УДК 531.36

Т. В. Муратова

О СТАБИЛИЗАЦИИ ЦИРКУЛЯРНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫМИ ДИССИПАТИВНЫМИ СИЛАМИ

Решена задача о стабилизации циркулярной системы с двумя степенями свободы нелинейными диссипативными силами. Показано, что влияние диссипативных сил неоднозначно — они могут как стабилизировать циркулярную систему вплоть до асимптотической устойчивости, так и дестабилизировать ее.

E-mail: tamura@bk.ru

Ключевые слова: стабилизация, асимптотическая устойчивость, циркулярная система, диссипативные силы, функция Ляпунова.

Уравнения движения циркулярной системы под действием диссипативных сил. Под циркулярной системой понимается механическая система, находящаяся под действием потенциальных и позиционных неконсервативных сил. Последние линейно зависят от координат и характеризуются кососимметрической матрицей. Уравнения движения циркулярной системы с двумя степенями свободы при действии нелинейных диссипативных сил можно привести к виду

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \lambda_1 x_1 + \nu x_2 = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1};\\ &\ddot{x}_2 + \lambda_2 x_2 - \nu x_1 = -\frac{\partial R}{\partial \dot{x}_2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где функция Релея $R(x_1, \dot{x}_1.x_2, \dot{x}_2)$ имеет вид

$$R = \frac{1}{2n}(\beta_1 x_1^2 \dot{x}_1^{2n} + \beta_2 x_2^2 \dot{x}_2^{2n}) + \\ + \frac{1}{2n+2}(\gamma_1 \dot{x}_1^{2n+2} + \gamma_2 \dot{x}_2^{2n+2}), \quad \beta_i, \gamma_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Случай $n = 1$ был детально исследован в работе [1]. Рассмотрим общий случай любого $n \in N$. Приведем систему (1) к безразмерному виду, введя безразмерное время $\tau = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}\, t$. Отметим, что указанная замена корректна, так как необходимым условием устойчивости системы (1) является неравенство $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ при $R = 0$. Система (1) примет вид

$$\begin{aligned} &x_1'' + kx_1 + \nu_0 x_2 + \beta_1 x_1^2 {x_1'}^{2n-1} + \gamma_1 {x_1'}^{2n+1} = 0;\\ &x_2'' + (1-k)x_2 - \nu_0 x_1 + \beta_2 x_2^2 {x_2'}^{2n-1} + \gamma_2 {x_2'}^{2n+1} = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\nu_0 = \dfrac{\nu}{\lambda_1 + \lambda_2}$, а обозначения для коэффициентов при нелинейных слагаемых сохранены прежними.

В системе (2) производные берутся по переменной τ, а $k = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Можно показать, что при выполнении неравенства

$$k(1-k) + \nu_0^2 < \frac{1}{4} \tag{3}$$

линейная система при $\beta_i = \gamma_i = 0$ устойчива. Характеристическое уравнение имеет две пары чисто мнимых корней: $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, где $\omega_1,\ \omega_2$ удовлетворяют уравнению частот

$$\omega^4 - \omega^2 + k(1-k) + \nu_0^2 = 0.$$

Для удобства представим систему (2) в матричной форме

$$x'' + Ax + F(x, x') = 0, \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2)^{\text{т}}, \quad A = \begin{pmatrix} k & \nu_0 \\ -\nu_0 & 1-k \end{pmatrix}, \quad F = (F_1, F_2)^{\text{т}},$

$$F_1 = \beta_1 x_1^2 {x'_1}^{2n-1} + \gamma_1 {x'_1}^{2n+1},$$

$$F_2 = \beta_2 x_2^2 {x'_2}^{2n-1} + \gamma_2 {x'_2}^{2n+1}.$$

Линейная и нелинейная нормализация. В системе (4) сделаем линейную замену переменных:

$$x = Ly, \quad y = (y_1, y_2)^{\text{т}},$$
$$L = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\nu_0}{\omega_2^2 - k} \\ \dfrac{\nu_0}{1 - k - \omega_1^2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Поскольку линейная система является неконсервативной (матрица A не является симметрической), то для перехода к нормальным координатам необходимо провести анализ сопряженной системы

$$x'' + A^{\text{т}} x = 0$$

и найти сопряженную матрицу L^* собственных форм. Поскольку матрица $A^{\text{т}}$ получается из матрицы A заменой ν_0 на $-\nu_0$, то и L^* имеет вид матрицы L после замены ν_0 на $-\nu_0$, Матричное уравнение (4) преобразуется к виду

$$y'' + \Lambda y + \alpha^{-1} F(Ly, Ly') = 0, \tag{6}$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2),\ \ \alpha = 1 - \dfrac{\nu_0^2}{(\omega_2^2 - k)^2} > 0.$

