УДК 512.815.1+512.815.6+512.816.1+512.816.2 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-48-63

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА ОРБИТ КОМПАКТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ ЛИ С КОММУТАТИВНОЙ СВЯЗНОЙ КОМПОНЕНТОЙ. ВЫВОДЫ

О.Г. Стырт oleg_styrt@mail.ru; styrt@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Проведено исследование, является ли факторпространство компактной линейной группы топологическим и гомологическим многообразием. Рассмотрен случай бесконечной группы с коммутативной связной компонентой. Приведен метод сведения произвольного представления к представлению с неразложимым 2-устойчивым множеством весов без нулей. Получен явный критерий отдельно для одномерной группы и для группы большей размерности

Ключевые слова

Группа Ли, линейное представление группы, топологический фактор действия, топологическое многообразие, гомологическое многообразие

Поступила в редакцию 03.04.2017

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00818-а)

Введение. Пусть имеется точное линейное представление компактной группы Ли G в вещественном векторном пространстве V. Интересен вопрос, является ли фактор V/G этого действия топологическим и гомологическим многообразием. Далее для краткости назовем топологическое многообразие просто «многообразием».

Пространство V обладает G-инвариантным скалярным умножением и поэтому может (и будет) рассматриваться как евклидово пространство, на котором группа G действует ортогональными операторами. Кроме того, поскольку представление $G:V$ точное, можно полагать, что G — подгруппа Ли группы Ли $\mathbf{O}(V)$, а представление $G:V$ тавтологическое.

Исследования по указанной тематике проведены в работах [1, 2] для конечных групп. Кроме того, в работах [3–6] изучены как топологические, так и дифференциально-геометрические свойства фактора для различных классов групп: для групп с коммутативной связной компонентой [3] и для простых групп классического типа [4–6]. В настоящей работе рассмотрены группы с коммутативной связной компонентой и усилена «топологическая» часть результатов работы [3].

Формулировки упомянутых во введении утверждений (в том числе результатов настоящей работы) приведены далее.

Определение 1. *Линейный оператор в пространстве над некоторым полем называется отражением (соответственно псевдоотражением), если подпространство его неподвижных точек имеет коразмерность 1 (соответственно 2).*

В работе [1] доказано, что если группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ конечна и порождена псевдоотражениями, то $V/G \cong V$. Обратное неверно. Необходимое и достаточное условие для соотношения $V/G \cong V$ получено относительно недавно в работе [2], оно описано теоремой 1 и использует понятие *группы Пуанкаре*.

Определение 2. *Рассмотрим компактную группу Ли* $S := \{v \in \mathbb{H} : \|v\| = 1\} \subset \mathbb{H}$ *(с операцией умножения кватернионов), накрывающий гомоморфизм* $S \twoheadrightarrow \mathbf{SO}_3$ *и прообраз* $\Gamma \subset S$ *группы вращений додекаэдра при указанном гомоморфизме. Группой Пуанкаре называется линейная группа, полученная ограничением действия* $S : \mathbb{H}$ *левыми сдвигами на подгруппу* $\Gamma \subset S$.

Примем $\mathfrak{g} := \operatorname{Lie} G$. Далее будем полагать, что $G^0 \cong \mathbb{T}^m$, $m \in \mathbb{N}$.

На пространстве $\mathfrak{g}$ определено $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантное скалярное умножение; с помощью последнего будем отождествлять пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$.

Для произвольного конечного множества P векторов в конечномерном пространстве над некоторым полем, рассматриваемого с учетом кратностей своих элементов, число ненулевых векторов множества P (с учетом кратностей) обозначим через $\|P\|$.

Любое неприводимое представление группы G^0 одномерно либо двумерно. Напомним понятие веса ее неприводимого представления. Произвольное двумерное неприводимое представление группы G^0 обладает G^0-инвариантной комплексной структурой, и можно рассматривать его как одномерное комплексное представление группы G^0, сопоставив ему естественным образом вес — гомоморфизм групп Ли $\lambda : G^0 \to \mathbb{T}$ и его так же обозначаемый дифференциал $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Одномерному представлению группы G^0 сопоставим вес $\lambda := 0 \in \mathfrak{g}^*$.

Классы изоморфных неприводимых представлений группы G^0 характеризуются весами $\lambda \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, определенными с точностью до умножения на -1.

Пусть $P \subset \mathfrak{g}$ — множество весов $\lambda \in \mathfrak{g}$, соответствующее разложению представления $G^0 : V$ в прямую сумму неприводимых (с учетом кратностей). Множество $P \subset \mathfrak{g}$ не зависит от выбора указанного разложения (с точностью до умножения весов на -1). Поскольку представление $G : V$ точное, имеем $\langle P \rangle = \mathfrak{g}$.

Напомним определения *q-устойчивых* ($q \in \mathbb{N}$) и *неразложимых множеств* векторов конечномерных пространств над полями [3, § 1], необходимые и в настоящей работе.

Разложением множества векторов конечномерного линейного пространства на компоненты назовем его представление в виде объединения своих подмножеств, линейные оболочки которых линейно независимы. Если среди указанных линейных оболочек по крайней мере две нетривиальны, то такое разложение назовем *собственным*. Будем утверждать, что множество векторов *неразложимо*, если оно не допускает ни одного собственного разложения на компоненты. Всякое множество векторов разлагается на неразложимые компоненты единственным образом (с точностью до распределения нулевого вектора), причем для любого его разложения на компоненты каждая компонента является объединением некоторых его неразложимых компонент (вновь с точностью до нулевого вектора).

Определение 3. *Конечное множество векторов конечномерного пространства, рассматриваемое с учетом кратностей своих элементов, назовем q-устойчивым* $(q \in \mathbb{N})$, *если его линейная оболочка сохраняется при удалении из него любых векторов числом не более* q *(с учетом кратностей).*

Согласно предложению 2.2 в работе [3, § 2], если V/G — многообразие, то множество $P \subset \mathfrak{g}$ является 1-устойчивым. Кроме того, в работе [3, § 8] описан метод сопоставления каждой компактной линейной группе с коммутативной связной компонентой, 1-устойчивым множеством весов и фактором M компактной линейной группы с коммутативной связной компонентой, 2-устойчивым множеством весов и фактором, гомеоморфным M. В связи с изложенным выше рассмотрим случай 2-устойчивого множества весов.

Обозначим стабилизатор (соответственно стационарную подалгебру) вектора $v \in V$ через G_v (соответственно через $\mathfrak{g}_v$).

Для произвольного элемента $g \in G$ введем обозначение

$$\omega(g) := \operatorname{rk}(E-g) - \operatorname{rk}(E - Ad(g)) \in \mathbb{Z}.$$

Примем $\Omega := \{g \in G : \omega(g) \in \{0,2\}\} \subset G$ и $\Omega' := \{g \in G : \omega(g) = 4,\ \omega(g^5) = 0\} \subset G$.

Приведем ранее полученный результат для представлений конечных групп (см. [2, предложение 3.13, теорема A]).

