УДК 532.59:534.1 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-73-89

ДАЛЬНИЕ ПОЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ДВИЖУЩИХСЯ ИСТОЧНИКОВ ВОЗМУЩЕНИЙ

В.В. Булатов internalwave@mail.ru
Ю.В. Владимиров vladimyura@yandex.ru

ИПМех РАН, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Исследованы дальние поля внутренних гравитационных волн, возбуждаемых источником возмущений, движущимся в бесконечной по вертикали стратифицированной среде. Рассмотрено распространение волн в невязкой, несжимаемой среде с экспоненциальным распределением невозмущенной плотности. В линейном приближении и приближении Буссинеска построены равномерные асимптотики возбуждаемых полей внутренних гравитационных волн вдали от движущегося источника возмущений, в том числе в окрестности траверсной плоскости и горизонта движения. Полученные асимптотические решения позволяют эффективно рассчитывать основные амплитудно-фазовые характеристики возбуждаемых дальних полей внутренних гравитационных волн при определенных режимах генерации и, кроме того, качественно анализировать полученные решения. Это важно для правильной постановки более сложных математических моделей волновой динамики реальных природных стратифицированных сред

Ключевые слова

Стратифицированная среда, внутренние гравитационные волны, дальние поля, равномерные асимптотики, движущийся источник

Поступила в редакцию 10.10.2017

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ АААА-А17-117021310375-7)

Введение. Важный механизм возбуждения полей внутренних гравитационных волн (ВГВ) в природных (океан, атмосфера Земли) и искусственных стратифицированных средах является их генерация источниками возмущений различной физической природы: природного (движущийся тайфун, ветровое волнение, обтекание неровностей рельефа океана, изменения полей плотности и течений, подветренные горы) и антропогенного (морские технологические конструкции, схлопывание области турбулентного перемешивания, подводные взрывы) характеров. Система уравнений гидродинамики, описывающая волновые возмущения стратифицированных сред в общем виде представляет достаточно сложную математическую задачу как в плане доказательств теорем существования и единственности решений в соответствующих функциональных классах, так и с вычислительной точки зрения. Основные результаты решений задач о генерации ВГВ представляются в самой общей интегральной форме, и в этом случае полученные интегральные решения требуют разработки численных и асимптотических методов их исследования, допускающих качественный анализ и проведение экспресс-оценок решений [1–6].

Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой волновых возмущений неоднородных и нестационарных природных стратифицированных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей. Трехмерность структуры природных стратифицированных сред также играет существенную роль, и в настоящее время отсутствует возможность проведения масштабных вычислительных экспериментов по моделированию трехмерных океанических течений на больших временах с достаточной точностью. Однако в некоторых случаях первоначальное качественное представление об изучаемом круге волновых явлений можно получить на основе более простых аналитических моделей. В связи с этим необходимо отметить классические задачи гидродинамики о построении асимптотических решений, которые описывают эволюцию волновых возмущений, возбуждаемых источниками различной природы в тяжелой жидкости. Модельные решения позволяют в дальнейшем получить представления волновых полей с учетом изменчивости и нестационарности реальных природных стратифицированных сред (океан, атмосфера Земли). Ряд результатов анализа модельных линейных задач, описывающих различные режимы возбуждения и распространения волновых возмущений, также лежит в основе активно развивающейся в настоящее время нелинейной теории генерации волн экстремально большой амплитуды — волн-убийц [7–12].

Моделирование динамики ВГВ особенно актуально вследствие возросшего числа морских платформ, установленных на шельфовых месторождениях нефти и газа. Можно отметить некоторые случаи повреждения морских платформ внутренними волнами большой амплитуды, например, в Андаманском море, когда одна из опор платформы в октябре 1997 г. была изогнута сдвиговым течением во внутренней волне. Измерения показывают, что нагрузки от ВГВ, действующие на подводные части морских платформ в вертикальном направлении могут в 30 раз превосходить нагрузки от ветровых волн. Действие ВГВ приводит к мощному транспорту наносов и размывам дна, особенно в глубоководных районах, где влияние ветровых, в том числе штормовых волн, пренебрежимо мало. Внутренние гравитационные волны также способствуют диффузии осадков и транспорту наносов в морской среде, поэтому процессы переноса частиц за счет индуцированных волнами потоков активно исследуют в рамках различных прикладных направлений, связанных с гидробиологией (миграция планктона, бентоса), экологией (распространение примесей и загрязнений) и инженерной океанологией [1–3, 13].

Внутренние гравитационные волны, существующие в океане вследствие стратификации его вод, являются принципиально двумерными, а во многих случаях и трехмерными, поэтому в вычислительном плане анализ двумерных и трехмерных нестационарных волновых движений представляет собой весьма сложную задачу. Разработан и получил широкое применение численный код *MIT*, решающий полные уравнения гидродинамики с учетом реального рельефа дна, вращения Земли и турбулентных процессов, код разработан в Массачусетском технологическом институте (США) совместно с мировыми специалистами по численному моделированию океана. Такая модель требует больших компьютерных ресурсов, оправданных только для решения отдельных практических задач океанологии. Тем не менее даже такие полные модели пока еще не учитывают, например, существующей в реальных океанических условиях стабильной фоновой горизонтально-неоднородной стратификации. Для учета этого гидрофизического эффекта необходимо вводить внешние силы, удерживающие эту неоднородность стратификации, параметризация которых численно затруднительна. Существующие в настоящее время другие методы численного моделирования, в том числе с использованием суперкомпьютеров (алгоритм *IGW Research*, алгоритмы *Riemann Solver* для решения гиперболических уравнений мелкой воды, псевдоспектральный алгоритм высокого порядка для решений уравнений гидродинамики *HOSM*) не всегда позволяют эффективно рассчитывать конкретные физические задачи волновой динамики океана и атмосферы с учетом их реальной изменчивости, так как ориентированы на решение достаточно общих задач, требуют большой вычислительной мощности, не всегда учитывают физическую специфику решаемых задач, что существенно ограничивает их практическую применимость, особенно при расчетах волновых полей в реальных природных средах. Кроме того, использование мощных численных алгоритмов требует верификации и сравнения с решениями модельных задач [3, 4, 14]. Поэтому в современных научных исследованиях при анализе волновых явлений в реальных стратифицированных средах (океан, атмосфера Земли) широко применяют упрощенные асимптотические и аналитические модели. В линейном приближении существующие подходы к описанию волновой картины возбуждаемых полей ВГВ основаны на представлении волновых полей интегралами Фурье. *Цель настоящей работы* — исследование дальних полей ВГВ, возбуждаемых источником возмущений, движущимся в бесконечной по вертикали стратифицированной среде.