В системе (6) сделаем еще одну замену переменных

$$y_1 = \frac{1}{2}(u_1 + \overline{u_1}), \quad y_1' = \frac{i\omega_1}{2}(u_1 - \overline{u_1});$$
$$y_2 = \frac{1}{2}(u_2 + \overline{u_2}), \quad y_2' = \frac{i\omega_2}{2}(u_2 - \overline{u_2}). \tag{7}$$

Относительно новых переменных u_1, u_2 система принимает вид

$$u_1' = i\omega_1 u_1 + \frac{i}{\omega_1}\alpha^{-1}\Phi_1;$$
$$u_2' = i\omega_2 u_2 + \frac{i}{\omega_2}\alpha^{-1}\Phi_2, \tag{8}$$

где

$$\Phi_1 = \beta_1 x_1^2 {x_1'}^{2n-1} + \gamma_1 {x_1'}^{2n+1} - \delta(\beta_2 x_2^2 {x_2'}^{2n-1} + \gamma_2 {x_2'}^{2n+1});$$
$$\Phi_2 = \beta_1 x_1^2 {x_1'}^{2n-1} + \gamma_1 {x_1'}^{2n+1} - \delta(\beta_1 x_1^2 {x_1'}^{2n-1} + \gamma_1 {x_1'}^{2n+1}); \tag{9}$$
$$\delta = \frac{\nu_0}{\omega_2^2 - k}.$$

В выражениях (9) необходимо последовательно провести замены переменных (5) и (7).

После линейной нормализации сделаем нелинейную нормализацию, в результате в преобразованной системе будут представлены только резонансные члены.

Предположим, что отсутствует внутренний резонанс $\omega_1 \neq (2m + 1)\omega_2$. С помощью полиномиального преобразования

$$u_k = z_k + Z_k^{(2n+1)}(z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}), \quad k = 1, 2, \tag{10}$$

где $Z_k^{(2n+1)}$ — однородная форма порядка $(2n+1)$, систему (8) можно привести к нормальной форме до членов $(2n+1)$ включительно.

Члены тождественного резонанса в первом уравнении — $A_{11} z_1^{n+1}\overline{z_1^n}$ и $A_{12} z_1 z_2^n \overline{z_2^n}$, во втором уравнении — $A_{21} z_2 z_1^n \overline{z_1^{-n}}$ и $A_{22} z_2^{n+1}\overline{z_2^n}$.

В результате преобразований нормализованная система принимает вид

$$z_1' = i\omega_1 z_1 + A_{11} z_1^{n+1}\overline{z_1^n} + A_{12} z_1 z_2^n \overline{z_2^n};$$
$$z_2' = i\omega_2 z_2 + A_{21} z_2 z_1^n \overline{z_1^{-n}} + A_{22} z_2^{n+1}\overline{z_2^n}. \tag{11}$$

В системе (11) коэффициенты A_{ij} определяются формулами

$$A_{11} = -\frac{(2n-1)!\,\omega_1^{2n-2}}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!\,\alpha}[\beta_1 + (2n+1)\omega_1^2\gamma_1 - \\ - \delta^{2n+2}(\beta_2 + (2n+1)\omega_1^2\gamma_2)];$$

$$A_{22} = -\frac{(2n-1)!\omega_{12}^{2n-2}}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!\alpha}[\beta_2 + (2n+1)\omega_2^2\gamma_2 - \\ - \delta^{2n+2}(\beta_1 + (2n+1)\omega_2^2\gamma_1)];$$

$$A_{12} = -\frac{(2n-1)!\omega_2^{2n-2}}{2^{2n}n!(n-1)!\alpha}\delta^2[-(\beta_2 + (2n+1)\omega_2^2\gamma_2) + \\ + \delta^{2n+2}(\beta_1 + (2n+1)\omega_2^2\gamma_1)];$$

$$A_{21} = -\frac{(2n-1)!\omega_1^{2n-2}}{2^{2n}n!(n-1)!\alpha}\delta^2[-(\beta_1 + (2n+1)\omega_1^2\gamma_1) + \\ + \delta^{2n+2}(\beta_2 + (2n+1)\omega_1^2\gamma_2)].$$

