, t_{*k})$. Поскольку левые части (10), (11) не зависят от t_* , можно проводить испытания как при одинаковых значениях t_{*k} , так и при разных. Если вместо (11) использовать формулу (12), то в указанных K испытаниях с $\bar{\sigma} = s_k$ необходимо измерить только два значения деформации $\varepsilon(t'; s_k, t_{*k})$ и $\varepsilon(t''; s_k, t_{*k})$, $t', t'' \leq t_{*k}$, на участке установившейся ползучести. Если использовать формулу (13), то число испытаний увеличится в 2 раза, но появится возможность тщательно проверить соблюдение индикаторов применимости 3–5.

Большое число испытаний ограничивает эффективность методики, но следует учесть, что каждый эксперимент с прямоугольным импульсом нагрузки может иметь малую длительность. Существенно, что значения МФ определяются по отдельности, последовательно и из той же серии испытаний (хотя более длинной), по которой проверяются индикаторы применимости ОС (1), а не из испытаний другого типа. Далее будет показано, как можно значительно уменьшить число испытаний и используемых образцов за счет усложнения программы нагружения, увеличения объема регистрируемых данных и развития методики их обработки.

Кривые ползучести определяющего соотношения (1) при произвольных ступенчатых нагружениях. Рассмотрим программу нагружения из N ступеней:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i [h(t - t_{i-1}) - h(t - t_i)] + \sigma_N h(t - t_{N-1}) \quad (14)$$

с произвольными $\sigma_i \in (\omega_-, \omega_+)$, $t_i > 0$ ($t_0 = 0$, $t_i > t_{i-1}$, $\sigma(t) = \sigma_N$ при $t > t_{N-1}$). Поскольку оператор Π , задающий ОС (1) в виде $\varepsilon = \Pi\sigma$, инвариантен относительно сдвигов по времени и аддитивен на процессах с дизъюнктными носителями [19–21], он переводит (14) в сумму откликов на каждую ступеньку σ_i , получающихся из КОП (4) сдвигами по времени на t_{i-1} :

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{N-1} S(t - t_{i-1}; t_i - t_{i-1}, \sigma_i) + [\gamma V(\sigma_N)(t - t_{N-1}) + cF(\sigma_N)]h(t - t_{N-1}),$$

$S(t; t_*, \bar{\sigma}) := [\gamma V(\bar{\sigma})t + cF(\bar{\sigma})][h(t) - h(t - t_*)] + \gamma V(\bar{\sigma})t_*h(t - t_*)$ — отклик (4) на прямоугольный импульс напряжения $\bar{\sigma}$ с носителем $[0; t_*]$. Поскольку все слагаемые кусочно-линейны, $\varepsilon(t)$ кусочно-линейна и на интервалах $(t_{i-1}; t_i)$ имеет вид

$$\varepsilon(t) = \gamma V(\sigma_i)(t - t_{i-1}) + cF(\sigma_i) + p_{i-1}, \quad t \in (t_{i-1}; t_i), \quad (15)$$

$$p_{i-1} := \gamma \sum_{m=1}^{i-1} V(\sigma_m)(t_m - t_{m-1}), \quad i = 1, \dots, N, \quad (16)$$

где $\gamma := 1/\eta$; $c := 1/E$; $p_0 := 0$. Если $\sigma_i = 0$, то из (15) и ограничений $F(0) = 0$ и $V(0) = 0$ следует, что $\varepsilon(t) = p_{i-1}$, т. е. деформация постоянна при $t \in (t_{i-1}; t_i)$ и

p_{i-1} приобретает смысл остаточной деформации. В общем случае накопленная пластическая деформация (16) выражает влияние предыдущих $(i-1)$ ступеней нагружения (14) и $p_{N-1} \neq 0$.

Скачки деформации и ее скорости в точках $t = t_i$, порожденные скачками напряжения $\sigma_{i+1} - \sigma_i$, равны $cF(\sigma_{i+1}) - cF(\sigma_i)$ и $\gamma V(\sigma_{i+1}) - \gamma V(\sigma_i)$, т. е. зависят лишь от σ_i и σ_{i+1} , но не зависят от предыстории (от всех t_k и σ_k при $k < i$) и даже от t_i . Модуль скачков $\varepsilon(t)$ и $\dot{\varepsilon}(t)$ не изменяется при смене знака скачка нагрузки $\sigma_{i+1} - \sigma_i$. Это свойство можно использовать как индикатор (не)применимости ОС (1): например, в испытаниях сплавов алюминия зафиксировано [40], что модуль скачка деформации вниз в момент сброса нагрузки меньше, чем скачок вверх в момент догрузки. Соотношение (1) с произвольными МФ не способно моделировать эффект влияния ползучести (т. е. предыстории нагружения и накопленной деформации) на скачки упругой деформации, порожденные «мгновенным» изменением напряжения в некоторый момент. Этот эффект зарегистрирован в испытаниях сплавов алюминия, костной ткани, некоторых композитов [40–44]; в работах [43, 44] он называется дрейфом мгновенно-упругой деформации вследствие ползучести.

