

А. А. Локтев, В. В. Вершинин

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ
ПРОТИВОУДАРНОЙ ИЗОЛЯЦИИ
С ВЯЗКОУПРУГИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ**

Решена задача динамического контакта ударника в виде твердого тела и мишени в виде балки с учетом расположенного между ними в зоне контакта противоударного изолятора, состоящего из упругого и вязкого элементов, соединенных параллельно и последовательно в разных вариантах изолятора. Определяются динамические характеристики контактного взаимодействия, оценивается вклад в значения конечных характеристик упругих и вязких параметров изолятора. Рассматривается влияние упругих и вязких характеристик изолятора на контактную силу, динамический прогиб мишени и ускорение точек мишени, находящихся под изолятором, а также выявляются зависимости динамических характеристик и времени возникновения их максимумов от типа изолятора.

E-mail: prtlokt@yandex.ru

Ключевые слова: ударное воздействие, противоударный изолятор, вязкоупругий элемент Кельвина–Фойгта, вязкоупругий элемент Максвелла, динамические характеристики.

Задачи, связанные с моделированием противоударных систем и изоляторов, рассматривались неоднократно отечественными и зарубежными учеными [1–4]. В некоторых работах определялись контактная сила в месте удара [1, 2], перемещения точек мишени [1–4], ускорения, которые приобретает мишень после удара по ней [1, 3]. Расширяющиеся потребности противоударной защиты пассажиров, конструкций и механизмов заставляют современных исследователей более точно описывать процессы приложения динамической нагрузки и деформирования основания, а это влечет за собой усложнение моделей мишени и ударника. В работах [2, 5, 6] рассматривались ударники, обладающие вязкоупругими, нелинейно упругими и упругопластическими свойствами, также изучалось влияние упругих и неупругих свойств мишени на конечные динамические характеристики удара [2, 5, 7, 8] с учетом стационарных и нестационарных процессов, появляющихся в них после начала контакта. Несмотря на существенные достижения в фундаментальных исследованиях по теории удара и решению практических задач защиты пассажиров транспорта, некоторые вопросы остаются недостаточно изученными. Одним из таких вопросов является выявление оптимальных значений параметров вязкоупругих изоляторов двух простейших типов: с ограниченной (элемент