Анализ устойчивости. Сделаем в системе (11) замену переменных

$$z_1 = \sqrt{\rho_1}e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \sqrt{\rho_2}e^{i\varphi_2}.$$

Тогда при $\rho_2 = 0$ уравнение для ρ_1 имеет вид $\rho_1' = A_{11}\rho_1^{\overline{\frac{n+1}{2}}}$. При $A_{11} > 0$ уравнение имеет неограниченно растущее решение. Из теоремы Четаева о неустойчивости следует неустойчивость нулевого решения, при этом в качестве функции Четаева можно взять $V = \rho_1$. Аналогично неустойчивость будет иметь место и при $A_{22} > 0$.

Таким образом, при $A_{11} > 0$ или $A_{22} > 0$ равновесие исходной системы (1) $x_1 = x_2 = 0$, $x_1' = x_2' = 0$ будет неустойчивым.

Для асимптотической устойчивости необходимо, чтобы $A_{11} < 0$, $A_{22} < 0$.

Рассмотрим частные случаи. Относительно переменных ρ_1, ρ_2 система (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_1' &= 2A_{11}\rho_1^{n+1} + 2A_{12}\rho_1\rho_2^n; \\ \rho_2' &= 2A_{21}\rho_2\rho_1^n + 2A_{22}\rho_2^{n+1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, тогда $A_{11} < 0$ при $\delta^{2n+2} < \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$, а $A_{22} < 0$ при $\delta^{2n+2} < \dfrac{\beta_2}{\beta_1}$. Если $\beta_1 > \beta_2$, то $\delta^{2n+2} < \dfrac{\beta_2}{\beta_1}$, а $A_{12} < 0$ при $\delta^{2n+2} > \dfrac{\beta_2}{\beta_1}$ и $A_{21} > 0$ при $\delta^{2n-2} < \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$.

Из изложенного делаем основной вывод: равновесие асимптотически устойчиво при выполнении неравенств

$$\sqrt[2n-2]{\frac{\beta_2}{\beta_1}} < \delta < \sqrt[n+2]{\frac{\beta_2}{\beta_1}}. \tag{13}$$

Это следует из существования положительно определенной функции Ляпунова [2]

$$V = \rho_1 + \alpha\rho_2, \quad \alpha > 0. \tag{14}$$

Производная $\dot{V}$ может быть отрицательно определена выбором α. Если $A_{12} > 0$ и $A_{21} < 0$, то условием асимптотической устойчивости являются неравенства (13).

Аналогично рассматривается случай, когда $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Например, при $A_{12} > 0$ и $A_{21} < 0$ условием асимптотической устойчивости (если $\gamma_2 > \gamma_1$) является неравенство

$$\sqrt[2n-2]{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} < \delta < \sqrt[2n-2]{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \ .$$

Из полученных результатов следует, что для асимптотической устойчивости равновесия значение циркулярной силы, которая характеризуется параметром δ, должно быть одновременно не меньше и не больше полученных значений, выраженных через параметры исходной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А г а ф о н о в С. А. Об устойчивости циркулярной системы при действии нелинейных диссипативных сил // Изв. РАН. – МТТ. – 2009. – № 3. – С. 41–46.
2. Х а з и н Л. Г., Ш н о л ь Э. Э. Устойчивость критических положений равновесия. – Пущино: Центр биол. иссл. АН СССР. –1985. – 216 с.

Статья поступила в редакцию 24.06.2011

Татьяна Владимировна Муратова окончила МГУ им. М.В. Ломоносова в 1982 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор 20 научных работ в области теории устойчивости.

T.V. Muratova graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1982. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University, Winner of the RF Government Prize in Science and Technology. Author of 20 publications in the field of theory of stability.