При перестановке ступеней нагружения (например, первой и второй) величины p_i с большими номерами не меняются, потому на интервалах $t \in (t_{i-1}; t_i)$ с $i \geq 3$ КП (15) не изменяется, т. е. ОС (1) обладает свойством коммутативности при ступенчатых нагружениях [2, с. 217] (в отличие от линейного ОС вязкоупругости [45] и нелинейного ОС Работнова [17]).

Согласно (15), (16), МФ F не влияет на скорость ползучести, ее скачки, пластические деформации p_{i-1} и скорость рэтчетинга [19], а МФ V — на мгновенную деформацию $\varepsilon(0+) = cF(\sigma_1)$ и значения скачков деформации. Это позволяет определить МФ $\gamma V(x)$ и $cF(x)$ по отдельности по КП материала при ступенчатом нагружении (14).

Идентификация определяющего соотношения (1) по одной кривой ползучести при ступенчатом нагружении. Значения МФ $\gamma V(s_k)$ можно последовательно найти по одной КП материала при ступенчатом нагружении (14) с нарастающими уровнями напряжения $\sigma_k = s_k$ при $t \in (t_{k-1}; t_k)$, $k = 1, \dots, K$, и $\sigma_{K+1} = 0$ (полагаем, что $s_k > \sigma_+ \geq 0$, где σ_+ — предел упругости при растяжении, поэтому $V(s_k) > 0$; возможна одинаковая длительность ступеней: $t_i = it_1$). Теоретическая КП имеет вид (15), и определить значения МФ $\gamma V(s_k)$, $k = 1, \dots, K$, можно по формуле для скорости ползучести на каждом интервале $(t_{k-1}; t_k)$:

$$\gamma V(s_k) = r_k = [\varepsilon(t'') - \varepsilon(t')] / (t'' - t'), \quad t', t'' \in (t_{k-1}; t_k), \quad (17)$$

где $\varepsilon(t')$, $\varepsilon(t'')$ — измеренные деформации в выбранные моменты времени t' и t'' .

Значения $cF(s_k)$ можно найти из выражения $\hat{\varepsilon}(t_k) = cF(\sigma_k) - cF(\sigma_{k-1})$ для скачков деформации в точках t_k , $k = 1, \dots, K$, но достоверно измерить скачки в

испытаниях невозможно. Поэтому выведем формулы для измеряемых деформаций, не содержащие МФ V . Из (15), (16) следует, что для всех ступенчатых программ нагружения (14)

$$\varepsilon(t_i - 0) - p_i = \gamma V(\sigma_i)(t_i - t_{i-1}) + cF(\sigma_i) + p_{i-1} - p_i = cF(\sigma_i). \quad (18)$$

Здесь $\varepsilon_i := \varepsilon(t_i - 0)$ — максимальная деформация на интервале $(t_{i-1}; t_i)$, и ее удобно регистрировать. Следовательно, можно определить значения $cF(s_k)$ по формуле

$$cF(s_k) = \varepsilon_k - p_k, \quad (19)$$

где p_k вычисляется по (16) с уже найденными $\gamma V(s_i)$, $i = 1, \dots, k$. Точность определения F зависит от длительности стадий догрузки, так как p_k не измеряется в испытании (см. ниже), а вычисляется как сумма (16) по $\gamma V(s_i)$, $i \leq k$ (и с ростом k погрешность накапливается), а формулы (16) и (19) опираются на допущение о мгновенности догрузки в точках t_i .

Еще один способ определения МФ V и F более надежный, хотя и более трудоемкий, опирается на более длительное испытание вида (14) с большим числом ступеней (и поэтому более информативный). Значения МФ $\gamma V(s_k)$ можно найти по одной КП материала при нагружении (14) с $\sigma_{2k-1} = s_k$ при $t \in (t_{2k-2}; t_{2k-1})$, $k = 1, \dots, K$, и $\sigma_{2k} = 0$ при $t \in (t_{2k-1}; t_{2k})$, т. е. с нарастающими напряжениями σ_{2k-1} и полной разгрузкой между ними. Для такой программы нагружения КП (15), порождаемая ОС (1), состоит из чередующихся участков установившейся ползучести со скоростями $r_k = \gamma V(s_k)$ и участков постоянной деформации $\varepsilon(t) = p_{2k-1}$, $t \in (t_{2k-1}; t_{2k})$, а величины (16) с $i = 2k$ приобретают смысл остаточной деформации после $2k-1$ ступеней нагружения (и их можно измерить в испытаниях):