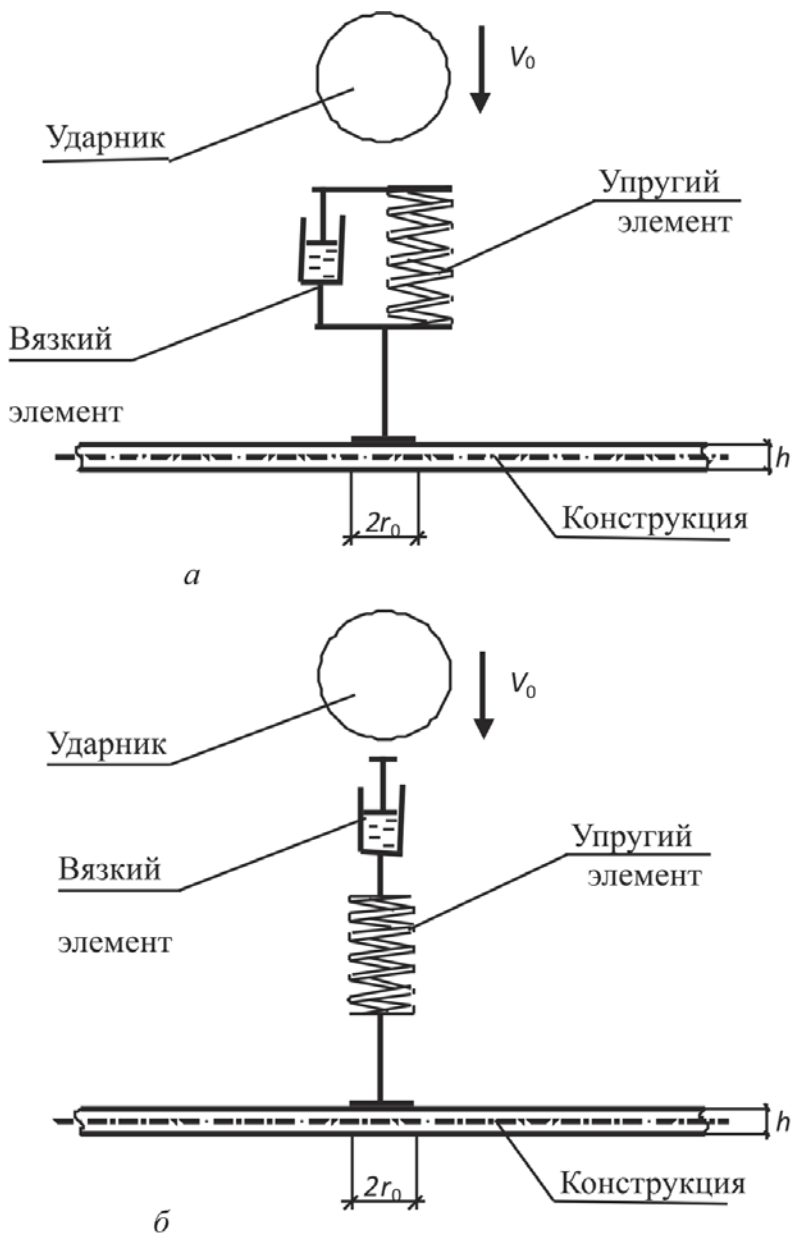


Рис. 1. Вид противоударных изоляторов с вязкоупругими элементами Кельвина–Фойгта (а) и Максвелла (б)

Кельвина–Фойгта) и неограниченной (элемент Максвелла) деформациями вязкого демпфера, и определение возможностей использования того или иного вязкоупругого элемента по характеру и времени изменения основных характеристик динамического контакта.

Постановка задачи. В работе рассматривается механическая система (рис. 1) из двух тел (ударника и мишени) и расположенным между ними изолятором, состоящим из вязкого и упругого элементов. На рис. 1, а представлен изолятор с линейным вязкоупругим элементом типа Кельвина–Фойгта, а на рис. 1, б — изолятор с вязкоупругим элементом Максвелла.

Предполагается, что ударник и точки мишени могут двигаться прямолинейно вдоль одной и той же прямой. Движение ударника и мишени после начала контакта для модели вязкоупругого тела типа Кельвина–Фойгта относительно основания описывается [1] системой

дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1 (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_3) + K (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + C (z_1 - z_2) &= 0, \\ m_2 (\ddot{z}_2 + \ddot{z}_3) + K (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + C (z_2 - z_1) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

для модели вязкоупругого элемента Максвелла справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} m_1 (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_3) - K \int_0^t (\dot{z}_1 - \dot{z}_2) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt' + C (z_1 - z_2) &= 0, \\ m_2 (\ddot{z}_2 + \ddot{z}_3) - K \int_0^t (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt' + C (z_2 - z_1) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где m_1 и m_2 — массы тел ударника и мишени соответственно; z_1 и z_2 — координаты ударника и мишени относительно верхней точки изолятора; z_3 — координата верхней точки изолятора относительно инерциальной системы отсчета (ось z направлена перпендикулярно срединной плоскости мишени, оси x и y располагаются в плоскости мишени); K — коэффициент вязкого сопротивления; C — коэффициент жесткости упругого элемента.

Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ крайняя точка противоударного изолятора и область мишени под изолятором (контактная область) покоятся, т.е. уравнения (1), (2) рассматриваются при начальных условиях

$$x(t=0) = 0, y(t=0) = 0, \dot{x}(t=0) = 0, \dot{y}(t=0) = 0. \quad (3)$$

Ускорение $\ddot{z}(t)$ характеризует внешнее воздействие, приложенное к верхней точке изолятора, и считается заданной функцией времени. В качестве критериев работы изолятора могут быть приняты такие величины, как сила, действующая на мишень под изолятором,

$$I_1 = \max_{t \in [0, \infty]} P(t), \quad (4)$$

максимальное смещение мишени

$$I_2 = \max_{t \in [0, \infty]} y(t), \quad (5)$$

ускорение, которое получают точки защищаемой от ударного воздействия конструкции

$$I_3 = \max_{t \in [0, \infty]} \ddot{y}(t). \quad (6)$$

Таким образом, имеются три характеристики, одна из которых — силовая, вторая — геометрическая, третья — кинематическая. Для полного решения задачи противоударной изоляции и для выбора закона изменения управляемой силой F и способа ее генерации (пиропатрон, магнитная жидкость и т.д.) необходимо определить все три критерия