Постановка задачи, интегральные формы решения. Рассмотрено распространение ВГВ в невязкой, несжимаемой среде с экспоненциальным распределением невозмущенной плотности $\rho_0(z) = \exp(-\lambda z)$, т. е. частота плавучести Брента — Вяйсяля

$$N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0(z)}{dz}$$

предполагается постоянной, $N(z) = \sqrt{\lambda g} = N = \text{const}$. В линейном приближении и с учетом приближения Буссинеска компоненты скорости (u, v, w) ВГВ удовлетворяют системе уравнений [1, 2, 5, 6]:

$$Lw = -\frac{\partial^2}{\partial t \partial z}\left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial t}\right] + \Delta \frac{\partial F_z}{\partial t};$$

$$\frac{\partial Lu}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right] + N^2 \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2\right)\frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^4 F_z}{\partial t^2 \partial x \partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N^2\right)\frac{\partial M}{\partial x \partial t}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial Lv}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}\right]+N^2\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\frac{\partial^2 F_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^4 F_z}{\partial t^2\partial y\partial z}+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\frac{\partial^2 M}{\partial y\partial t};$$

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+N^2\Delta,\ \ \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{1}$$

где F_x, F_y, F_z — массовые силы; M — плотность распределения источников массы. Далее будут рассмотрены поля ВГВ, возбужденные нелокальным движущимся источником возмущений в случае его равномерного и прямолинейного движения с постоянной скоростью V вдоль оси Ox. Такое поле обычно аппроксимируется как поле, возбужденное системой движущихся источников; при наличии подъемной силы следует принять F_z, при этом компоненты F_x, F_y массовых сил можно полагать равными нулю [5, 6, 10]. В результате систему (1) можно представить в виде

$$\begin{gathered}Lw=\frac{\partial^3 M}{\partial z\partial t^2}+\Delta\frac{\partial F_z}{\partial t};\ \ Lu=-\frac{\partial^3 F_z}{\partial t\partial x\partial z}+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\frac{\partial M}{\partial x};\\ Lv=-\frac{\partial^3 F_z}{\partial t\partial y\partial z}+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\frac{\partial M}{\partial y}.\end{gathered} \tag{2}$$

В пренебрежении переходными процессами, связанными с началом движения источника возмущений, правые части в (2) являются функциями $\xi=x+Vt,\ y,z.$ В силу линейности задачи решения уравнений (2) выражаются через функцию Грина G, т. е. через решение уравнения $LG(x+Vt,y,z)=\delta(x+Vt)\delta(y)\delta(z).$ Решение η уравнения $L\eta=\Pi$ с ненулевой правой частью Π выражается через функцию Грина G по формуле $\eta(\xi,y,z)=\iiint G(\xi-\gamma,\ y-\alpha,\ z-\beta)\ \Pi(\gamma,\alpha,\beta)\ d\gamma d\alpha d\beta.$ Единственность решения G обеспечивается условием излучения, т. е. рассмотрено решение с правой частью, экспоненциально нарастающей во времени: $LG_\varepsilon(t,x,y,z)=\exp(\varepsilon t)\delta(x+Vt,y,z),$ и предполагается, что G_ε имеет тот же рост по t : $G_\varepsilon=\exp(\varepsilon t)G_1(x+Vt,y,z).$ Тогда G строится однозначно и решение определяется как предел G_ε при $\varepsilon\to 0.$ Применяя оператор L к функции G_ε, получаем уравнение для определения G:

$$\left(\varepsilon+V\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]G+N^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G=\delta(\xi,y,z).$$

Решая это уравнение методом Фурье, можно определить

$$G=\frac{1}{(2\pi)^2}\iiint\frac{\exp(i(\alpha\xi+\beta y+\gamma z))\,d\alpha\ d\beta\ d\gamma}{(\alpha V-i\varepsilon)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-N^2(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Вычислим интеграл по γ, полагая $z>0$ (легко заметить, что G — четная функция z). Этот интеграл равен вычету полюса подынтегрального выражения, лежащего в верхней полуплоскости. При $\alpha^2V^2 < N^2$ этот полюс находится на расстоянии порядка ε от вещественной оси:

$$\gamma = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\;\sqrt{N^2-\alpha^2V^2+2i\alpha\varepsilon V}}{\alpha V - i\varepsilon}.$$

При $\alpha^2V^2 > N^2$ этот полюс лежит вблизи мнимой оси:

$$\gamma = \frac{i\left(\sqrt{\alpha^2V^2-N^2-2i\varepsilon\alpha V}\;\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\alpha V - i\varepsilon}.$$

Вычисляя соответствующий интеграл и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем искомую функцию в виде

$$G = \frac{i}{8\pi^2}\iint \frac{\exp\left(i\alpha\xi+\beta y+\sqrt{N^2-\alpha^2V^2}\;\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,|z|/\alpha V\right)}{\alpha V^2\sqrt{N^2-\alpha^2V^2}\;\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,d\alpha\, d\beta.$$

Примем $\chi^2 = N^2/V^2$, тогда

$$G = \frac{i}{8\pi^2V^2}\iint \frac{\exp\left(i\left[\alpha\xi+\beta y+\sqrt{\chi^2-\alpha^2}\;\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,|z|/\alpha\,|z|\right]\right)d\alpha\, d\beta}{\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\;\sqrt{\chi^2-\alpha^2}}.$$