$$\begin{aligned} p_{2k-1} &= \gamma \sum_{m=1}^{2k-1} V(\sigma_m)(t_m - t_{m-1}) = \\ &= \gamma \sum_{l=1}^k V(s_l)(t_{2l-1} - t_{2l-2}) = \gamma V(s_k)(t_{2k-1} - t_{2k-2}) + p_{2(k-1)-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Теоретическая КП имеет вид (15), и определить значения МФ $\gamma V(s_k)$, $k = 1, \dots, K$, можно двумя способами. Первый способ — по формуле для скорости ползучести на интервале $t \in (t_{2k-2}; t_{2k-1})$:

$$\gamma V(s_k) = r_k = [\varepsilon(t'') - \varepsilon(t')] / (t'' - t') = (\varepsilon_{2k-1} - \varepsilon_{2k-2}) / (t_{2k-1} - t_{2k-2}), \quad (21)$$

где $t', t'' \in (t_{2k-2}; t_{2k-1})$, $\varepsilon(t')$, $\varepsilon(t'')$ — измеренные деформации в моменты времени t' и t'' ; $\varepsilon_{2k-1} := \varepsilon(t_{2k-1} - 0)$, $\varepsilon_{2k-2} := \varepsilon(t_{2k-2} + 0)$ — максимальная и минимальная деформации на участке установившейся ползучести $(t_{2k-2}; t_{2k-1})$. Второй способ — из формулы (20) для остаточной деформации после $2k-1$ ступеней нагружения (по измеренным значениям p_{2k-1} и $p_{2(k-1)-1}$):

$$\gamma V(s_k) = (p_{2k-1} - p_{2(k-1)-1}) / (t_{2k-1} - t_{2k-2}). \quad (22)$$

Для определения F используем формулу (18) при $i = 2k - 1$:

$$cF(s_k) = \varepsilon(t_{2k-1} - 0) - p_{2k-1} = \varepsilon_{2k-1} - \varepsilon(t), \quad t \in (t_{2k-1}; t_{2k}), \quad (23)$$

т. е. каждое значение МФ $cF(s_k)$ непосредственно вычисляется по двум измеренным деформациям ε_{2k-1} и p_{2k-1} , результат не зависит от точности определения $\gamma V(s_i)$, $i \leq k$.

Прежде чем идентифицировать и применять ОС (1) для моделирования, следует проверить наличие у кривых ползучести материала для рассматриваемых программ ступенчатого нагружения следующих свойств (индикаторов применимости):

1) постоянство скорости ползучести (21) на каждом участке интервала $(t_{2k-2}; t_{2k-1})$ с ненулевым напряжением, т. е. ее независимость от выбора пары точек $t', t'' \in (t_{2k-2}; t_{2k-1})$;

2) постоянство деформации на интервалах $(t_{2k-1}; t_{2k})$ с нулевым напряжением;

3) пропорциональность приращения остаточной деформации на k -м шаге нагружения (на интервале $(t_{2k-2}; t_{2k-1})$) длительности ступени нагружения $t_{*k} := t_{2k-1} - t_{2k-2}$ на этом шаге: $p_{2k-1} - p_{2(k-1)-1} = \gamma V(s_k)(t_{2k-1} - t_{2k-2})$, $k = 1, \dots, K$, т. е. независимость от t_{*k} отношения $(p_{2k-1} - p_{2(k-1)-1}) / t_{*k}$ в испытаниях с одинаковым напряжением $\sigma_{2k-1} = s_k$, но разными значениями t_{*k} ;

4) в испытаниях с одинаковым напряжением $\sigma_{2k-1} = s_k$, но разными длительностями ступени нагружения t_{*k} , разность максимальной деформации $\varepsilon_{2k-1} = \varepsilon(t_{2k-1} - 0)$ на участке установившейся ползучести $(t_{2k-2}; t_{2k-1})$ и остаточной деформации (20) на интервале $(t_{2k-1}; t_{2k})$ не зависит от t_{*k} : $\varepsilon_{2k-1} - p_{2k-1} = cF(\sigma_i)$, или $\varepsilon'_{2k-1} - \varepsilon''_{2k-1} = p'_{2k-1} - p''_{2k-1}$ для любых $t'_{*k} \neq t''_{*k}$;

5) при перестановке любых двух ступеней нагрузки регистрируемая деформация $\varepsilon(t)$ (как и теоретическая КП (15)) не меняется при $t > t_{\max}$, где t_{\max} — максимальное время окончания переставляемых ступеней нагрузки.

Можно еще проверять равенство скачков модуля деформации при мгновенных нагрузке и разгрузке, но надежная регистрация скачков по кривым испытаний невозможна. Если указанные признаки явно отсутствуют у КП материала, то применять ОС (1) для его моделирования нельзя. Если присутствуют — можно переходить к идентификации.