Теорема 1. *Пусть* $H \subset \mathbf{O}(V)$ *— конечная группа. Тогда*

1) если V/H *— гомологическое многообразие, то представление* $H : V$ *есть прямое произведение представлений* $H_i : V_i$ $(i = 0, \ldots, k)$, *причем линейная группа* $H_i|_{V_i}$ *является группой Пуанкаре при* $i > 0$ *и порождена псевдоотражениями при* $i = 0$ *(в частности,* $\dim V_i = 4$ *для всякого* $i = 1, \ldots, k$);

2) если представления $H_i : V_i$ $(i = 0, \ldots, k)$ *из п. 1 существуют и* $V/H \not\cong V$, *то* $H \subset \mathbf{O}(V)$ *— группа Пуанкаре.*

Для рассматриваемого представления $G : V$ в работе [7] получены следующие результаты.

Теорема 2 (см. [7, теорема 2]). *Если* V/G *— гомологическое многообразие, а* $P \subset \mathfrak{g}$ *— 2-устойчивое множество, то* $\|Q\| = \dim\langle Q\rangle + 2$ *для любой неразложимой компоненты* Q *множества* P.

Теорема 3 (см. [7, теорема 3]). *Если* V/G *— гомологическое многообразие, а* $P \subset \mathfrak{g}$ *— 2-устойчивое множество, то группа* G *порождена объединением подгрупп* G^0 *и* G_v *(* $v \in V$, $|G_v| < \infty$ *).*

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

Теорема 4. *Допустим, что* V/G *— гомологическое многообразие, а* $P \subset \mathfrak{g}$ *— 2-устойчивое множество. Тогда представление* $G : V$ *есть прямое произведение представлений* $G_l : V_l$ *(* $l = 0, \ldots, p$ *), таких что*

1) для любого $l = 0, \ldots, p$ *фактор* V_l / G_l *является гомологическим многообразием;*

2) $|G_0| < \infty$;

3) для любого $l = 1, \ldots, p$ *группа* G_l *бесконечна, а множество весов представления* $G_l : V_l$ *неразложимо, 2-устойчиво и не содержит нулей.*

Если представления $G_l : V_l$ $(l = 0, \ldots, p)$ из формулировки теоремы 4 существуют, то V / G — гомологическое многообразие; если при этом фактор каждого из них является многообразием, то V / G — многообразие. Топологические свойства факторпространства конечной линейной группы описываются теоремой 1. Таким образом, требуется исследовать случай представления с неразложимым 2-устойчивым множеством весов без нулей (как следствие, обладающего G0-инвариантной комплексной структурой). Этот случай рассмотрен в теоремах 5 и 6 при дополнительных предположениях $m > 1$ и $m = 1$ соответственно. В теореме 6 также предполагается, что (одномерная) группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ не содержит комплексных отражений — к этому можно свести произвольный случай (см. [3, § 7]).

Теорема 5. *Допустим, что множество* $P \subset \mathfrak{g}$ *неразложимо, 2-устойчиво и не содержит нулей, причем* $m > 1$. *Следующие условия эквивалентны*:

1) V / G *— многообразие;*

2) V / G *— гомологическое многообразие;*

3) выполняются приведенные ниже условия:

(i) $\|P\| = m + 2$;

(ii) пространство V разлагается в прямую сумму попарно ортогональных двумерных неприводимых G^0*-инвариантных подпространств* $W_1, \ldots, W_{m+2} \subset V$, *переставляемых группой* G, *причем* $G(W_1 \oplus \ldots \oplus W_m) = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$ *и, кроме того,* $(m > 2) \Rightarrow (GW_j = W_j \, \forall j = 1, \ldots, m+2)$;

(iii) найдется элемент $g \in G$, *такой что* $\mathrm{Ad}(g) = -E$ *и* $gW_j = W_j \, \forall j = 1, \ldots,$ $m + 2$;

(iv) если $v \in V$ *и* $|G_v| < \infty$, *то* $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$.

Теорема 6. *Допустим, что множество* $P \subset \mathfrak{g}$ *неразложимо, 2-устойчиво и не содержит нулей,* $m = 1$, *а группа* $G \subset \mathbf{O}(V)$ *не содержит комплексных отражений. Следующие условия эквивалентны:*

1) V / G *— многообразие;*

2) V / G *— гомологическое многообразие;*

3) $\dim_{\mathbb{C}} V = \|P\| = 3$, $\mathrm{Ad}(G) = \{\pm E\}$, $G = \langle \Omega \rangle$, *а представление* $G : V$ *приводимо.*

В теоремах 5 и 6 импликация $3) \Rightarrow 1)$ доказана (см. [3, § 1, теоремы 1.3 и 1.5]), а импликация $1) \Rightarrow 2)$ очевидна. Далее будут доказаны теорема 4, а также импликации $2) \Rightarrow 3)$ в теоремах 5 и 6.

Обозначения и вспомогательные факты. Приведем вспомогательные обозначения и утверждения, в том числе заимствованные из процитированных работ.

Обозначим через π отображение факторизации $V \to V/G$.

Пусть $v \in V$ — произвольный вектор, тогда $\mathfrak{g}_v = \operatorname{Lie} G_v$. Кроме того, имеют место G_v-инвариантные ортогональные разложения $V = (\mathfrak{g}v) \oplus N_v$ и $N_v = N_v^{G_v} \oplus M_v$. Если при этом $|G_v| < \infty$, то $\dim((E-g)N_v) = \omega(g)$ для любого $g \in G_v$.

Для конечного подмножества $Q \subset \mathfrak{g}^*$, рассматриваемого с учетом кратностей своих элементов, подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и вектора $\xi \in \mathfrak{g}$ примем

$$Q|_{\mathfrak{h}} := \{\lambda|_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^* : \lambda \in Q\} \subset \mathfrak{h}^* \text{ и } Q_\xi := \{\lambda \in Q : \lambda(\xi) \neq 0\} \subset Q.$$

Теорема 7 (см. [7, теорема 4]). *Пусть $v \in V$ — некоторый вектор. Фактор V/G является (гомологическим) многообразием локально в точке $\pi(v)$ тогда и только тогда, когда N_v/G_v — (гомологическое) многообразие.*

Лемма 1 (см. [7, лемма 6]). *Предположим, что V/G — гомологическое многообразие, а $P \subset \mathfrak{g}$ — 2-устойчивое множество. Пусть $Q \subset P$ — подмножество, такое что $\bigcap_{\lambda \in Q} (\operatorname{Ker} \lambda) = \mathbb{R}\xi \subset \mathfrak{g}$, $\xi \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$. Тогда $\operatorname{Ad}(G)\xi \ni -\xi$ и $\|P_\xi\| = 3$.*

Лемма 2 (см. [2, § 2, теорема 2.3, лемма 2.6]). *Пусть X и Y — топологические пространства, а n — натуральное число, тогда*

1) если X — односвязная гомологическая n-сфера, то $X \cong S^n$;

2) конус над пространством X является гомологическим (n + 1)-многообразием тогда и только тогда, когда X — гомологическая n-сфера;

3) пространство $X \times Y$ является гомологическим многообразием тогда и только тогда, когда X и Y — гомологические многообразия.