Здесь под $\sqrt{\chi^2-\alpha^2}$ понимается арифметическое значение корня при $|\alpha| < \chi$ и $i\sqrt{\alpha^2-\chi^2}$ при $|\alpha| > \chi$, при интегрировании по α полюс обходится в нижней полуплоскости. Далее рассмотрим, как выражаются через функцию G возвышение $\zeta\left(w = \dfrac{\partial\zeta}{\partial t}\right)$ и компоненты скорости u, v в случае движущегося δ-образного источника массы и диполя. Пусть $F_z = 0$, $M = \delta(\xi, y, z)$, $\xi = x + Vt$. Тогда для компонент скорости u, v, w можно получить

$$Lw = V^2\frac{\partial^3\delta(\xi, y, z)}{\partial\xi\partial\xi\partial z};\quad Lu = \left(V^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+N^2\right)^2\frac{\partial\delta(\xi, y, z)}{\partial\xi};$$

$$Lv = \left(V^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+N^2\right)^2\frac{\partial\delta(\xi, y, z)}{\partial y}.$$

Для возвышения ζ имеем $L\zeta = V\dfrac{\partial^2\delta(\xi, y, z)}{\partial\xi\,\partial z}$. Поэтому в случае движущегося точечного источника массы возвышение $\zeta = \zeta_M$ и компоненты скорости $u = u_M$, $v = v_M$ равны:

$$\zeta_M = V\frac{\partial^2 G}{\partial\xi\partial z} = \frac{-i\,\mathrm{sign}\, z}{8\pi^2 V}\iint\frac{\exp\left(i\left(\alpha\xi+\beta y+\gamma|z|\right)\right)d\alpha\, d\beta}{\alpha};$$

$$u = u_M = V^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \chi^2 \right) \frac{\partial G}{\partial \xi} = -\frac{1}{8\pi^2} \iint \sqrt{\frac{\chi^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \, \exp\left(i \left(\alpha\xi + \beta y + \gamma |z| \right) \right) d\alpha \, d\beta;$$

$$v = v_M = V^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \chi^2 \right) \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{1}{8\pi^2} \iint \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{\chi^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \, \exp\left(i \left(\alpha\xi + \beta y + \gamma |z| \right) \right) d\alpha \, d\beta,$$

где $\gamma = \sqrt{\chi^2 - \alpha^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} / \alpha$. Для дипольного источника массы, ориентированного по направлению движения источника и имеющего единичный момент, получаем

$$\zeta = \zeta_D = \frac{\partial \zeta_M}{\partial \xi} = \frac{\operatorname{sign} z}{8\pi^2 V} \iint \exp\left(i \left(\alpha\xi + \beta y + \gamma |z| \right) \right) d\alpha \, d\beta;$$

$$u = u_D = \frac{\partial u_M}{\partial \xi} = -\frac{i}{8\pi^2} \iint \frac{\alpha \sqrt{\chi^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \, \exp\left(i \left(\alpha\xi + \beta y + \gamma |z| \right) \right) d\alpha \, d\beta;$$

$$v = v_D = \frac{\partial v_M}{\partial \xi} = -\frac{i}{8\pi^2} \iint \frac{\beta \sqrt{\chi^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \, \exp\left(i \left(\alpha\xi + \beta y + \gamma |z| \right) \right) d\alpha \, d\beta.$$

Далее примем

$$\Gamma = \frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{-1}{8\pi^2 V^2} \iint \frac{\exp\left(i \left(\alpha\xi + \beta y + \gamma |z| \right) \right) d\alpha \, d\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}}, \tag{3}$$

тогда

$$\zeta_D = V \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \xi \partial z}; \;\; u_D = V^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \chi^2 \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi}; \;\; v_D = V^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \chi^2 \right) \frac{\partial \Gamma}{\partial y}.$$

Построение асимптотик вдали от источника возмущений. Рассмотрим асимптотики интеграла (3) при $r = \sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2} \gg 1$, т. е. поля ВГВ вдали от движущегося источника возмущений. Учитывая, что фазовая функция в (3) нечетная функция переменных α, β, имеем

$$\Gamma = -\frac{1}{4\pi^2 V^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^\infty d\beta \, \frac{\exp\left(i \left(\alpha\xi + \beta y + \sqrt{\chi^2 - \alpha^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \, |z| / \alpha \right) \right)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}}.$$

В приведенном интеграле выполним замену переменных $\alpha = \chi p$, $\beta = \chi p q$. Примем $\xi = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta \cos\varphi$, $|z| = r \sin\theta \sin\varphi$ $(0 < \theta, \varphi < \pi)$, т. е. перейдем к сферическим координатам r, θ, φ. В результате запишем

$$\Gamma = \operatorname{Re} \Phi, \tag{4}$$

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi^2 V^2}\int_0^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\chi r\left(p\cos\theta + pq\sin\theta\cos\varphi + \sqrt{1-p^2}\sqrt{1+q^2}\,\sin\theta\sin\varphi\right)\right)dq}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Под $\sqrt{1-p^2}$ при $p>1$ понимается величина $i\sqrt{p^2-1}$, т. е. разрез функции $\sqrt{1-p^2}$ обходится при $\operatorname{Re} p\to\infty$ в нижней полуплоскости. Найдем сначала неравномерную асимптотику Γ: асимптотику, применимую при $r\to\infty$ и фиксированных значениях θ, φ, причем $\theta\neq 0,\ \pi/2,\ \pi,\ \varphi\neq 0.$ Вычисляя внутренний интеграл в (4) методом стационарной фазы, получаем

$$\Phi\approx -\frac{\exp(i\pi/4)}{(2\pi)^{3/2}V^2\sqrt{\chi r}}\int_0^{\infty}\frac{\exp\left(i\chi r\left(p\cos\theta + \sqrt{\sin^2\varphi - p^2}\,\sin\theta\right)\right)dp}{\left(\sin^2\varphi - p^2\right)^{1/4}\sqrt{\sin\theta}\,\sqrt{1-p^2}}. \qquad (5)$$

Выпишем неравномерную асимптотику интеграла (5), которая состоит из двух слагаемых: 1) вклад края области интегрирования; 2) вклад стационарной точки фазовой функции в (5). Учитывая, что эта точка $p=p_0=\sin\varphi\,\cos\theta$ оказывается в области интегрирования и дает вклад в асимптотику лишь при $\theta<\pi/2$

$$\Phi\approx -\frac{\exp(i\chi r\sin\varphi)\,\Theta(\cos\theta)}{2\pi V^2\chi r\sqrt{1-\sin^2\varphi\,\cos^2\theta}} + \frac{\exp(i\pi/4)\exp(i\chi r\sin\varphi\,\sin\theta)}{(2\pi)^{3/2}V^2(\chi r)^{3/2}\sqrt{\sin\varphi\,\sin\theta}\,\cos\theta}, \qquad (6)$$