О возможных вариантах методик идентификации и их развития. Вторая методика идентификации более надежна, чем первая (хотя и более трудоемкая): испытание на ступенчатое нагружение с полными разгрузками является более информативным, позволяет проверить качество моделирования большего количества эффектов, система индикаторов применимости ОС (1) значительно богаче вследствие возможности регистрировать остаточные деформации p_{2k-1}

и их накопление, а прямое измерение p_{2k-1} позволяет перекрыть источник накопления погрешности, указанный в первой методике.

По сравнению с методикой идентификации по серии КОП для разных уровней напряжения описанные способы требуют значительно меньшего числа испытаний (всего одно) и образцов. Конечно, можно разбить одно (длительное) испытание на два или три автономных, распределив между ними заданные уровни напряжения s_k : это полезно как для удобства обслуживания эксперимента, так и для минимизации влияния разного рода «сбоев» и флуктуаций условий испытания на результаты последующих измерений. Методика определения МФ ничуть не усложнится, формулы (18)–(23) сохранятся.

Формулы (4)–(6), (18)–(23) получены в предположении мгновенности нагрузки и разгрузки (скачка напряжения), а деформации зависят от длительностей стадий нагрузки и разгрузки. Поэтому лучше не использовать формулы (5) и (22) для определения МФ V без коррекции, а находить V из формулы для скорости ползучести (12) или формулы (9) в случае идентификации по КОП или (17) и (21) в случае многоступенчатого нагружения: скорость ползучести и разности деформаций в (9) и (17) не зависят от длительности стадий нагружения и разгрузки [25, 26], поэтому в них нет источника систематической погрешности, порождаемой немгновенностью нагружения. Разности деформаций (7), (18), (19), (23) зависят лишь от стадии последней разгрузки (от $\sigma_{2k-1} = s_k$ до $\sigma_{2k} = 0$) и не зависят от всех предыдущих стадий нагрузки и разгрузки, так как они вносят одинаковый вклад в ε_{2k-1} и p_{2k-1} . В связи с этим использовать их для определения МФ F следует с осторожностью либо скорректировать слагаемым, учитывающим длительность последней разгрузки.

При описании алгоритмов идентификации рассмотрен случай $s_k > \sigma_+ \geq 0$, где σ_+ — предел упругости и порог ползучести материала при растяжении, в частности, при $\sigma_+ = 0$ значения МФ можно определить при любых $s_k > 0$. Если испытания материала на ползучесть и деформирование с постоянными скоростями показывают, что целесообразнее задать $\sigma_+ > 0$ (релаксация, ползучесть отсутствуют при $\sigma < \sigma_+$, кривая деформирования не зависит от скорости нагружения или деформации при достаточно малых ε и после разгрузки нет остаточной деформации), то следует принять $V(x) \equiv 0$ при $x \in [0; \sigma_+]$, а значения $cF(x)$ на этом отрезке определить по диаграмме (упругого) деформирования материала (диаграмма, порождаемая ОС (1), задается при $\sigma < \sigma_+$ уравнением $\varepsilon = cF(\sigma)$ [23, 27]).

Разработанные методики позволяют найти МФ $\gamma V(x)$ и $cF(x)$ при $x > 0$ по испытаниям на растяжение. Если поведение материала при сжатии (его кривых ползучести, релаксации и деформирования с постоянной скоростью) не отличается от поведения при растяжении, то МФ следует продолжить в область $x > 0$, полагая их нечетными. Если поведение материала при сжатии отличается, то для определения МФ на $(\omega_-; 0)$ необходимо применить одну из описанных методик идентификации, взяв за основу данные испытаний с $s_k < 0$. Чтобы найти

η и E отдельно от V и F , необходимо наложить на V и F некоторое нормировочное условие, например $V(1) = 1$ и $F(1) = 1$.

Разработаны и другие методики идентификации и верификации ОС (1), кроме описанных в настоящей работе: по КП с начальной стадией нагружения [26], по кривой нагрузки–разгрузки материала [27], по серии двойных КОП (т. е. откликов на программу нагружения из двух прямоугольных импульсов) с разными уровнями напряжения. Рациональный выбор методики зависит от того, есть ли возможность планировать эксперименты по идентификации и верификации ОС (1) (в рамках доступных ресурсов времени, оборудования, изготовления образцов) или приходится использовать уже имеющиеся данные испытаний некоторого материала (возможно, весьма ограниченные).