Перечислим основные свойства q-устойчивых ($q \in \mathbb{N}$) конечных множеств векторов конечномерных пространств над полями, которые (множества) рассматриваются с учетом кратностей своих элементов [3, § 1].

1. Добавление и удаление нулевых векторов, а также умножение векторов на ненулевые элементы поля не влияют на q-устойчивость множества.

2. Образ q-устойчивого множества при линейном отображении пространств является q-устойчивым множеством. В частности, если некоторое множество линейных функций на пространстве q-устойчиво, то множество их ограничений на произвольное подпространство также q-устойчиво.

3. Для любого разложения произвольного q-устойчивого множества на компоненты (необязательно неразложимые) каждая компонента является q-устойчивой.

4. Всякое q-устойчивое множество с m-мерной линейной оболочкой ($m \in \mathbb{N}$) содержит не менее $m+q$ ненулевых векторов.

5. Всякое q-устойчивое множество с m-мерной линейной оболочкой ($m \in \mathbb{N}$), содержащее ровно m + q ненулевых векторов, неразложимо, а любые его ненулевые векторы числом не более m линейно независимы.

Доказательства результатов. Докажем теоремы 4–6. Стабилизатор общего положения представления $G : V$ конечен, откуда $\dim(V/G) = \dim V - \dim G =$

$=\dim V-m.$ Множество $P\subset\mathfrak{g}$ весов представления $G:V$ удовлетворяет равенству $\langle P\rangle=\mathfrak{g}.$ Легко заметить, что $\mathrm{Ad}(G^0)=\{E\}$ и $|\mathrm{Ad}(G)|<\infty.$

Изотипную компоненту представления $G^0:V$, соответствующую неприводимым представлениям с произвольным весом $\lambda\in P$, обозначим через V_λ. Для любого $\lambda\in P\setminus\{0\}$ изотипная компонента $V_\lambda\subset V$ обладает структурой комплексного пространства, на котором группа G^0 действует скалярными линейными операторами. Пространство V разлагается в прямую сумму своих попарно ортогональных подпространств V_λ $(\lambda\in P)$, переставляемых группой G.

Имеем $\mathrm{Ad}(G)P=P$ и $gV_\lambda=V_{\mathrm{Ad}(g)\lambda}$ $(\lambda\in P,\ \ g\in G)$. В частности, $GV_0=V_0$. Кроме того, $V_0=V^{G^0}$. Подпространство $V_0^{\perp}\subset V$ разлагается в прямую сумму попарно ортогональных изотипных компонент $V_\lambda\subset V$ $(\lambda\in P\setminus\{0\})$, переставляемых группой G, и обладает G^0-инвариантной структурой комплексного пространства размерности $\|P\|$.

Пусть $\lambda\in P\setminus\{0\}$ — произвольный вес. Элемент $g\in G$ переводит в себя изотипную компоненту $V_\lambda\subset V$, если и только если $\mathrm{Ad}(g)\lambda=\pm\lambda$, действуя на ней при $\mathrm{Ad}(g)\lambda=\lambda$ (соответственно при $\mathrm{Ad}(g)\lambda=-\lambda$) линейно (соответственно антилинейно) над полем $\mathbb{C}$.

Далее будем полагать, что V/G — гомологическое многообразие, а $P\subset\mathfrak{g}$ — 2-устойчивое множество.

Обозначим через $\widetilde{V}$ комплексное пространство $V\otimes\mathbb{C}$, а через τ — оператор комплексной структуры $\widetilde{V}\to\widetilde{V}$, $x+yi\to x-yi$, $x,y\in V$. Представление $G:V$ естественным образом индуцирует комплексное представление $G:\widetilde{V}$. Пусть $\widetilde{V}_1,\ldots,\widetilde{V}_n\subset\widetilde{V}$ $(n\in\mathbb{N})$ — изотипные компоненты комплексного представления $G^0:\widetilde{V}$. Имеем $\widetilde{V}=\bigoplus\limits_{j=1}^{n}\widetilde{V}_j$. Любое неприводимое комплексное представление группы G^0 одномерно, что влечет соотношения $(G^0)|_{\widetilde{V}_j}\subset\mathbb{T}E\subset\mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V}_j)$, $j=1,\ldots,n.$ Группа G переставляет подпространства $\widetilde{V}_1,\ldots,\widetilde{V}_n\subset\widetilde{V}$, причем

$$\mathrm{Ker\,Ad}=\{g\in G:g\widetilde{V}_j=\widetilde{V}_j\ \forall j=1,\ldots,n\}\subset G. \tag{1}$$

Оператор $\tau:\widetilde{V}\to\widetilde{V}$ также переставляет подпространства $\widetilde{V}_1,\ldots,\widetilde{V}_n$ пространства $\widetilde{V}$. Если $j\in\{1,\ldots,n\}$ и $\tau\widetilde{V}_j=\widetilde{V}_j$, то каждый оператор подалгебры $\mathfrak{g}|_{\widetilde{V}_j}\subset i\mathbb{R}E\subset\mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(\widetilde{V}_j)$ антикоммутирует с оператором $\tau|_{\widetilde{V}_j}:\widetilde{V}_j\to\widetilde{V}_j$, и, поскольку $[\mathfrak{g},\tau]=0$, выполнено равенство $\mathfrak{g}\widetilde{V}_j=\mathfrak{g}\tau\widetilde{V}_j=0$.

Рассмотрим произвольный элемент $g\in G$.

Примем $A:=\mathrm{Ad}(g)\in\mathbf{O}(\mathfrak{g})$, $V^0:=\{v\in V:((E-A)\mathfrak{g})v=0\}=\bigoplus\limits_{\lambda\in P^A}V_\lambda\subset V$ и, кроме того, $\widetilde{V}^0:=\{v\in\widetilde{V}:((E-A)\mathfrak{g})v=0\}=V^0\oplus iV^0\subset\widetilde{V}$.

Элемент $g \in G$ переставляет подпространства $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_n \subset \widetilde{V}$. Это означает, что существуют числа $p \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_p \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_p \in \{1, \ldots, n\}$ и подпространства $\widetilde{V}^1, \ldots, \widetilde{V}^p \subset \widetilde{V}$, для которых $\widetilde{V}^l = \bigoplus_{j=0}^{k_l-1} g^j \widetilde{V}_{n_l}$, $g^{k_l} \widetilde{V}_{n_l} = \widetilde{V}_{n_l}$, $l = 1, \ldots, p$, и $\widetilde{V} = \bigoplus_{l=1}^{p} \widetilde{V}^l$. Без ограничения общности можно полагать, что $k_1, \ldots, k_{p'} \geq 2$ и $k_{p'+1} = \ldots = k_p = 1$, где $p' \in \{0, \ldots, p\}$.