изолятора. Подобная задача решалась в [1] для изолятора с вязкоупругим элементом Кельвина–Фойгта и для случая, когда контактная сила изменяется мгновенно (мгновенный удар), т.е. $\dot{z}(t) = -V_0\delta(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Метод решения. В данной работе рассматривается немгновенный удар, т.е. контактная сила достигает своего максимального значения через какое-то время после касания ударником изолятора. В работах [6, 9] приведены примеры расчета, основанные на приближенной теории типа Сен-Венана для поперечного удара по балке, для которой учитываются вынужденные колебания, а контактная сила изменяется со временем по гармоническому закону, но предполагается, что ударное взаимодействие носит неупругий характер, и не учитывается зависимость контактной силы от местных деформаций в зоне взаимодействия тел. Несмотря на распространенность данного подхода в инженерных задачах, результаты его использования не дают полной информации о характере процесса соударения и об изменении силы взаимодействия между соударяющимися телами по времени, и поэтому такая постановка неприменима в задаче противоударной изоляции, в которой важна каждая миллисекунда. Для нахождения аналитической зависимости контактной силы от времени можно применить теорию удара С.П. Тимошенко, как сделано в [10] для случая удара по балке на упругом основании. Полученная в [10] искомая функция $P = P(t)$ применима только при рассмотрении первого контакта между соударяющимися телами. В настоящей работе сделана попытка обобщить данный подход на случай вязкоупругих моделей ударного взаимодействия и большего временного интервала.

В работе предполагается, что за время ударного взаимодействия стационарные и нестационарные процессы деформирования мишени не дошли до конца балки, т.е. рассматривается достаточно протяженная балка.

В качестве мишени рассматриваем балку, шарнирно опертую по краям, т.е. граничные условия можно записать в виде

$$y(-l, 0) = y(l, 0) = \frac{\partial^2 y(-l, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(l, 0)}{\partial x^2} = 0, \quad (7)$$

где l — полудлина балки.

В качестве начальных условий ударного взаимодействия тел принимаются следующие:

$$y(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

При нахождении аналитического выражения силы взаимодействия между ударяющим телом и балкой воспользуемся алгоритмом, приведенным в [10]. При этом изложенная теория будет применима к

случаям соударения с балкой таких тел, для которых общая нормаль в точке соприкосновения недеформированных поверхностей тела и балки проходит через центр инерции тела и причем вертикально. Кроме того, уравнение поверхности тела в точках начального касания балки и их окрестностях должно быть свободно от аналитических особенностей и не должно содержать особых точек, а кривизна ударяющего тела в тех же точках не должна быть равна нулю, иначе невозможно применение расширенной теории Герца [6, 10].

Дифференциальное уравнение колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\rho}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{q(x, t)}{EI}, \quad (9)$$

где ρ — приведенная к длине масса стержня, E — модуль Юнга, I — момент инерции, $q(x, t)$ — внешняя поперечная нагрузка.

Данное уравнение содержит производную по времени и производную по координате, для его решения необходимо избавиться или от одного типа производных с помощью условий совместности, или от другого — с помощью преобразования Лапласа. Запишем уравнение (9) в пространстве изображений и представим неизвестные перемещения мишени и внешнюю нагрузку в следующем виде [10]:

$$\tilde{y}(x, p) = \frac{2\tilde{P}(p)l^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 n^4} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (10)$$

где p — параметр преобразования Лапласа, a — координаты точки приложения контактной силы $\tilde{P}(p)$, тильда над функцией обозначает ее представление в пространстве изображений. Зависимости между функциями и изображениями указаны в [11]. Граничные условия в пространстве изображений остаются прежними.

В уравнении (9) можно перейти от определения функции прогибов к определению прогиба от действия единичной силы, для этого необходимо пронормировать функцию $\tilde{y}(x, p)$ зависимостью $\tilde{P}(p)$:

$$u(x, p) = \frac{\tilde{y}(x, p)}{\tilde{P}(p)} = \frac{2l^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 n^4} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (11)$$

После определения зависимости для прогиба балки можно перейти к определению контактной силы в месте взаимодействия двух тел, для этого рассмотрим уравнение движения ударника после начала контакта, воспользовавшись уравнением

$$m_1 \frac{d^2 s}{dt^2} = m_1 g - P(t), \quad (12)$$

где $s(t) = \alpha(t) + y(a, t)$ — полное перемещение ударника, $\alpha(t)$ — деформации изолятора, а прогиб $y(a, t)$ вычисляется в месте ударного воздействия.