Заключение. Продолжено исследование физически нелинейного ОС (1) для вязкоупругопластичных материалов в целях выявления комплекса моделируемых им реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния МФ и феноменологических ограничений на них, способов идентификации и настройки. На основе анализа общих свойств КП, порождаемых определяющим ОС (1) с произвольными МФ при любых ступенчатых нагружениях (14), выявлено несколько систем необходимых признаков применимости ОС (1), которые удобно проверять по данным испытаний материалов и использовать как индикаторы (не)применимости ОС (1) для моделирования этих материалов, разработаны три общие методики идентификации ОС (1). В качестве системы базовых испытаний материала для проверки применимости ОС и его идентификации предложено использовать одну из следующих: 1) серию КОП материала с различными уровнями и длительностями нагружения; 2) одно испытание на ползучесть при ступенчатом нагружении (14) с нарастающими уровнями напряжения; 3) одно испытание на ползучесть при ступенчатом нагружении (14) с разными уровнями напряжения и полной разгрузкой (отдыхом) между ними. В каждом случае указаны минимальные наборы регистрируемых величин и выведены явные формулы для прямого (независимого) определения массивов значений обеих МФ ОС (1) в любых заданных точках из рабочего диапазона напряжения, предотвращающие накопление погрешности. Разработанные методики идентификации не требуют задания конкретных аппроксимаций, минимизации среднеквадратичного отклонения для определения их параметров, численного решения системы нелинейных уравнений (ее решение построено аналитически) и использования рекуррентных формул и итерационных методов. Рассмотрены разные варианты методик, их достоинства и недостатки, возможные модификации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кеннеди А.Дж. Ползучесть и усталость в металлах. М.: Металлургия, 1965. 312 с.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.

4. Шестериков С.А., Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. Итоги науки и техн. Сер. Мех. деформируем. тверд. тела. Т. 13. М.: АН СССР. ВИНТИ, 1980. С. 3–104.
5. Малинин Н.Н. Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 221 с.
6. Гохфельд Д.А., Садаков О.С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторных нагружениях. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
7. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: НГАСУ, 1997. 278 с.
8. Betten J. Creep mechanics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2008. 367 p.
9. Lakes R.S. Viscoelastic materials. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.
10. Радченко В.П., Кичаев П.Е. Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов. Самара: СамГТУ, 2011. 157 с.
11. Bergstrom J.S. Mechanics of solid polymers. Theory and computational modeling. Elsevier, William Andrew, 2015. 520 p.
12. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
13. Fatemi A., Yang L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials // Int. J. Fatigue. 1998. Vol. 20. Iss. 1. P. 9–34. DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00081-9
14. Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide: experimental study and constitutive equations / A. Launay, M.H. Maitournam, Y. Marco, I. Raoult, F. Szymtka // Int. J. Plasticity. 2011. Vol. 27. Iss. 8. P. 1267–1293. DOI: 10.1016/j.ijplas.2011.02.005
15. A modified viscoplastic model to predict the permanent deformation of asphaltic materials under cyclic-compression loading at high temperatures / M.K. Darabi, R.K.A. Al-Rub, E.A. Masad, C.-W. Huang, D.N. Little // Int. J. Plasticity. 2012. Vol. 35. P. 100–134. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.03.001
16. О законе накопления поврежденности и критерии разрушения в высоконаполненных полимерных материалах / Д.Л. Быков, А.В. Казаков, Д.Н. Коновалов и др. // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 76–97.
17. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатых нагружениях, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 3. С. 93–123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123
18. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 2. С. 326–361. DOI: 10.14498/vsgtu1533
19. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и условия накопления пластической деформации // Машиностроение и инженерное образование. 2016. № 3. С. 55–68.
20. Хохлов А.В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2016. № 6. С. 36–41.

21. Хохлов А.В. Кривые длительной прочности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и правило суммирования поврежденности при ступенчатых нагружениях // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 3. С. 524–543. DOI: 10.14498/vsgtu1512
22. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: общие свойства семейства кривых релаксации и ограничения на материальные функции // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 6. С. 31–55. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-31-55
23. Хохлов А.В. Свойства семейства кривых нагружения с постоянной скоростью, порождаемых нелинейной моделью вязкоупругопластичности типа Максвелла // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 1. С. 57–71.
24. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 1. С. 160–179. DOI: 10.14498/vsgtu1524
25. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: скорость накопления пластической деформации при циклических нагружениях // ДиРМ. 2017. № 7. С. 7–19.
26. Хохлов А.В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по кривым ползучести с начальной стадией нагружения. Ч. 2. Методики // ДиРМ. 2017. № 10. С. 2–9.
27. Хохлов А.В. Свойства диаграмм нагружения и разгрузки, порождаемых нелинейным определяющим соотношением типа Максвелла для реономных материалов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22. № 2. С. 293–324. DOI: 10.14498/vsgtu1573
28. Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling // Mater. Trans. 2014. Vol. 55. Iss. 2. P. 275–284. DOI: 10.2320/matertrans.M2013370
29. Петухов Д.С., Келлер И.Э. Двойственные задачи плоских ползущих течений степенной несжимаемой среды // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т. 20. № 3. С. 496–507. DOI: 10.14498/vsgtu1508
30. Кайбышев О.А. Сверхпластичность промышленных сплавов. М.: Металлургия, 1984. 264 с.
31. Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. Superplasticity in metals and ceramics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 287 p.
32. Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. Superplastic flow: phenomenology and mechanics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2001. 363 p.
33. Fundamentals and engineering of severe plastic deformation / V.M. Segal, I.J. Beyerlein, C.N. Tome, V.N. Chuvil'deev, V.I. Kopylov. New York: Nova Science Publ. Inc., 2010. 542 p.
34. Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests // Mech. Time-Depend. Mater. 2007. Vol. 11. Iss. 2. P. 159–172. DOI: 10.1007/s11043-007-9033-6
35. Megahed M., Ponter A.R.S., Morrison C.J. An experimental and theoretical investigation into the creep properties of a simple structure of 316 stainless steel // Int. J. Mech. Sci. 1984. Vol. 26. Iss. 3. P. 149–164. DOI: 10.1016/0020-7403(84)90050-X