где $\Theta(\cos\theta)=1$ при $\cos\theta>0$ и $\Theta(\cos\theta)=0$ при $\cos\theta<0$. Асимптотика (6) непригодна, во-первых, при $\cos\theta\to 0$ (т. е. при малых $\xi=x+Vt$ — вблизи траверсной плоскости движения источника возмущений) и, во-вторых, при $\sin\varphi\,\sin\theta\to 0$, т. е. при малых $|z|=\chi r\sin\varphi\,\sin\theta$ вблизи горизонтальной плоскости движения источника. Далее рассмотрим асимптотику, применимую вблизи траверсной плоскости. При $\cos\theta\to 0$ стационарная точка фазовой функции $p_0=\sin\varphi\cos\theta$ стремится к краю области интегрирования $p=0$. Алгоритм получения равномерной по $\cos\theta$ асимптотики интеграла (4) известен, и эта асимптотика выражается через интеграл Френеля [15]. Чтобы ее получить, необходимо заменить в (6) функцию $\Theta(\cos\theta)$ выражением

$$F^*\left(\sqrt{2\chi r\sin\varphi}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Theta}{2}\right)\right) + \frac{\exp\left(i\pi/4 - 2i\chi r\sin\varphi\,\sin^2(\pi/4-\theta/2)\right)}{2\sqrt{\pi}\,\sqrt{2\chi r\sin\varphi}\,\sin\left(\pi/4-\theta/2\right)},$$

где $F^*(\tau)$ — комплексно сопряженный интеграл Френеля, $F^*(\tau)=$ $=\dfrac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\tau}\exp(-is^2)\,ds$ [16–18]. Тогда

$$\Gamma = \operatorname{Re}\Phi \approx \operatorname{Re}\left[-\frac{\exp(i\chi r\sin\varphi)\, F^{*}\left(\sqrt{2\chi r\sin\varphi}\,\sin((\pi/4-\theta/2))\right)}{2\pi V^{2}\chi r\sqrt{1-\sin^{2}\varphi\cos^{2}\theta}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\exp(i\chi r\sin\varphi\sin\theta+i\pi/4)\left[\sqrt{1-\sin^{2}\varphi\cos^{2}\theta}-\sin((\pi/4-\theta/2))\sqrt{\sin\theta}\right]}{V^{2}(2\pi)^{3/2}(\chi r)^{3/2}\sqrt{\sin\varphi\sin\theta}\sqrt{1-\sin^{2}\varphi\cos^{2}\theta}\,\cos\theta}\right]. \qquad (7)$$

Полученное выражение (7) применимо при θ, близких к $\pi/2$, однако непригодно при $\sin\varphi\sin\theta\to 0$, т. е. вблизи горизонтальной плоскости источника. Далее преобразуем интеграл (4) по q, примем $q=\operatorname{sh}t$:

$$F(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\left(aq+b\sqrt{1+q^{2}}\right)\right)dq}{\sqrt{1+q^{2}}}=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i(a\operatorname{sh}+b\operatorname{ch}t)\right)dt.$$

За счет сдвига по t в полученном интеграле легко показать, что при $a^{2}-b^{2}=$ $=a_{1}^{2}-b_{1}^{2}$ имеет место равенство $F(a,b)=F(a_{1},b_{1})$, поэтому интеграл по q в (4) можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\chi r\sin\theta\left(pq\cos\varphi+\sqrt{1-p^{2}}\,\sqrt{1+q^{2}}\sin\varphi\right)\right)dq}{\sqrt{1+q^{2}}}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\chi r\sin\theta\left(pq+\sqrt{1+q^{2}}\sin\varphi\right)\right)dq}{\sqrt{1+q^{2}}}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\chi r\sin\theta\left(q\cos\varphi+\sqrt{1-p^{2}}\sqrt{1+q^{2}}\right)\right)dq}{\sqrt{1+q^{2}}}. \qquad (8)$$

Используя первое из равенств (8), запишем Φ в виде

$$\Phi=-\frac{1}{4\pi^{2}V^{2}}\int_{0}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{1-p^{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\chi r\left(p(\cos\theta+q\sin\theta)+\sqrt{1+q^{2}}\sin\theta\sin\varphi\right)\right)dq}{\sqrt{1+q^{2}}}. \qquad (9)$$

В интеграле (9), как и в (4), под $\sqrt{1-p^{2}}$ при $p>1$ понимается величина $i\sqrt{p^{2}-1}$, т. е. разрез функции $\sqrt{1-p^{2}}$ обходится при $\operatorname{Re}p\to\infty$ в нижней полуплоскости. Далее сдвинем контур интегрирования по переменной q вверх от действительной оси на величину i и при $\operatorname{Re}q>0$ повернем контур на некоторый угол $\varphi(0<\varphi<\pi/2)$ против хода часовой стрелки. По переменной p при $\operatorname{Re}p>0$ повернем контур интегрирования на некоторый угол $\vartheta(0<\vartheta<\pi/2)$ по ходу часовой стрелки, причем $\varphi<\vartheta$. Тогда при $\cos\theta\le 0$ и таком выборе контуров интегрирования показатель экспоненты в (9) будет иметь отрицательную вещественную часть, интеграл будет абсолютно сходиться при $p \to \infty$, $|q| \to \infty$ и в (9) можно будет заменить порядок интегрирования:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi^2 V^2} \int_{-\infty+i}^{\infty \exp(i\varphi)} \frac{\exp\left(i\chi r\sqrt{1+q^2}\,\sin\theta\,\sin\varphi\right)dq}{\sqrt{1+q^2}} \times$$
$$\times \int_0^{\infty \exp(-i\vartheta)} \frac{\exp(i\chi r(\cos\theta + q\sin\theta)p)dp}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Теперь внутренний интеграл при $\chi r \gg 1$ вычисляется асимптотически