Динамический контакт происходит при соблюдении начальных условий

$$s(t=0) = 0, \quad \frac{ds(a,0)}{dt} = V_0. \quad (13)$$

В пространстве изображений уравнение (12) с учетом начальных условий (13) примет вид

$$\tilde{P}(p) = -m_1 p^2 \tilde{s}(p) + m_1 p V_0 + m_1 g. \quad (14)$$

Зависимость местного смятия от контактной силы определяется при решении контактной задачи механическими и геометрическими параметрами контактирующих тел, в качестве основного соотношения чаще всего используется модифицированная формула Герца

$$\alpha(t) = b P(t)^q, \quad (15)$$

в случае вязкоупругого элемента Максвелла контактная сила принимает интегральный вид с экспоненциальным ядром релаксации [2]:

$$P(t) = C(\alpha - w) - K \int_0^t (\dot{\alpha} - \dot{w}) e^{-\frac{t-t'}{\tau_1}} dt'. \quad (16)$$

Здесь b определяется геометрическими и механическими свойствами соударяющихся тел; $q = 2/3$ — для начального касания в одной точке, $q = 1 - \frac{1}{2n+1}$ — для плотного начального касания, рассмотренного в [12] (Голдсмит и ряд других исследователей рекомендуют определять этот параметр экспериментально); w — прогиб мишени; t' — переменная интегрирования.

На основании соотношений (15) и (16), записанных в пространстве изображений, из уравнения (14) получим

$$\tilde{P}(p) (1 + m_1 p^2 u) = -m_1 p^2 b \tilde{P}(p)^q + m_1 p V_0 + m_1 g. \quad (17)$$

Для решения уравнения (17) можно использовать алгоритм последовательных приближений [10], в результате чего выведем рекуррентную формулу

$$\tilde{P}(p) = \left(\frac{V'}{bp} \right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + (1 + m_1 p^2 u) \frac{V'^{\frac{1}{q}-1}}{m_1 p (pb)^{\frac{1}{q}}} \times \right. \\ \left. \times \left(1 + (1 + m_1 p^2 u) \frac{\tilde{P}(p)^{1-q}}{b m_1 p^2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \right)^{-\frac{1}{q}}, \quad (18)$$

где $V' = V_0 + g/p$.

Если положить в правой части равенства (18) $\tilde{P} = 0$, то получим приближения для контактной силы соответствующего порядка, который определяется степенью вложенности, т.е. числом представлений $\tilde{P}(p)^{1-q}$ с помощью самого же выражения (18). Указанный алгоритм приводит к вычислению корней характеристического уравнения, определяющего соотношение $\tilde{P}(p)$, единственное удовлетворяющее физическим условиям задачи.

Рассмотрим случай удара по изолятору, находящемуся в середине балки ($a = l$), тогда для прогиба от действия единичной силы имеем

$$u(l, p) = \frac{2l^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2}{n^4}. \quad (19)$$

Раскладывая $V^{1/q}$, $V^{(1-q)/q}$ по отрицательным степеням параметра пространства изображений p , получим

$$\begin{aligned} \tilde{P}(p) = & \left(\frac{V_0}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{g}{V_0 q p} + \frac{(1-q)g^2}{2!V_0^2 q^2 p^2} + \frac{(1-q)(1-2q)g^3}{3!V_0^3 q^3 p^3} + \dots \right) \times \\ & \times p^{\frac{-1}{q}} \left[1 - \frac{V_0^{\frac{1-q}{q}} k^{\frac{-1}{q}}}{q m_1} \left(1 + \frac{(1-q)g}{V_0 q p} + \right. \right. \\ & + \frac{(1-q)(1-2q)g^2}{2!V_0^2 q^2 p^2} + \frac{(1-q)(1-2q)(1-3q)g^3}{3!V_0^3 q^3 p^3} + \dots \left. \left. \right) \times \right. \\ & \times p^{\frac{-1+q}{q}} \left(1 + \frac{2m_1 l^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right) + \frac{(1-q)V_0^{\frac{2-2q}{q}} k^{\frac{-2}{q}}}{2q^2 m_1^2} \times \\ & \times \left(1 + \frac{(2-2q)g}{V_0 q p} + \frac{(2-2q)(2-3q)g^2}{2!V_0^2 q^2 p^2} + \right. \\ & + \left. \frac{(2-2q)(2-3q)(2-4q)g^3}{3!V_0^3 q^3 p^3} + \dots \right) p^{\frac{-2+2q}{q}} \times \\ & \left. \times \left(1 + \frac{2m_1 l^3}{EI\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right) - \dots \right] \quad (20) \end{aligned}$$