Как легко заметить, $\widetilde{V}^0 = \bigoplus_{l=p'+1}^{p} \widetilde{V}^l \subset \widetilde{V}$, $\widetilde{V} = \bigoplus_{l=0}^{p'} \widetilde{V}^l$. При этом $g\widetilde{V}^l = \widetilde{V}^l$ для всякого $l = 0, \ldots, p$. Отсюда

$$\operatorname{rk}(E-g) = \dim((E-g)V) = \dim_{\mathbb{C}}\left((E-g)\widetilde{V}\right) = \sum_{l=0}^{p'} \dim_{\mathbb{C}}\left((E-g)\widetilde{V}^l\right).$$

Пусть $l \in \{1, \ldots, p'\}$ — произвольное число. Примем $d_l := \dim_{\mathbb{C}} \widetilde{V}_{n_l} \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\dim_{\mathbb{C}} \widetilde{V}^l = k_l d_l$ и $\dim_{\mathbb{C}}\left(\widetilde{V}^l\right)^g \leq d_l$. Это означает, что $\dim_{\mathbb{C}}\left((E-g)\widetilde{V}^l\right) \geq$ $\geq (k_l - 1) d_l$.

С учетом изложенного выше $\operatorname{rk}(E-g) \geq \dim_{\mathbb{C}}\left((E-g)\widetilde{V}^0\right) + \sum_{l=1}^{p'} (k_l - 1) d_l$. Кроме того,

$$2\,\|(E-A)P\| = 2\left\|P \setminus P^A\right\| = \dim(V/V^0) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\widetilde{V}/\widetilde{V}^0\right) = \sum_{l=1}^{p'} \dim_{\mathbb{C}} \widetilde{V}^l = \sum_{l=1}^{p'} k_l d_l,$$

откуда

$$\operatorname{rk}(E-g) - \|(E-A)P\| \geq \dim_{\mathbb{C}}\left((E-g)\widetilde{V}^0\right) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p'} (k_l - 2) d_l \geq$$
$$\geq \dim((E-g)V^0) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p'} (k_l - 2).$$

Утверждение 1. *Справедливо неравенство* $\operatorname{rk}(E-g) \geq \|(E-A)P\|$. *При этом равенство* $\operatorname{rk}(E-g) = \|(E-A)P\|$ *возможно лишь в случае* $\bigoplus_{\lambda \in P^A} V_\lambda \subset V^g$ и $A^2 = E$.

◀ Имеем $\operatorname{rk}(E-g) - \|(E-A)P\| \geq \dim((E-g)V^0) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p'} (k_l - 2) \geq 0$. Допустим, что $\operatorname{rk}(E-g) - \|(E-A)P\| = 0$. Тогда $(E-g)V^0 = 0$ и $k_1 = \ldots = k_{p'} = 2$. Следовательно, $\bigoplus_{\lambda \in P^A} V_\lambda = V^0 \subset V^g$. Кроме того, $k_1, \ldots, k_p \in \{1, 2\}$ и, следовательно, $g^2 \widetilde{V}_j = \widetilde{V}_j$, $j = 1, \ldots, n$. В силу (1) $\operatorname{Ad}(g^2) = E$. ▶

Утверждение 2. *Если* $A^5 = E$ *и* $\operatorname{rk}(E-g) - \|(E-A)P\| \leq 2,$ *то* $A = E.$

◀ По условию $\operatorname{Ad}(g^5) = E.$ В силу (1) $g^5\widetilde{V}_j = \widetilde{V}_j$ для любого $j = 1, \ldots, n.$ Отсюда

$$k_1, \ldots, k_p \in \{1, 5\}, \;\; k_1 = \ldots = k_{p'} = 5,$$

$$2 \geq \operatorname{rk}(E-g) - \|(E-A)P\| \geq \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{p'}(k_l - 2) = \frac{3p'}{2}, \quad p' \leq 1.$$

Напомним, что оператор $\tau : \widetilde{V} \to \widetilde{V}$ переставляет подпространства $\widetilde{V}_1, \ldots, \widetilde{V}_n \subset \widetilde{V},$ причем если $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $\tau\widetilde{V}_j = \widetilde{V}_j,$ то $\mathfrak{g}\widetilde{V}_j = 0,$ $\widetilde{V}_j \subset \widetilde{V}^0.$ Далее $\widetilde{V}^0 = \bigoplus_{l=p'+1}^{p} \widetilde{V}^l \subset \widetilde{V}$ и $\tau\widetilde{V}^0 = \widetilde{V}^0.$ Это означает, что

$$5p' = k_1 + \ldots + k_{p'} = |\{j \in \{1, \ldots, n\} : \widetilde{V}_j \cap \widetilde{V}^0 = 0\}| \,\vdots\, 2, \; p' \,\vdots\, 2.$$

Поскольку $p' \leq 1$ и $p' \,\vdots\, 2,$ имеем $p' = 0,$ $k_1 = \ldots = k_p = 1.$ Таким образом, $g\widetilde{V}_j = \widetilde{V}_j,$ $j = 1, \ldots, n.$ В силу (1) $\operatorname{Ad}(g) = E.$ ▶

Множество $(E-A)P \subset \mathfrak{g}$ является 2-устойчивым. Его линейная оболочка есть не что иное, как подпространство $(E-A)\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ размерности $r := \operatorname{rk}(E-A) \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$ Следовательно,

– если $A \neq E,$ то $\|(E-A)P\| - r \geq 2;$

– если $A \neq E$ и $\|(E-A)P\| - r = 2,$ то множество $(E-A)P \subset \mathfrak{g}$ неразложимо, а любые его ненулевые векторы числом не более r линейно независимы.

Утверждение 3. *Допустим, что* $A \neq E.$ *Тогда* $\omega(g) \geq 2,$ *причем если* $\omega(g) = 2,$ *то*

$$\bigoplus_{\lambda \in P^A} V_\lambda \subset V^g, \;\; A^2 = E \text{ и } \|(E-A)P\| - r = 2.$$

◀ Имеем $\omega(g) = (\operatorname{rk}(E-g) - \|(E-A)P\|) + (\|(E-A)P\| - r).$ Осталось применить утверждение 1. ▶

Следствие 1. *Предположим, что* $g \in \Omega$ *и* $A \neq E.$ *Тогда* $\bigoplus_{\lambda \in P^A} V_\lambda \subset V^g,$ $A^2 = E,$ $\|(E-A)P\| - r = 2,$ *множество* $(E-A)P \subset \mathfrak{g}$ *неразложимо, а любые его ненулевые векторы числом не более* r *линейно независимы.*

Лемма 3. *Если* $g \in \Omega',$ *то* $A = E.$

◀ Допустим, что $A \neq E$. Имеем $\|(E-A)P\| - r \geq 2.$ Далее, согласно условию, $\omega(g) = 4$ и $\omega(g^5) = 0.$ Таким образом,

$$\operatorname{rk}(E-g) - \|(E-A)P\| = \omega(g) - \left(\|(E-A)P\| - r\right) \leq 2.$$

В силу утверждения 2 $A^5 \neq E,$ $\operatorname{Ad}(g^5) \neq E.$ Применяя к *элементу* $g^5 \in G$ утверждение 3, получаем $\omega(g^5) \geq 2.$ Это противоречит равенству $\omega(g^5) = 0.$ ▶

Лемма 4. *Допустим, что* $g \in \Omega$, $A \neq E$ *и* $P = P^A \cup P^{-A}$. *Тогда среди неразложимых компонент множества* $P \subset \mathfrak{g}$ *одна содержится в подпространстве* $\mathfrak{g}^{-A} \subset \mathfrak{g}$, *а все остальные — в подпространстве* $\mathfrak{g}^A \subset \mathfrak{g}$.