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp(i\chi r(\cos\theta + q\sin\theta)p)\,dp}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{i}{\chi r(\cos\theta + q\sin\theta)} + O(\chi r)^{-3}$$

и для $\Gamma = \operatorname{Re}\Phi$ получим

$$\Gamma = \frac{-1}{4\pi^2 V^2 \chi r} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i\chi r\sqrt{1+q^2}\,\sin\theta\sin\varphi\right)dq}{\sqrt{1+q^2}\,(\cos\theta + q\sin\theta)} + O(\chi r)^{-3}, \tag{10}$$

где полюс при $q = -\operatorname{ctg}\theta$ обходится в нижней полуплоскости. Функцию (10) можно записать как $(r\sin\theta\sin\varphi = z)$:

$$\Gamma \approx -\frac{1}{4\pi^2 V^2(\chi r)} \operatorname{Im}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i\chi z\sqrt{1+q^2}\right)}{\sqrt{1+q^2}} \left(\frac{1}{\cos\theta + q\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta - q\sin\theta}\right)dq =$$

$$= \frac{-\cos\theta}{4\pi^2 V^2 \chi r} \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i\chi z\sqrt{1+q^2}\right)}{\sqrt{1+q^2}} \frac{dq}{\cos^2\theta - q^2\sin^2\theta},$$

где полюс $q = -\operatorname{ctg}\theta$ обходится в верхней полуплоскости, а $q = \operatorname{ctg}\theta$ — в нижней.

Докажем, что

$$\cos\theta \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i\tau\sqrt{1+q^2}\right)}{\sqrt{1+q^2}} \frac{dq}{\cos^2\theta - q^2\sin^2\theta} = -2\pi\left[\frac{J_0(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}\right)^n J_{2n}(\tau)\right]. \tag{11}$$

Здесь $J_{2n}(\tau)$ — функции Бесселя. Действительно, обозначая левую часть (11) через $F(\tau,\theta)$, получаем

$$F(\tau,\theta) + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 F(\tau,\theta)}{\partial\tau^2} = \cos\theta\,\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i\tau\sqrt{1+q^2}\right)dq}{\sqrt{1+q^2}} =$$
$$= \cos\theta\,\operatorname{Im}\left(\pi i\,H_0^{(1)}(\tau)\right) = \pi\cos\theta\,J_0(\tau),$$

где $H_0^{(1)}(\tau)$ — функция Ханкеля [16–18]. Поэтому $F(\tau,\theta)$ можно определить как решение уравнения $F(\tau,\theta)+\sin^2\theta\,\dfrac{\partial^2 F(\tau,\theta)}{\partial\tau^2}=\pi\cos\theta\,J_0(\tau),$ стремящееся к нулю при $|\tau|\to\infty,$ как $|\tau|^{-1/2}$, что следует из сформулированного правила обхода полюсов в интеграле (10). Тогда формула (11) проверяется прямой выкладкой, использующей рекуррентные формулы для функций Бесселя:

$$\frac{\partial^2 J_0(\tau)}{\partial\tau^2}=\frac{1}{2}\big(J_2(\tau)-J_0(\tau)\big);\;\; \frac{\partial^2 J_{2n}(\tau)}{\partial\tau^2}=\left(\frac{J_{2n-2}(\tau)}{4}-\frac{J_{2n}(\tau)}{2}+\frac{J_{2n+2}(\tau)}{2}\right).$$

Таким образом, при $\chi r\gg 1$ и $\cos\theta\le 0$ для Γ получено асимптотическое приближение

$$\Gamma=\frac{1}{2\pi V^2\chi r}\left(\frac{J_0(\chi z)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\mathrm{ctg}^2\frac{\theta}{2}\right)^n J_{2n}(\chi z)\right)+O(\chi r)^{-3}, \tag{12}$$

где $z=2\sin\theta\sin\varphi.$ Формулу (12) удобно использовать при малых $\chi z,$ так как $J_{2n}(\chi z)$ экспоненциально стремится к нулю при $2n>\chi z,$ и в ряде по степеням $-\mathrm{ctg}^2(\theta/2)$ достаточно брать относительно небольшое число слагаемых. Кроме того, дополнительным фактором сходимости является множитель $\mathrm{ctg}^2(\theta/2),$ стремящийся к нулю при $\theta=\pi.$ При $\chi z\gg 1$ и $\cos\theta<0$ формула (12) асимптотически эквивалентна формуле (7). Действительно, при $\cos\theta,$ отличном от нуля, $\cos\theta<C<0$ и $\chi z\gg 1,$ асимптотика интеграла (10) определяется стационарной точкой $q=0$ и совпадает со вторым членом в (6) (первый член при $\cos\theta<0$ обращается в нуль). Если $\cos\theta$ близок к нулю, то необходимо использовать асимптотику интеграла (10), равномерную по $\cos\theta,$ т. е. по расстоянию между полюсом $q=-\mathrm{ctg}\,\theta$ и стационарной точкой $q=0$ [15]. Эта асимптотика выражается через комплексно сопряженный интеграл Френеля и имеет вид

$$\Phi=-\frac{\exp(i\chi r\sin\varphi)}{2\pi V^2\chi r}T\left(\sqrt{2\chi r\sin\varphi}\,\sin(\pi/4-\theta/2)\right)+$$
$$+\frac{\exp(i\pi/4+i\chi r\,\sin\varphi\,\sin\theta)}{(2\pi)^{3/2}V^2(\chi r)^{3/2}\cos\theta\sqrt{\sin\varphi\sin\theta}};$$

$$T(\rho)=F^*(\rho)+\frac{\exp(i\pi/4-i\rho^2)}{2\sqrt{\pi}\,\rho};\;\; \rho=\sqrt{2\chi r\sin\varphi}\,\sin(\pi/4-\theta/2),$$

т. е. отличается от (7) на слагаемое

$$\frac{\exp(i\chi r\sin\varphi)}{2\pi V^2\chi r}\,\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}}{\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}}T(\rho). \tag{13}$$