Ограничиваясь в выражении для u только первым членом ряда в соответствии с рекомендациями [6] и заменяя всю массу балки приведенным к точке приложения контактной силы значением $\frac{1}{2}pl$, в пространстве оригиналов получаем окончательное выражение [11]. Выбирая соответствующие значения q , можно получить выражения для силы взаимодействия между ударяющим телом и балкой при различных условиях начального касания.

Коэффициент k зависит от упругих постоянных согласно выражению [6]

$$k = \left(\frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} A \right) \times \left(\frac{2n+1}{2n} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{\pi(v_1 + v_2)}{2A} \right)^{\frac{2n}{2n+1}}. \quad (21)$$

Здесь

$$v_i = \frac{\lambda_i + 2\mu_i}{4\pi\mu_i(\lambda_i + \mu_i)}; \quad A = \frac{1}{2n!} \left(\frac{d^{2n} z_{1,2}}{dr^{2n}} \right)_{r=0}; \quad z_{1,2} = Ar^{2n} + \dots; \quad (22)$$

λ_i и μ_i — упругие постоянные Ляме для первого и второго тела; A — коэффициент, определяющий условия касания двух тел; $z_{1,2}$ — относительная индикатриса поверхностей тел в зоне взаимодействия тел; $n=1$ соответствует частному случаю при касании тел в одной точке.

Решая данную задачу Коши методами операционного исчисления [2], можно легко получить выражения для смещения ударника $x(t)$, после чего можно будет найти значение критерия качества I_1 в виде силы, возникающей под изолятором. Обозначим $m = K/2m_1$, $n = \sqrt{C/m_1}$; в зависимости от соотношения этих двух параметров возможны три случая:

при $n > m$

$$x(t) = -\frac{1}{n_1 m_3} \int_0^t P(\tau) e^{-m(t-\tau)} \sin(n_1(t-\tau)) d\tau, \quad (23)$$

при $n < m$

$$x(t) = -\frac{1}{n_2 m_3} \int_0^t P(\tau) e^{-m(t-\tau)} \operatorname{sh}(n_2(t-\tau)) d\tau, \quad (24)$$

при $n = m = \lambda$

$$x(t) = -\frac{1}{m_3} \int_0^t P(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} (t-\tau) d\tau, \quad (25)$$

где $n_1 = \sqrt{n^2 - m^2}$, $n_2 = \sqrt{m^2 - n^2}$.

Время первого ударного контакта находится по формуле для $P(t)$ и соответствует времени, при котором $P(t) = 0$.

В случае изолятора с вязкоупругим элементом Максвелла система уравнений (2) решается также с помощью метода преобразования Лапласа.

Решая систему (20), получим выражения

$$\bar{\alpha} = \frac{V_0 [(\chi + p)(p + B_1) + A_1]}{p [p^3 + (\chi + B_1)p^2 + (C_1 + B_1\chi)p + B_1C_0]}, \quad (26)$$

$$\bar{w} = \bar{\alpha} \frac{p(\chi + p) + C/m}{-p(\chi + p) + C/m} - \frac{V_0(\chi + p)}{[-p(\chi + p) + C/m]p}, \quad (27)$$

где $\chi = C/K$, $A_1 = \frac{C}{\rho h \pi r_0^2}$, $B_1 = \frac{2G^{(2)}}{r_0}$, $C_1 = C \left(\frac{2}{\rho h \pi r_0^2} + \frac{1}{m} \right)$,
 $C_0 = \frac{C}{m}$.

Представление выражений (26), (27) в пространстве оригиналов зависит от корней характеристического уравнения

$$p^3 + (\varsigma + B_1)p^2 + (C_1 + B_1\varsigma)p + B_1C_0 = 0, \quad (28)$$

представляющего равенство нулю знаменателя соотношения (26). Уравнение (28) может иметь три действительных корня или один действительный корень и два комплексно сопряженных.