◀ Поскольку $\mathfrak{g}^A \cap \mathfrak{g}^{-A} = 0$, множество $P \subset \mathfrak{g}$ разлагается на компоненты $P^A \subset P$ и $P^{-A} \subset P$. Согласно следствию 1, множество $(E-A)P \subset \mathfrak{g}$ неразложимо. При этом множество $(E-A)P \subset \mathfrak{g}$ с точностью до нулей совпадает с множеством $2P^{-A} \subset \mathfrak{g}$. ▶

Лемма 5. *Предположим, что* $g \in \Omega$ *и* $P \neq P^A \cup P^{-A}$. *Тогда* $r = 1$, *а множество* $P \setminus P^A \subset \mathfrak{g}$ *неразложимо. Кроме того,* $\left\| P \setminus P^A \right\| = 3$, $\dim \left\langle P \setminus P^A \right\rangle = 2$ *и* $\left\| P^{-A} \right\| = 1$.

◀ По условию найдутся векторы $\lambda_1, \lambda_2 \in P$, такие что $A\lambda_1 = \lambda_2$ и $\dim \left\langle \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle = 2$; в частности, $A \neq E$, $r > 0$. В силу следствия 1 $A^2 = E$, $\left\| P \setminus P^A \right\| = \|(E-A)P\| = r+2$, а любые ненулевые векторы множества $(E-A)P \subset \mathfrak{g}$ числом не более r линейно независимы. Имеем $A\lambda_2 = A^2\lambda_1 = \lambda_1$. Далее $\lambda_1, \lambda_2 \in P$, $\lambda_2 \neq \pm\lambda_1$, а ненулевые векторы $(E-A)\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_2$ и $(E-A)\lambda_2 = \lambda_2 - \lambda_1$ линейно зависимы. Это означает, что $2 > r > 0$, $r = 1$, $\left\| P \setminus P^A \right\| = r + 2 = 3$.

Таким образом, $A\lambda_1 = \lambda_2 \neq \pm\lambda_1$, $A\lambda_2 = \lambda_1 \neq \pm\lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \notin P^A \cup P^{-A}$ и $\left\| P \setminus P^A \right\| = 3$. Отсюда $P \setminus P^A = \{\lambda, \lambda_1, \lambda_2\}$, где $\lambda \in P$ и $A\lambda = \pm\lambda$.

Имеем

$$\lambda \in (P \setminus P^A) \cap (P^A \cup P^{-A}) = (P \setminus P^A) \cap P^{-A} = P^{-A} \setminus P^A = P^{-A} \setminus \{0\} \subset \mathfrak{g}^{-A} \setminus \{0\}.$$

Поэтому $\left\| P^{-A} \right\| = \left\| P^{-A} \setminus \{0\} \right\| = \left\| (P \setminus P^A) \cap P^{-A} \right\| = 1$. Ввиду соотношений $\lambda \in \mathfrak{g}^{-A} \setminus \{0\}$ и $\operatorname{rk}(E-A) = r = 1$ справедливо равенство $(E-A)\mathfrak{g} = \mathbb{R}\lambda$.

Отметим, что $0 \neq \lambda_1 - \lambda_2 = (E-A)\lambda_1 \in (E-A)\mathfrak{g} = \mathbb{R}\lambda$, $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{R}\lambda \setminus \{0\}$. Отсюда

$$\left\langle P \setminus P^A \right\rangle = \left\langle \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle = \left\langle \lambda, \lambda_1 \right\rangle = \left\langle \lambda, \lambda_2 \right\rangle = \left\langle \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle.$$

Следовательно, $P \setminus P^A = \{\lambda, \lambda_1, \lambda_2\} \subset \mathfrak{g}$ — неразложимое множество, причем $\dim \left\langle P \setminus P^A \right\rangle = \dim \left\langle \lambda_1, \lambda_2 \right\rangle = 2$. ▶

Следствие 2. *Предположим, что* $g \in \Omega$. *Тогда подмножество* $P \setminus P^A \subset P \setminus \{0\}$ *содержится в некоторой неразложимой компоненте множества* $P \setminus \{0\} \subset \mathfrak{g}$.

◀ При $A = E$ доказывать нечего. В случае $A \neq E$ достаточно воспользоваться леммами 4 и 5. ▶

Следствие 3. *Предположим, что* $g \in \Omega$, *а также* $A \neq E$. *Тогда подмножество* $P' := \{\lambda \in P : (E-g)V_\lambda \neq 0\} \subset P$ *содержится в одной из неразложимых компонент множества* $P \setminus \{0\} \subset \mathfrak{g}$. *В частности,* $P' \subset P \setminus \{0\}$.

◀ Согласно следствию 1, $P' \subset P \setminus P^A$. Осталось применить следствие 2. ▶

Предложение 1. *Если* $g \in \Omega$ *и* $A = E$, *то все изотипные компоненты* $V_\lambda \subset V$ $(\lambda \in P)$, *кроме, быть может, одной, содержатся в подпространстве* $V^g \subset V$.

◀ Поскольку $A = E$, имеем $gV_\lambda = V_\lambda$ ($\lambda \in P$) и $g|_{V_\lambda} \in \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V_\lambda)$ ($\lambda \in P \setminus \{0\}$). Как следствие,

$$2 \geq \omega(g) = \mathrm{rk}(E-g) = \dim((E-g)V) = \sum_{\lambda\in P} \dim((E-g)V_\lambda) =$$
$$= \dim((E-g)V_0) + \sum_{\substack{\lambda\in P\\ \lambda\neq 0}} 2\dim_{\mathbb{C}}((E-g)V_\lambda). \text{ ▶}$$

Перейдем к доказательству теоремы 4.

Пусть $Q_1, \ldots, Q_p \subset P$ ($p \in \mathbb{N}$) — неразложимые компоненты множества $P \setminus \{0\} \subset \mathfrak{g}$. Имеем $P \setminus \{0\} = \coprod_{l=1}^{p} Q_l \subset P$. Примем $V_l := \bigoplus_{\lambda\in Q_l} V_\lambda \subset V$ ($l = 1, \ldots, p$).