36. Еникеев Ф.У. Экспериментальная оценка скоростной чувствительности сверхпластичного материала с сильно неоднородным напряженно-деформированным состоянием // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2007. Т. 73. № 10. С. 44–50.
37. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Математическая модель ползучести микронеоднородного нелинейно-упругого материала // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 3. С. 478–483.
38. Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep analysis with a stress range dependent constitutive model // Arch. Appl. Mech. 2009. Vol. 79. Iss. 6-7. P. 619–630.
DOI: 10.1007/s00419-008-0287-5
39. Lu L.Y., Lin G.L., Shih M.H. An experimental study on a generalized Maxwell model for non-linear viscoelastic dampers used in seismic isolation // Eng. Struct. 2012. Vol. 34. P. 111–123.
DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.09.012
40. Dandrea J., Lakes R.S. Creep and creep recovery of cast aluminum alloys // Mech. Time-Depend. Mater. 2009. Vol. 13. P. 303–315. DOI: 10.1007/s11043-009-9089-6
41. Мелнис А.Э., Лайзан Я.Б. Нелинейная ползучесть компактной костной ткани человека при растяжении // Механика полимеров. 1978. Т. 14. № 1. С. 97–100.
42. Радченко В.П., Самарин Ю.П. Влияние ползучести на величину упругой деформации слоистого композита // Механика композитных материалов. 1983. Т. 19. № 2. С. 231–237.
43. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. О дрейфе упругой деформации для нелинейно-упругих материалов вследствие ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. Т. 43. С. 99–106. DOI: 10.14498/vsgtu458
44. Радченко В.П., Андреева Е.А. О дрейфе и эффекте памяти нелинейно-упругой деформации вследствие ползучести для микронеоднородных материалов в условиях одноосного напряженного состояния // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. Т. 19. № 2. С. 72–77. DOI: 10.14498/vsgtu712
45. Хохлов А.В. Асимптотическая коммутативность кривых ползучести при ступенчатом нагружении в линейной теории наследственности // Машиностроение и инженерное образование. 2016. № 1. С. 70–82.

Хохлов Андрей Владимирович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова (Российская Федерация, 119192, Москва, Мичуринский пр-т, д. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Хохлов А.В. Индикаторы применимости и методики идентификации нелинейной модели типа Максвелла для реономных материалов по кривым ползучести при ступенчатых нагружениях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 6. С. 92–112. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-92-112

APPLICABILITY INDICATORS AND IDENTIFICATION TECHNIQUES FOR A NONLINEAR MAXWELL-TYPE ELASTO-VISCOPLASTIC MODEL USING MULTI-STEP CREEP CURVES

A.V. Khokhlov

andrey-khokhlov@ya.ru

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Abstract

A physically non-linear Maxwell-type constitutive relation with two material functions for non-aging rheonomous materials is studied analytically in order to elucidate the set of basic rheological phenomena that it simulates, to enclose its application field, to obtain necessary phenomenological restrictions which should be imposed on its material functions and to develop identification techniques. General properties and characteristic features of creep curves produced by the relation with arbitrary material functions under arbitrary multi-step uni-axial loadings are analyzed. The analysis reveals several attributes of the theoretic creep curves that can be employed as the relation feasibility indicators which are convenient for check using test data of a material. Three effective general identification techniques are developed. The first one is based on a set of creep and recovery tests at various stress levels and implies measurement of two strain magnitudes in each test. The second one is based on a single creep test under multi-step loading with growing stress levels. The third one is based on a single creep test under multi-step loading with growing stress levels alternated with unloading to zero stress and rest periods. The explicit expressions are derived in each case to determine the material functions values at arbitrarily chosen points in stress domain via minimal number of measured strain magnitudes. The identification techniques proposed herein enable separate and direct evaluation of the material functions values at a chosen points via test data escaping error accumulation. The techniques don't require any prescribed form of approximation and any kind of least square deviation minimization to determine its parameters; they don't require to solve a set of non-linear equations (its solution we have constructed analytically) and to involve iterative procedures or recurrent formulas. A number of the identification technique versions are considered and their advantages and shortcomings are discussed