В случае действительных корней уравнения (28) a_1, a_2, a_3 выражения для α и w в пространстве оригиналов примут вид

$$\alpha = A_2 \exp(a_1 t) + B_2 \exp(a_2 t) + C_2 \exp(a_3 t) + D_2, \quad (29)$$

$$w = A_3 \exp(a_1 t) + B_3 \exp(a_2 t) + C_3 \exp(a_3 t) + D_3 + G_3 + \\ + (E_3 + H_3) \exp(a_7 t) + (F_3 + K_3) \exp(a_8 t), \quad (30)$$

$$\text{где } A_2 = \frac{V_0 [a_1^2 + (\chi + B_1)a_1 + \chi B_1 + A_1]}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)a_1}, \\ B_2 = \frac{V_0 [a_3^2 + (\chi + B_1)a_3 + \chi B_1 + A_1]}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)a_2},$$

$$C_2 = \frac{V_0 [a_3^2 + (\chi + B_1)a_3 + \chi B_1 + A_1]}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)a_3}, \quad D_2 = -\frac{V_0(\chi B_1 + A_1)}{a_1 a_2 a_3},$$

$$A_3 = \frac{V_0 [a_1^2 + (\chi + B_1)a_1 + \chi B_1 + A_1] (a_1^2 + \chi a_1 + C/m)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)a_1(a_1 - a_7)(a_1 - a_8)},$$

$$B_3 = \frac{V_0 [a_2^2 + (\chi + B_1)a_2 + \chi B_1 + A_1] (a_2^2 + \chi a_2 + C/m)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)a_2(a_2 - a_7)(a_2 - a_8)},$$

$$C_3 = \frac{V_0 [a_3^2 + (\chi + B_1)a_3 + \chi B_1 + A_1] (a_3^2 + \chi a_3 + C/m)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)a_3(a_3 - a_7)(a_3 - a_8)},$$

$$D_3 = -\frac{V_0(\chi B_1 + A_1)C}{m a_1 a_2 a_3 a_7 a_8},$$

$$E_3 = \frac{V_0 [a_7^2 + (\chi + B_1)a_7 + \chi B_1 + A_1] (a_7^2 + \chi a_7 + C/m)}{(a_7 - a_1)(a_7 - a_2)(a_7 - a_3)a_7(a_7 - a_8)},$$

$$F_3 = \frac{V_0 [a_8^2 + (\chi + B_1) a_8 + \chi B_1 + A_1] (a_8^2 + \chi a_8 + C/m)}{(a_8 - a_1)(a_8 - a_2)(a_8 - a_3) a_8 (a_8 - a_7)},$$

$$G_3 = \frac{\chi V_0}{a_7 a_8}, \quad H_3 = \frac{(\chi + a_7) V_0}{a_7 (a_7 - a_8)}, \quad K_3 = \frac{(\chi + a_8) V_0}{a_8 (a_8 - a_7)},$$

$$a_{7,8} = \frac{-\chi \pm \sqrt{\chi^2 + 4C/m}}{2}.$$

Для комплексно сопряженных корней a_4, a_5 и одного действительного корня a_6 уравнения (28) α запишется как

$$\alpha = \exp(-1/2at) \left\{ \xi^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\xi^{1/2}t\right) [2B_4 - aA_4] + \right. \\ \left. + A_4 \cos\left(\frac{1}{2}\xi^{1/2}t\right) \right\} + C_4 \exp(a_6t) + D_4, \quad (31)$$

$$w = \exp(-at/2) \times \\ \times \left\{ \xi^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\xi^{1/2}t\right) [2B_5 - aA_5] + A_5 \cos\left(\frac{1}{2}\xi^{1/2}t\right) \right\} + \\ + C_5 \exp(a_6t) + D_5 + G_5 + (E_5 + H_5) \exp(a_7t) + \\ + (F_5 + K_5) \exp(a_8t), \quad (32)$$