В записи V_0 нижний индекс означает вес $0 \in \mathfrak{g}$; между тем в ряде случаев будет удобно понимать этот индекс и как целое неотрицательное число.

Пространство V разлагается в прямую сумму своих попарно ортогональных G^0-инвариантных подпространств V_l, $l = 0, \ldots, p$. Далее в группе Ли G имеются подгруппы Ли $G_l := \{g \in G : V_{l'} \subset V^g \, \forall l' \in \{0, \ldots, p\} \setminus \{l\}\}$ ($l = 0, \ldots, p$) и $\widetilde{G} := G_0 \times \ldots \times G_p$. При этом для всякого $l = 0, \ldots, p$ выполняется равенство $\widetilde{G}V_l = V_l$, а представление $G_l : V_l$ точное. В частности, $|G_0| < \infty$.

Теорема 8. *Имеем* $\widetilde{G} = G$.

Доказательству теоремы 8 предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 2. *Справедливо включение* $G^0 \subset \widetilde{G}$.

◀ Для всякого $l = 1, \ldots, p$ подалгебра $\mathrm{Lie}\, G_l \subset \mathfrak{g}$ есть не что иное, как пересечение ядер всех весов $\lambda \in Q_{l'} \subset P \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*$, $l' \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{l\}$. Поскольку $\mathfrak{g}^* = \langle P \rangle = \bigoplus_{l=1}^{p} \langle Q_l \rangle$, имеем $\mathfrak{g} = \bigoplus_{l=1}^{p} \mathrm{Lie}\, G_l$, $\mathrm{Lie}\, \widetilde{G} = \mathfrak{g}$, $\widetilde{G} \supset G^0$. ▶

Предложение 3. *Справедливо включение* $\Omega \subset \widetilde{G}$.

◀ Вытекает из следствия 3 и предложения 1. ▶

Пусть $v \in V$ — произвольный вектор, такой что $|G_v| < \infty$.

Утверждение 4. *Представление* $G_v : N_v$ *точное.*

◀ Если $g \in G_v$ и $N_v \subset V^g$, то $\omega(g) = \dim((E-g)N_v) = 0$, и, согласно утверждению 3, $\mathrm{Ad}(g) = E$, $\mathfrak{g}v \subset V^g$, $V^g \supset (\mathfrak{g}v) \oplus N_v = V$, $g = E$. ▶

Лемма 6. *Имеем* $G_v \subset \widetilde{G}$. *Кроме того, представление* $G_v : N_v$ *есть прямое произведение представлений* $H_i : W_i$ ($i = 0, \ldots, k$), *причем*

1) линейная группа $H_i|_{W_i}$ *является группой Пуанкаре при* $i > 0$ *и порождена псевдоотражениями при* $i = 0$;

2) если $\langle G_v \cap \Omega \rangle \neq G_v$, *то* $k \geq 1$, *а если* $[G_v, G_v] \neq G_v$, *то* $\dim N_v \geq 4k + 2$;

3) для любого $j = 1, \ldots, k$ *найдется вес* $\lambda \in P$, *такой что* $V_\lambda \supset W_j$ *и* $V_\lambda^\perp \subset V^{H_j}$.

◀ В силу теоремы 7 N_v/G_v — гомологическое многообразие. Далее, применяя к точному представлению $G_v : N_v$ теорему 1, получаем его разложение в прямое произведение представлений $H_i : W_i$ ($i = 0, \ldots, k$), удовлетворяющих условию 1). При этом $H_0 = \langle H_0 \cap \Omega \rangle$, а группа Пуанкаре совпадает со своим коммутантом, вследствие чего условие 2) также выполняется.

Пусть $j \in \{1, \ldots, k\}$ — произвольное число.

Если $h \in H_j \setminus \{E\}$ и $h^5 = E$, то $\omega(h) = \dim((E-h)N_v) = \dim W_j = 4$ и, кроме того, $\omega(h^5) = \omega(E) = 0$, откуда $h \in \Omega'$, что вместе с леммой 3 влечет равенство $\mathrm{Ad}(h) = E$. Известно, что группа Пуанкаре порождается своими элементами порядка 5, поэтому $\mathrm{Ad}(H_j) = \{E\}$. Отсюда следует, что, во-первых, $H_j V_\lambda = V_\lambda$ для всякого $\lambda \in P$, а во-вторых, $\mathfrak{g}v \subset V^{H_j}$. Следовательно, $V^{H_j} = \mathfrak{g}v \oplus N_v^{H_j} = \mathfrak{g}v \oplus (N_v \cap W_j^{\perp}) = W_j^{\perp}$. Тем самым установлено, что

– изотипные компоненты представления $H_j : V$ суть в точности подпространства W_j и $V^{H_j} = W_j^{\perp}$ пространства V, причем представление $H_j : W_j$ неприводимо;

– пространство V разлагается в прямую сумму своих попарно ортогональных H_j-инвариантных подпространств V_λ, $\lambda \in P$.

Поэтому найдется вес $\lambda \in P$, для которого $V_\lambda \supset W_j$ и $V_\lambda^{\perp} \subset V^{H_j}$. Таким образом, $H_j \subset \widetilde{G}$.

Итак, $H_1, \ldots, H_k \subset \widetilde{G}$. Кроме того, $H_0 = \langle H_0 \cap \Omega \rangle \subset \langle \Omega \rangle \subset \widetilde{G}$. Отсюда $G_v \subset \widetilde{G}$. ▶

Следствие 4. *Допустим, что* $\langle G_v \cap \Omega \rangle \neq G_v$. *Тогда найдется вес* $\lambda \in P$, *такой что* $\dim V_\lambda \geq 4$. *Кроме того, если* $[G_v, G_v] \neq G_v$, *то* $\dim N_v \geq 6$.

Теперь утверждение теоремы 8 вытекает непосредственно из теоремы 3, предложения 2 и леммы 6.

Имеем $G = \widetilde{G} = G_0 \times \ldots \times G_p$. Поэтому $V/G \cong (V_0/G_0) \times \ldots \times (V_p/G_p)$, и, согласно лемме 2, каждый фактор V_l/G_l, $l = 0, \ldots, p$, является гомологическим многообразием. Далее $Q_1, \ldots, Q_p \subset P \setminus \{0\}$, вследствие чего для любого $l = 1, \ldots, p$ множество весов представления $G_l : V_l$ неразложимо, 2-устойчиво и не содержит нулей.

Тем самым полностью доказана теорема 4.

Перейдем к доказательству импликаций 2) $\Rightarrow$ 3) в теоремах 5 и 6.

По-прежнему полагаем, что V/G — гомологическое многообразие, а множество $P \subset \mathfrak{g}$ является 2-устойчивым. Кроме того, будем предполагать, что множество $P \subset \mathfrak{g}$ неразложимо и не содержит нулей.

Согласно лемме 1, $\mathrm{Ad}(G) \neq \{E\}$.