Keywords

Viscoplasticity, viscoelasticity, physical non-linearity, material functions, creep rate, plastic strain, applicability indicators, unloading, creep recovery curves

Received 20.11.2017

© BMSTU, 2018

The work was carried out with the state financial support of the RFBR (grant no. 17-08-01146_a)

REFERENCES

- [1] Kennedy A.J. Processes of creep and fatigue in metals. Edinburgh, London, Olyver and Boyd, 1962. 480 p.
- [2] Rabotnov Yu.N. Polzuchest' elementov konstruksiy [Creep problems in structural members]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 752 p.
- [3] Bugakov I.I. Polzuchest' polimernykh materialov [Creep of polymers]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 287 p.
- [4] Shesterikov S.A., Lokoshchenko A.M. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov. Itogi nauki i tekhn. Ser. Mekh. deformiruem. tverd. tela. T. 13 [Creep and long-term strength of metals. In: Results of science and technology. Ser. Mechanics of deformable solid body. Vol. 13]. Moscow, AN SSSR. VINITI Publ., 1980. Pp. 3–104.
- [5] Malinin N.N. Raschety na polzuchest' elementov mashinostroitel'nykh konstruksiy [Creep calculation of machine-building construction parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 221 p.
- [6] Gokhfel'd D.A., Sadakov O.S. Plastichnost' i polzuchest' elementov konstruksiy pri povtornykh nagruzheniyakh [Plasticity and creep of construction elements under repeated loading]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 256 p.
- [7] Nikitenko A.F. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskih materialov [Plasticity and creep in structural elements under repeated loading]. Novosibirsk, NGASU Publ., 1997. 278 p.
- [8] Betten J. Creep mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008. 367 p.
- [9] Lakes R.S. Viscoelastic materials. Cambridge University Press., 2009. 461 p.
- [10] Radchenko V.P., Kichaev P.E. Energeticheskaya kontseptsiya polzuchesti i vibropolzuchesti metallov [Energy concept of creep and vibrocreep]. Samara, SamGTU Publ., 2011. 157 p.
- [11] Bergstrom J.S. Mechanics of solid polymers. Theory and computational modeling. Elsevier, William Andrew Publ., 2015. 520 p.
- [12] Lokoshchenko A.M. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov [Creep and long-term strength of metals]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2016. 504 p.
- [13] Fatemi A., Yang L. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials. *Int. J. Fatigue*, 1998, vol. 20, iss. 1, pp. 9–34. DOI: 10.1016/S0142-1123(97)00081-9
- [14] Launay A., Maitournam M.H., Marco Y., Raoult I., Szymyka F. Cyclic behaviour of short glass fibre reinforced polyamide: experimental study and constitutive equations. *Int. J. Plasticity*, 2011, vol. 27, iss. 8, pp. 1267–1293. DOI: 10.1016/j.ijplas.2011.02.005
- [15] Darabi M.K., Al-Rub R.K.A., Masad E.A., Huang C.-W., Little D.N. A modified viscoplastic model to predict the permanent deformation of asphaltic materials under cyclic-compression loading at high temperatures. *Int. J. Plasticity*, 2012, vol. 35, pp. 100–134. DOI: 10.1016/j.ijplas.2012.03.001
- [16] Bykov D.L., Kazakov A.V., Peleshko V.A., Kononov D.N., Mel'nikov V.P., Milyokhin Y.M., Sadovnichii D.N. Law of damage accumulation and fracture criteria in highly filled polymer materials. *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, iss. 5, pp. 543–560. DOI: 10.3103/S0025654414050069
- [17] Khokhlov A.V. Analysis of creep curves general properties under step loading generated by the Rabotnov nonlinear relation for viscoelastic plastic materials. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 3, pp. 93–123 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123
- [18] Khokhlov A.V. Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings. *Vestn. Sam. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-mat. nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 2, pp. 326–361 (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1533