Покажем, что выражение (13) мало при $\chi r \gg 1$, для чего рассмотрим функцию $\rho^2 T(\rho)$. Поскольку $T(\rho) = O(\rho^{-3})$ при $\rho \to -\infty$ и $\rho^2 T(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, функция $\rho^2 T(\rho)$ ограничена при $\rho < 0: \left|\rho^2 T(\rho)\right| < M$, где M — некоторое фиксированное число. Поэтому (13) можно переписать в виде

$$\frac{\exp(i\chi r \sin\varphi)}{2\pi V^2 \chi r} \frac{1-\sqrt{1-\sin^2\varphi\,\cos^2\theta}\;\rho^2 T(\rho)}{\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}\;2\chi r\sin\varphi\sin^2\left(\pi/4-\theta/2\right)},$$

и так как функция $\rho^2 T(\rho)$ ограничена и при $-1 < C < \cos\theta < 0$, выражение

$$\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}}{\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}\;\sin\varphi\sin^2\left(\pi/4-\theta/2\right)} =$$
$$= \frac{2\sin\varphi(1+\sin\theta)}{\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}\;\left(1+\sqrt{1-\sin^2\varphi\cos^2\theta}\right)}$$

также ограничено, тогда функция (13) имеет порядок $(\chi r)^{-2}$.

Рассмотрим значения $\cos\theta > 0$. Интеграл (4) после замены $p, q \to -p, -q$ записывается в форме

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi^2 V^2}\int_{-\infty}^{0}\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(iA)dq}{\sqrt{1+q^2}};$$

$$A = \chi r\left(-p\cos\theta + pq\sin\theta\cos\varphi + \sqrt{1-p^2}\,\sqrt{1+q^2}\,\sin\theta\cos\varphi\right).$$

Очевидно, что

$$\Phi(r,\pi-\theta,\varphi) = \frac{-1}{4\pi^2 V^2}\int_{0}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(iA)\,dq}{\sqrt{1+q^2}};$$

$$\Phi(r,\theta,\varphi) + \Phi(r,\pi-\theta,\varphi) = \Lambda(r,\theta,\varphi) = \frac{-1}{4\pi^2 V^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(iA)dq}{\sqrt{1+q^2}}; \qquad (14)$$

$$\Gamma(r,\theta,\varphi) = -\Gamma(r,\pi-\theta,\varphi) - \frac{\operatorname{Re}\Lambda(r,\theta,\varphi)}{4\pi^2 V^2}.$$

Поскольку асимптотика $\Gamma(r,\theta,\phi)$ при $\theta > \pi/2$ уже известна, достаточно найти асимптотику интеграла Λ. Используя второе равенство в (8), выражение для Λ можно представить как

$$\Lambda = -\frac{1}{4\pi^2 V^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\chi r p\cos\theta)dp}{\sqrt{1-p^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\chi r\sin\theta\left(q\cos\varphi + \sqrt{1-p^2}\,\sqrt{1+q^2}\right)\right)dq}{\sqrt{1+q^2}}$$

и, изменив порядок интегрирования, получить

$$\Lambda = -\frac{1}{4\pi^2 V^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\chi rq\sin\theta\cos\varphi)\,dq}{\sqrt{1+q^2}}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\chi r\left(-p\cos\theta+\sqrt{1-p^2}\,\sqrt{1+q^2}\,\sin\theta\right)\right)dp}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Асимптотика внутреннего интеграла при $\chi r \gg 1$ определяется методом стационарной фазы и оказывается равномерной по q, θ, φ. В результате имеем

$$\Lambda \approx -\frac{\exp(i\pi/4)}{(2\pi)^{3/2}V^2\sqrt{\chi r}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\chi r\left(q\sin\theta\cos\varphi+\sqrt{1+q^2\sin^2\theta}\right)\right)}{(1+q^2\sin^2\theta)^{1/4}\sqrt{1+q^2}}dq =$$

$$= -\frac{\exp(-i\pi/4)}{(2\pi)^{3/2}V^2\sqrt{\chi r}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left(i\chi r\left(q\cos\varphi+\sqrt{1+q^2}\right)\right)}{(1+q^2)^{1/4}\sqrt{\sin^2\theta+q^2}}dq. \qquad (15)$$

Рассмотрим критические точки интеграла (15). Во-первых, это стационарная точка $q=-\mathrm{ctg}\,\varphi$ и, во-вторых, две близкие к вещественной оси при малых θ точки ветвления $q=\pm i\sin\theta$. Если $\mathrm{ctg}\,\varphi$ не мал, т. е. $\cos\varphi=0\,(\cos\varphi=1)$, то асимптотика Λ состоит из суммы вкладов этих точек. Вклад стационарной точки вычисляется стандартным методом. Вклад точек $\pm i\sin\theta$ в главном члене асимптотики совпадает со значением модельного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\chi rq\cos\varphi)dq}{\sqrt{\sin^2\theta+q^2}} = 2K_0(\chi r\sin\theta\cos\varphi) = 2K_0(\chi y),$$

где $K_0(\tau)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента [16–18]. При $\tau\to\infty$ $K_0(\tau)$ экспоненциально стремится к нулю, при $\tau\to 0$ — логарифмически возрастает, $K_0(\tau)\approx\sqrt{\dfrac{\pi}{2\eta}}e^{-\tau}(\tau\to\infty)$, $K_0(\tau)\sim -\ln\dfrac{\tau}{2}-C$, $C=0{,}5772$ — постоянная Эйлера. Таким образом, если $\sin\theta$ не мал (достаточно потребовать $\sin\theta>(\chi r)^{-1/4}$), то асимптотика Λ вычисляется методом стационарной фазы:

$$\Lambda \approx \frac{-\exp(i\chi r\sin\varphi)}{2\pi V^2\chi r\sqrt{\sin^2\theta\,\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}}. \qquad (16)$$

Если $\sin\theta$ мал, то $\cos\varphi$ не мал $\left(\cos\theta>(\chi r)^{-1/4}\right)$ и следует учесть вклад точек ветвления $\pm i\sin\theta$:

$$\Lambda \approx -\frac{\exp(i\chi r\sin\varphi)}{2\pi V^2\chi r\sqrt{\sin^2\varphi\,\sin^2\theta+\cos^2\varphi}} - \frac{\exp(-i\pi/4+i\chi r)K_0(\chi r\sin\theta\cos\varphi)}{\sqrt{2}\pi^{3/2}V^2\sqrt{\chi r}}. \qquad (17)$$