В силу теоремы 2 $\|P\| = m + 2$. Ввиду 2-устойчивости множества $P \subset \mathfrak{g}$ любые его векторы числом не более m линейно независимы. В частности, при $m \geq 2$ данное множество не содержит кратных векторов.

Вначале докажем импликацию $2) \Rightarrow 3)$ в теореме 5.

Предположим, что $m \geq 2$.

Требуется доказать, что выполнены условия (i)–(iv) из формулировки теоремы 5.

Как уже было отмечено, $\|P\| = m+2$. Пространство V разлагается в прямую сумму попарно ортогональных двумерных неприводимых G^0-инвариантных подпространств $W_1, \ldots, W_{m+2} \subset V$. При этом множество $P \subset \mathfrak{g}$ не содержит кратных векторов. Следовательно,

– подпространства $W_1, \ldots, W_{m+2} \subset V$ являются изотипными компонентами представления $G^0 : V$ и переставляются группой G;

– для любого $\lambda \in P$ имеем $\dim V_\lambda = 2$.

Согласно следствию 4, если $v \in V$ и $|G_v| < \infty$, то $G_v = \left\langle G_v \cap \Omega \right\rangle$. Теперь, используя теорему 3, получаем $G = \left\langle G^0 \cup \Omega \right\rangle$, $\operatorname{Ad}(G) = \langle \operatorname{Ad}(\Omega) \rangle$.

Таким образом, уже доказано, что условия (i) и (iv) выполняются.

Пусть $g \in \Omega$ — произвольный элемент, такой что $A := \operatorname{Ad}(g) \neq \pm E$.

В силу леммы 4 $P \neq P^A \cup P^{-A}$. Применяя лемму 5, получаем $\left\| P \setminus P^A \right\| = 3$, $\dim \left\langle P \setminus P^A \right\rangle = 2$ и $\left\| P^{-A} \right\| = 1$. Таким образом, множество $P \subset \mathfrak{g}$ содержит три линейно зависимых вектора. Следовательно, $3 > m \geq 2$, $m = 2$, $\|P\| = 4$, $\left\| P^A \right\| = \|P\| - \left\| P \setminus P^A \right\| = 1$.

Допустим, что $m > 2$.

Согласно изложенному выше, $\operatorname{Ad}(\Omega) \subset \{\pm E\}$, $\operatorname{Ad}(G) = \langle \operatorname{Ad}(\Omega) \rangle \subset \{\pm E\}$, откуда $GW_j = W_j \, \forall j = 1, \ldots, m+2$. Поскольку $\operatorname{Ad}(G) \neq \{E\}$, имеем $\operatorname{Ad}(G) = \{\pm E\}$, и, таким образом, все условия (i)–(iv) выполняются.

Предположим, что $m = 2$.

Имеем $\|P\| = 4$, $P = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \subset \mathfrak{g}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$. Любые два вектора множества $P \subset \mathfrak{g}$ линейно независимы, и, следовательно, прямые $\mathbb{R}\lambda_j \subset \mathfrak{g}$, $j = 1, 2, 3, 4$, попарно различны. Будем полагать, что

$$\begin{aligned} &\forall i, j \in \{1,2,3,4\} \ \ ((\lambda_i, \lambda_j) = 0) \Rightarrow ((\{i, j\} = \{1,2\}) \vee (\{i, j\} = \{3,4\})); \\ &\forall j \in \{1,2,3,4\} \quad V_{\lambda_j} = W_j \subset V \end{aligned} \tag{2}$$

(этого можно добиться путем надлежащих перенумераций).

Рассмотрим произвольный элемент $g \in \Omega$.

Покажем, что $g(W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$.

При $A := \operatorname{Ad}(g) = \pm E$ доказывать нечего.

Допустим, что $A \neq \pm E$. Тогда $\left\| P^A \right\| = \left\| P^{-A} \right\| = 1$. Следовательно, найдутся числа $i, j \in \{1,2,3,4\}$, такие что $A\lambda_i = \lambda_i$ и $A\lambda_j = -\lambda_j$. Очевидно, что $(\lambda_i, \lambda_j) = 0$, $gV_{\lambda_i} = V_{\lambda_i}$ и $gV_{\lambda_j} = V_{\lambda_j}$. В силу (2) $g(W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$.

Тем самым установлено, что $g(W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$ для любого $g \in \Omega$. При этом $G = \left\langle G^0 \cup \Omega \right\rangle$, откуда $G(W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$.

Таким образом, условия (i), (ii) и (iv) выполняются.

Осталось проверить условие (iii).

Достаточно доказать, что $-E \in \mathrm{Ad}(G)$.

Допустим, что $-E \notin \mathrm{Ad}(G)$.

Согласно лемме 1, группа $\mathrm{Ad}(G) \subset \mathbf{O}(\mathfrak{g})$ содержит отражение относительно каждой из четырех попарно различных прямых $\mathbb{R}\lambda_j \subset \mathfrak{g}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Значит, $|Ad(G)| > 4$.

Поскольку $G(W_1 \oplus W_2) = W_1 \oplus W_2$, для любого $g \in G$ имеем $g^2 W_j = W_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$), $P \subset \mathrm{Ker}(E - \mathrm{Ad}(g^2)) \cup \mathrm{Ker}(E + \mathrm{Ad}(g^2))$, что вместе с неразложимостью множества $P \subset \mathfrak{g}$ и соотношением $-E \notin \mathrm{Ad}(G)$ влечет равенство $(\mathrm{Ad}(g))^2 = \mathrm{Ad}(g^2) = E$. Таким образом, все операторы группы $\mathrm{Ad}(G) \subset \mathbf{O}(\mathfrak{g})$ инволютивны. Поэтому $|(Ad(G)) \cap (\mathbf{SO}(\mathfrak{g}))| \le 2$, $|\mathrm{Ad}(G)| \le 4$, что противоречит неравенству $|\mathrm{Ad}(G)| > 4$.

Следовательно, $-E \in \mathrm{Ad}(G)$, и, таким образом, все условия (i)–(iv) выполняются.

Тем самым теорема 5 полностью доказана.

Теперь докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3) в теореме 6.

Предположим, что $m = 1$, а группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ не содержит комплексных отражений.

Требуется доказать, что $\dim_{\mathbb{C}} V = \|P\| = 3$, $Ad(G) = \{\pm E\}$, $G = \langle \Omega \rangle$, а представление $G : V$ приводимо.

Как уже было отмечено, $\dim_{\mathbb{C}} V = \|P\| = m + 2 = 3$. Кроме того, $\mathrm{Ad}(G) \ne \{E\}$, откуда $\mathrm{Ad}(G) = \{\pm E\}$. Если $v \in V$, $|G_v| < \infty$ и $G_v \ne \langle G_v \cap \Omega \rangle$, то $\dim N_v = \dim V - \dim G = 5$ и, согласно следствию 4, $[G_v, G_v] = G_v \ne \{E\}$, $G_v \subset [G, G] \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}$, что, в частности, влечет неразрешимость группы $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} \subset G$.