- [19] Khokhlov A.V. The nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model: properties of creep curves at piecewise-constant stress and criterion for plastic strain accumulation. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2016, no. 3, pp. 55–68 (in Russ.).
- [20] Khokhlov A.V. Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2016, vol. 71, no. 6, pp. 132–136.
DOI: 10.3103/S0027133016060029
- [21] Khokhlov A.V. Long-term strength curves generated by the nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials and the linear damage rule under step loading. *Vestn. Sam. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-mat. nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 524–543 (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1512
- [22] Khokhlov A.V. Nonlinear Maxwell-type elastoviscoplastic model: general properties of stress relaxation curves and restrictions on the material functions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 6, pp. 31–55 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-31-55
- [23] Khokhlov A.V. Properties of stress-strain curves generated by the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model at constant stress rates. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2017, no. 1, pp. 57–71 (in Russ.).
- [24] Khokhlov A.V. The nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials: simulation of temperature influence on creep, relaxation and strain-stress curves. *Vestn. Sam. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-mat. nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 160–179 (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1524
- [25] Khokhlov A.V. Nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model: rate of plastic strain accumulation under cyclic loadings. *Deformatsiya i razrushenie materialov*, 2017, no. 7, pp. 7–19 (in Russ.).
- [26] Khokhlov A.V. I Identification methods of Maxwell-type nonlinear viscoelastoplastic model, based on creep curves with initial ramp loading. Part II. Methods. *Deformatsiya i razrushenie materialov*, 2017, no. 10, pp. 2–9 (in Russ.).
- [27] Khokhlov A.V. Properties of stress-strain curves generated by the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model under loading and unloading at constant stress rates. *Vestn. Sam. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-mat. nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2018, vol. 22, no. 2, pp. 293–324 (in Russ.).
- [28] Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling. *Mater. Trans.*, 2014, vol. 55, iss. 2, pp. 275–284. DOI: 10.2320/matertrans.M2013370
- [29] Petukhov D.S., Keller I.E. Dual plane problems for creeping flow of power-law incompressible medium. *Vestn. Sam. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-mat. nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2016, vol. 20, no. 3, pp. 496–507 (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1508
- [30] Kaybyshev O.A. *Sverkhplastichnost' promyshlennykh splavov* [Superplasticity of industrial alloys]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1984. 264 p.
- [31] Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. *Superplasticity in metals and ceramics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997. 287 p.
- [32] Padmanabhan K.A., Vasin R.A., Enikeev F.U. *Superplastic flow: phenomenology and mechanics*. Springer, 2001. 363 p.
- [33] Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and engineering of severe plastic deformation*. New York, Nova Science Publ. Inc., 2010. 542 p.

- [34] Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests. *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2007, vol. 11, iss. 2, pp. 159–172. DOI: 10.1007/s11043-007-9033-6
- [35] Megahed M., Ponter A.R.S., Morrison C.J. An experimental and theoretical investigation into the creep properties of a simple structure of 316 stainless steel. *Int. J. Mech. Sci.*, 1984, vol. 26, iss. 3, pp. 149–164. DOI: 10.1016/0020-7403(84)90050-X
- [36] Enikeev F.U. Experimental evaluation of speed sensitivity of superplastic material in strongly nonuniform deflected mode. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov* [Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials], 2007, vol. 73, no. 10, pp. 44–50 (in Russ.).
- [37] Radchenko V.P., Shapievskiy D.V. Mathematical model of creep for a microinhomogeneous nonlinearly elastic material. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2008, vol. 49, iss. 3, pp. 478–483. DOI: 10.1007/s10808-008-0064-9
- [38] Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep analysis with a stress range dependent constitutive model. *Arch. Appl. Mech.*, 2009, vol. 79, iss. 6-7, pp. 619–630. DOI: 10.1007/s00419-008-0287-5
- [39] Lu L.Y., Lin G.L., Shih M.H. An experimental study on a generalized Maxwell model for nonlinear viscoelastic dampers used in seismic isolation. *Eng. Struct.*, 2012, vol. 34, pp. 111–123. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.09.012
- [40] Dandrea J., Lakes R.S. Creep and creep recovery of cast aluminum alloys. *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2009, vol. 13, pp. 303–315. DOI: 10.1007/s11043-009-9089-6
- [41] Melnis A.E., Layzan Ya.B. Nonlinear creep of human compact bone tissue upon stretching. *Polymer Mechanics*, 1978, vol. 14, iss. 1, pp. 82–84. DOI: 10.1007/BF00859565
- [42] Radchenko V.P., Samarin Yu.P. Effect of creep on the elastic deformation of a laminar composite. *Mech. Compos. Mater.*, 1983, vol. 19, iss. 2, pp. 162–168. DOI: 10.1007/BF00604218
- [43] Radchenko V.P., Shapievskiy D.V. Drift of elastic deformation due to creep for nonlinear elastic materials. *Vestn. Sam. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-mat. nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2006, vol. 43, pp. 99–106 (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu458
- [44] Radchenko V.P., Andreeva E.A. On drift and memory effect of nonlinear elastic strain arising due to creep for micronon-uniform materials in conditions of linear stress. *Vestn. Sam. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-mat. nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], vol. 19, no. 2, pp. 72–77 (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu712
- [45] Khokhlov A.V. Asymptotic commutativity of creep curves at piecewise-constant stress produced by the linear viscoelasticity theory. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2016, no. 1, pp. 70–82 (in Russ.).

Khokhlov A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Senior Researcher Fellow, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University (Michurinskiy prospekt 1, Moscow, 119192 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Khokhlov A.V. Applicability Indicators and Identification Techniques for a Nonlinear Maxwell-Type Elasto-Viscoplastic Model using Multi-Step Creep Curves. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 6, pp. 92–112 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-92-112