Если малы и $\sin\theta$ и $\cos\varphi$, то асимптотики (16) и (17) непригодны. В этом случае стационарная точка оказывается вблизи точек ветвления и модельным интегралом является следующая функция, которая не сводится к известным специальным функциям [16–18]:

$$\Psi(\alpha,\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i(x-\alpha)^2)\,dx}{\sqrt{\beta^2+x^2}}.$$

Асимптотика Λ при малых $\cos\varphi$ и $\sin\theta$ выражается через функцию $\Psi(\alpha,\beta)$:

$$\Lambda\approx-\frac{\exp(-i\pi/4+i\chi r(1+\sin^2\varphi)/2)}{(2\pi)^{3/2}V^2\sqrt{\chi r}}\,\Psi\left(-\sqrt{\frac{\chi r}{2}}\cos\varphi,\ -\sqrt{\frac{\chi r}{2}}\sin\theta\right). \qquad (18)$$

Заключение. Рассмотрена функция $\Gamma(\xi,y,z)$, имеющая интегральное представление (4). Все компоненты поля ВГВ от точечного движущегося источника массы и диполя с единичным моментом выражены через функцию Γ по явным формулам. Асимптотика Γ на больших расстояниях от движущегося источника возмущений $(\chi=N/V,\ \xi=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\cos\varphi,\ |z|=r\sin\theta\sin\varphi)$ при $|z|>(r/\chi)^{1/2}$, $|\cos\theta|>(\chi r)^{-1/4}$ определена по формуле (6). Вблизи траверсной плоскости $\theta=\pi/2$ при $|z|>(r/\chi)^{1/2}$, $|\cos\theta|<c<1$ асимптотика Γ найдена по формуле (7). В окрестности горизонтальной плоскости движения источника при $z<(r/\chi)^{1/2}$ и перед источником, т. е. при $\cos\theta<0$ $(\pi/2<\theta<\pi)$, асимптотика Γ получена по выражению (12), причем при $\chi z\to\infty$ и $\cos\theta<0$ эта формула асимптотически эквивалентна (7). Наконец, вблизи горизонтальной плоскости движения источника $z<(r/\chi)^{1/2}$ и за ним, т. е. при $\cos\theta>0$ и при $\sin\theta>(\chi r)^{-1/4}$, дальние поля ВГВ описаны выражениями (14)–(18). В дальней зоне возбуждаемые волновые поля относительно малы по амплитуде и, как правило, хорошо описываются с помощью линейных уравнений, поэтому при исследовании дальнего распространения ВГВ прямые численные расчеты нецелесообразны. Как показано в настоящей работе, аналитические представления дальних полей ВГВ описываются сравнительно простыми аналитическими выражениями. Начальные и граничные условия для конкретных источников возмущений должны определяться из результатов прямого численного моделирования полной системы уравнений гидродинамики или из сугубо оценочных полуэмпирических соображений, позволяющих адекватно аппроксимировать реальные нелокальные источники возмущений некоторой системой модельных источников. Полученные асимптотические решения дают возможность эффективно рассчитывать основные амплитудно-фазовые характеристики возбуждаемых дальних полей ВГВ при определенных режимах генерации и, кроме того, качественно анализировать полученные решения, что важно для правильной постановки более сложных математических моделей волновой динамики реальных природных стратифицированных сред (океан, атмосфера Земли). Модельные решения позволяют в дальнейшем получить представления волновых полей с учетом реальной изменчивости и нестационарности этих сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pedlosky J.* Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Springer, 2003. 264 p.

2. *Sutherland B.R.* Internal gravity waves. Cambridge University Press, 2010. 394 p.

3. *Massel S.R.* Internal gravity waves in the shallow seas. Springer, 2015. 163 p.

4. *Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P.* Theory and applications of ocean surface waves. In 2 vols. World Scientific Publishing, 2017. 1500 p.

5. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Wave dynamics of stratified mediums. М.: Наука, 2012. 584 с.

6. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Волны в стратифицированных средах. М.: Наука, 2015. 735 с.

7. *Grue J., Jensen A.* Orbital velocity and breaking in steep random gravity waves // J. Geoph. Res. 2012. Vol. 117. No. C7. Art. C013. DOI: 10.1029/2012JC008024

8. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6. № 2. С. 55–70.

9. *Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V.* Asymptotical analysis of internal gravity wave dynamics in stratified medium // Appl. Math. Sciences. 2014. Vol. 8. No. 5. P. 217–240.
DOI: 0.12988/ams.2014.311637

10. *Abdilghanie A.M., Diamessis P.J.* The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // J. Fluid Mech. 2013. Vol. 720. P. 104–139.

11. *Rees T., Lamb K.G., Poulin F.J.* Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation // SIAM J. Appl. Math. 2012. Vol. 72. Iss. 4. P. 1041–1060. DOI: 10.1137/110842892

12. *Navrotsky V.V., Liapidevskii V.Yu., Pavlova E.P.* Features of internal waves in a shoaling thermocline // Int. J. Geosciences. 2013. Vol. 4. P. 871–879. DOI: 10.4236/ijg.2013.45081

13. *Recurrent* internal waves in a small lake: potential ecological consequences for metalimnetic phytoplankton populations / A. Pannard, B.E. Beisner, D.F. Bird, J. Braun, D. Planars, M. Bormans // Limnology and Oceanography. 2011. Vol. 1. Iss. 1. P. 91–109.
DOI: 10.1215/21573698-1303296

14. *Vlasenko V., Stashchuk N., Inall M., Hopkins J.* Tidal energy conversion in a global hotspot: on the 3D dynamics of baroclinic tide sat the Celtic Sea shelf break // J. Geophys. Res. Oceans. 2014. Vol. 119. Iss. 6. P. 3249–3265. DOI: 10.1002/2013JC009708

15. *Borovikov V.A.* Uniform stationary phase method. London, Institution of Electrical Engineers. 1994. 233 p.

16. *White R.B.* Asymptotic analysis of differential equations. Imperial College Press, 2005. 304 p.

17. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of mathematical functions. Dover Publications Inc., 1992. 1046 p.

18. *Watson G.N.* A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press, 1995. 804 p.

Булатов Виталий Васильевич — д-р физ.-мат. наук, д-р экон. наук, профессор, старший научный сотрудник ИПМех РАН (Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1).

Владимиров Юрий Владимирович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМех РАН (Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Булатов В.В., Владимиров Ю.В. Дальние поля внутренних гравитационных волн от движущихся источников возмущений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 4. С. 73–89. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-73-89

FAR FIELDS OF INTERNAL GRAVITATIONAL WAVES FROM MOVING PERTURBANCE SOURCES

V.V. Bulatov internalwave@mail.ru
Yu.V. Vladimirov vladimyura@yandex.ru

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Abstract

An important mechanism for excitation of far fields of internal gravitational waves in natural (oceanic, atmospheric) and artificial stratified media is their generation by perturbance sources of various physical nature: natural (a moving typhoon, wind wave, unevenness of ocean relief, changes in density fields and currents, leeward mountains) and anthropogenic (marine technological structures, collapse of the field of turbulent mixing, underwater explosions). The system of hydrodynamic equations describing wave perturbations of stratified media in a general form is a rather complex mathematical problem both in terms of proving the existence and uniqueness theorems for solutions in the corresponding functional classes, and from the computational point of view. The main results of solving problems on generation of internal gravitational waves are presented in the most general integral form, and in this case the integral solutions obtained require the development of numerical and asymptotic methods for their investigation that allow qualitative analysis and rapid estimation of the solutions obtained. Therefore in modern scientific studies in the analysis of wave phenomena in real stratified media, simplified asymptotic and analytical models are widely used. In linear approximation, the existing approaches to describing the wave pattern of excited fields are based on the representation of wave fields by Fourier integrals. The work studies far fields of internal gravitational waves excited by a perturbance source moving in an infinite vertical stratified medium. The propagation of waves in an inviscid, incompressible medium with an exponential distribution of the unperturbed density is considered. In linear approximation and Boussinesq approximation, uniform asymp-

Keywords

Stratified medium, internal gravitational waves, far fields, uniform asymptotics, moving source

totics of the excited fields of internal gravitational waves were constructed far from the moving perturbance source, including the vicinity of the traverse plane and the horizon of motion. The obtained asymptotic solutions make it possible to efficiently calculate the main amplitude-phase characteristics of the excited far fields of internal gravitational waves under certain generation modes and, in addition, qualitatively analyze the solutions obtained, which is important for the correct formulation of more complex mathematical models of wave dynamics of real natural stratified media

Received 10.10.2017

This work was carried out within the framework of the state task (no. AAAA-A17-117021310375-7)

REFERENCES

[1] Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Springer, 2003. 264 p.

[2] Sutherland B.R. Internal gravity waves. Cambridge University Press, 2010. 394 p.

[3] Massel S.R. Internal gravity waves in the shallow seas. Springer, 2015. 163 p.

[4] Mei C.C., Stiassnie M., Yue D.K.-P. Theory and applications of ocean surface waves. In 2 vols. World Scientific Publishing, 2017. 1500 p.

[5] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Wave dynamics of stratified mediums. Moscow, Nauka Publ., 2012. 584 p.

[6] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Volny v stratifitsirovannykh sredakh [Waves in stratified medium]. Moscow, Nauka Publ., 2015. 735 p.

[7] Grue J., Jensen A. Orbital velocity and breaking in steep random gravity waves. *J. Geoph. Res.*, 2012, vol. 117, no. C7, art. C013. DOI: 10.1029/2012JC008024

[8] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Fields of internal gravity waves in heterogeneous and non-stationary stratified media. *Fundamental'naya i prikladnaya gidrofizika* [Fundamental and Applied Hydrophysics], 2013, vol. 6, no. 2, pp. 55–70 (in Russ.).

[9] Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Asymptotical analysis of internal gravity wave dynamics in stratified medium. *Appl. Math. Sciences*, 2014, vol. 8, no. 5, pp. 217–240.
DOI: 0.12988/ams.2014.311637

[10] Abdilghanie A.M., Diamessis P.J. The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake. *J. Fluid Mech.*, 2013, vol. 720, pp. 104–139.

[11] Rees T., Lamb K.G., Poulin F.J. Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 2012, vol. 72, iss. 4, pp. 1041–1060. DOI: 10.1137/110842892

[12] Navrotsky V.V., Liapidevskii V.Yu., Pavlova E.P. Features of internal waves in a shoaling thermocline. *Int. J. Geosciences*, 2013, vol. 4, pp. 871–879. DOI: 10.4236/ijg.2013.45081

[13] Pannard A., Beisner B.E., Bird D.F., Braun J., Planars D., Bormans M. Recurrent internal waves in a small lake: potential ecological consequences for metalimnetic phytoplankton populations. *Limnology and Oceanography*, 2011, vol. 1, iss. 1, pp. 91–109.
DOI: 10.1215/21573698-1303296

[14] Vlasenko V., Stashchuk N., Inall M., Hopkins J. Tidal energy conversion in a global hotspot: on the 3D dynamics of baroclinic tide sat the Celtic Sea shelf break. *J. Geophys. Res. Oceans*, 2014, vol. 119, iss. 6, pp. 3249–3265. DOI: 10.1002/2013JC009708

[15] Borovikov V.A. Uniform stationary phase method. London, Institution of Electrical Engineers. 1994. 233 p.

[16] White R.B. Asymptotic analysis of differential equations. Imperial College Press, 2005. 304 p.

[17] Abramowitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. Dover Publications Inc., 1992. 1046 p.

[18] Watson G.N. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press, 1995. 804 p.

Bulatov V.V. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Dr. Sc. (Econ.), Professor, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences (IPMech RAS) (Vernadskogo prospekt 101/1, Moscow, 119526 Russian Federation).

Vladimirov Yu.V. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences (IPMech RAS) (Vernadskogo prospekt 101/1, Moscow, 119526 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Bulatov V.V., Vladimirov Yu.V. Far Fields of Internal Gravitational Waves from Moving Perturbance Sources. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 4, pp. 73–89 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-73-89