Допустим, что представление $G : V$ неприводимо.

Поскольку группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ неприводима и не содержит комплексных отражений, имеем

$$G^0 = \mathbb{T}E \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V); \;\; \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} = G^0 K \subset G,$$

где $K := \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} \cap \mathbf{SL}_{\mathbb{C}}(V) \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ — конечная неприводимая импримитивная комплексная линейная группа (см. [3, § 7]).

Комплексное пространство V разлагается в прямую сумму трех одномерных комплексных подпространств, переставляемых группой $K \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, а следовательно, и группой $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} = G^0 K \subset \mathbf{GL}_{\mathbb{C}}(V)$. Поэтому существует гомоморфизм $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} \to S_3$ с коммутативным ядром. Группа S_3 разрешима; то же можно утверждать и о группе $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} \subset G$.

Следовательно, если $v \in V$ и $|G_v| < \infty$, то $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$. Используя теорему 3, получаем $G = \langle G^0 \cup \Omega \rangle$.

Таким образом, $\dim G = 1$, $0 \notin P$, $\dim_{\mathbb{C}} V = \|P\| = 3$, $G = \langle G^0 \cup \Omega \rangle$, $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$ ($v \in V$, $|G_v| < \infty$), а группа $G \subset \mathbf{O}(V)$ неприводима и не содержит комплексных отражений. Данная ситуация невозможна (см. [3, § 7], рассуждения в точности повторяют доказательство леммы 7.2).

Полученное противоречие показывает, что представление $G:V$ приводимо.

Осталось доказать, что $G = \langle \Omega \rangle$.

Приводимое представление $G:V$ обладает двумерным инвариантным подпространством. Следовательно, найдется вектор $v \in V \setminus \{0\}$, для которого $Gv = G^0 v$. Имеем $|G_v| < \infty$ и $G = G^0 G_v$. Если $G_v \neq \langle G_v \cap \Omega \rangle$, то $G_v \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Ad}$, $G = G^0 G_v \subset \operatorname{Ker} \operatorname{Ad}$, что противоречит равенству $\operatorname{Ad}(G) = \{\pm E\}$. Отсюда $G_v = \langle G_v \cap \Omega \rangle$, $G = G^0 G_v \subset \langle G^0 \cup \Omega \rangle$.

Итак, $G = \langle G^0 \cup \Omega \rangle$. Поскольку $\operatorname{Ad}(G) = \{\pm E\}$, существует элемент $g \in \Omega$, такой что $\operatorname{Ad}(g) = -E$. Далее в группе G каждый элемент подмножества $G^0 g$ сопряжен элементу $g \in \Omega$ и поэтому принадлежит подмножеству Ω. Отсюда $\langle \Omega \rangle \supset G^0$, $\langle \Omega \rangle \supset G^0 \cup \Omega$, $\langle \Omega \rangle \supset \langle G^0 \cup \Omega \rangle = G$, $G = \langle \Omega \rangle$.

Тем самым теорема 6 полностью доказана.

Заключение. В настоящей работе вопрос о том, является ли факторпространство компактной линейной группы многообразием, изучен для бесконечной группы с коммутативной связной компонентой. Результаты работы создают основы для рассмотрения этого вопроса относительно других видов линейных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлова М.А.* О факторпространстве по действию конечной группы, порожденной псевдоотражениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 1. С. 104–126.

2. *Lange C.* When is the underlying space of an orbifold a topological manifold?

URL: https://export.arxiv.org/pdf/1307.4875 (дата обращения: 18.02.2017).

3. *Стырт О.Г.* О пространстве орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой // Труды ММО. 2009. Т. 70. С. 235–287.

4. *Стырт О.Г.* О пространстве орбит трехмерной компактной линейной группы Ли // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 4. С. 165–188.

5. *Стырт О.Г.* О пространстве орбит неприводимого представления специальной унитарной группы // Труды ММО. 2013. Т. 74. № 1. С. 175–199.

6. *Styrt O.G.* On the orbit spaces of irreducible representations of simple compact Lie groups of types B, C, and D // J. Algebra. 2014. Vol. 415. P. 137–161.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.05.034

7. *Стырт О.Г.* Топологические и гомологические свойства пространства орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 3. С. 68–81.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-68-81

Стырт Олег Григорьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Стырт О.Г. Топологические и гомологические свойства пространства орбит компактной линейной группы Ли с коммутативной связной компонентой. Выводы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 6. С. 48–63.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-48-63

MORE ON THE TOPOLOGICAL AND HOMOLOGICAL PROPERTIES OF THE ORBIT SPACE IN A COMPACT LINEAR LIE GROUP FEATURING A COMMUTATIVE CONNECTED COMPONENT. CONCLUSION

O.G. Styrt oleg_styrt@mail.ru; styrt@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The investigation concerns the problem of whether the quotient space of a compact linear group is a topological and homology manifold. We consider the case of an infinite group featuring a commutative connected component. We present a technique for reducing an arbitrary representation to a representation featuring an indecomposable 2-stable set of weights that contains no zeros. We derived explicit criteria for a one-dimensional group and a higher dimensional group separately

Keywords

Lie group, linear representation, topological quotient of an action, topological manifold, homology manifold

Received 03.04.2017

The study was supported by the RFBR (grant no. 16-01-00818-a)

REFERENCES

[1] Mikhaylova M.A. On the quotient space modulo the action of a finite group generated by pseudoreflections. *Math. USSR Izv.*, 1985, vol. 24, no. 1, pp. 99–119.
DOI: 10.1070/IM1985v024n01ABEH001216

[2] Lange C. When is the underlying space of an orbifold a topological manifold?
Available at: https://arxiv.org/abs/1307.4875 (accessed: 18.02.2017).

[3] Styrt O.G. On the orbit space of a compact linear Lie group with commutative connected component. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2009, pp. 171–206.
DOI: 10.1090/S0077-1554-09-00178-2

[4] Styrt O.G. On the orbit space of a three-dimensional compact linear Lie group. *Izv. Math.*, 2011, vol. 75, no. 4, pp. 815–836. DOI: 10.1070/IM2011v075n04ABEH002553

[5] Styrt O.G. On the orbit space of an irreducible representation of the special unitary group. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2013, vol. 74, pp. 145–164.
DOI: 10.1090/S0077-1554-2014-00222-3

[6] Styrt O.G. On the orbit spaces of irreducible representations of simple compact Lie groups of types B, C, and D. *J. Algebra*, 2014, vol. 415, pp. 137–161.
DOI: 10.1016/j.jalgebra.2014.05.034

[7] Styrt O.G. Topological and homological properties of the orbit space of a compact linear Lie group with a commutative connected component. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 3, pp. 68–81. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-68-81

Styrt O.G. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Styrt O.G. More on the Topological and Homological Properties of the Orbit Space in a Compact Linear Lie Group Featuring a Commutative Connected Component. Conclusion. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 6, pp. 48–63 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-48-63