где

$$A_4 = \frac{V_0 [a_4^2 + (\chi + B_1) a_4 + \chi B_1 + A_1]}{(a_4 - a_6)(a_4 - a_5) a_4} - \\ - \frac{V_0 [a_5^2 + (\chi + B_1) a_5 + \chi B_1 + A_1]}{(a_5 - a_6)(a_4 - a_5) a_5},$$

$$B_4 = \frac{V_0 [a_4^2 + (\chi + B_1) a_4 + \chi B_1 + A_1]}{(a_4 - a_6)(a_4 - a_5) a_4} - A_4 a_4,$$

$$C_4 = \frac{V_0 [a_6^2 + (\chi + B_1) a_6 + \chi B_1 + A_1]}{(a_6^2 + a a_6 + b) a_6},$$

$$D_4 = -\frac{[\chi B_1 + A_1] V_0}{b a_6}, \quad a = \chi + B_1 + a_6,$$

$$b = [C_1 + B_1 \chi + a_6 a], \quad \xi = 4b - a^2,$$

$$A_5 = \frac{V_0 [a_4^2 + (\chi + B_1) a_4 + \chi B_1 + A_1] (a_4^2 + \chi a_4 + C/m)}{(a_4 - a_6)(a_4 - a_5) a_4 (a_4 - a_7)(a_4 - a_8)} - \\ - \frac{V_0 [a_5^2 + (\chi + B_1) a_5 + \chi B_1 + A_1] (a_5^2 + \chi a_5 + C/m)}{(a_5 - a_6)(a_4 - a_5) a_5 (a_5 - a_7)(a_5 - a_8)},$$

$$B_5 = \frac{V_0 [a_4^2 + (\chi + B_1) a_4 + \chi B_1 + A_1] (a_4^2 + \chi a_4 + C/m)}{(a_4 - a_6) a_4 (a_4 - a_7) (a_4 - a_8)} - A_5 a_4,$$

$$C_5 = \frac{V_0 [a_6^2 + (\chi + B_1) a_6 + \chi B_1 + A_1] (a_6^2 + \chi a_6 + C/m)}{(a_6^2 + a a_6 + b) a_6 (a_6 - a_7) (a_6 - a_8)},$$

$$D_5 = \frac{V_0 (\chi B_1 + A_1) C}{m b a_6 a_7 a_8},$$

$$E_5 = \frac{V_0 [a_7^2 + (\chi + B_1) a_7 + \chi B_1 + A_1] (a_7^2 + \chi a_7 + C/m)}{(a_7^2 + a a_7 + b) a_7 (a_7 - a_6) (a_7 - a_8)},$$

$$G_5 = \frac{\chi V_0}{a_7 a_8}, \quad H_5 = \frac{(\chi + a_7) V_0}{a_7 (a_7 - a_8)},$$

$$F_5 = \frac{V_0 [a_8^2 + (\chi + B_1) a_8 + \chi B_1 + A_1] (a_8^2 + \chi a_8 + C/m)}{(a_8^2 + a a_8 + b) a_8 (a_8 - a_6) (a_8 - a_7)},$$

$$K_5 = \frac{(\chi + a_8) V_0}{a_8 (a_8 - a_7)}.$$

После определения величин w , α и их подстановки в (16) можно записать выражение для контактной силы $P(t)$. В случае действительных корней уравнения (28) она может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} P(t) = C & \left[(A_2 - A_4) \exp(a_1 t) + (B_2 - B_4) \exp(a_2 t) + \right. \\ & + (C_2 - C_4) \exp(a_3 t) + (D_2 - D_4 - G_4) - (E_4 + H_4) \exp(a_7 t) - \\ & \left. - (F_4 + K_4) \exp(a_8 t) \right] - K \int_0^t \left[(A_2 - A_4) \exp(a_1 t') + \right. \\ & + (B_2 - B_4) \exp(a_2 t') + (C_2 - C_4) \exp(a_3 t') + (D_2 - D_4 - G_4) - \\ & \left. - (E_4 + H_4) \exp(a_7 t') - (F_4 + K_4) \exp(a_8 t') \right] \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt'. \quad (33) \end{aligned}$$

Для случая комплексно сопряженных корней уравнения (28) из выражения (16) получим

$$\begin{aligned} P(t) = C & \left\langle \exp(-at/2) \left\{ \xi^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2} \xi^{1/2} t\right) [2(B_3 - B_5) + a(A_5 - A_3)] - \right. \right. \\ & - (A_5 - A_3) \cos\left(\frac{1}{2} \xi^{1/2} t\right) \left. \right\} + (C_3 - C_5) \exp(a_3 t) + (D_3 - D_5 - G_5) - \\ & \left. - (E_5 + H_5) \exp(a_7 t) - (F_5 + K_5) \exp(a_8 t) \right\rangle - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - K \int_0^t \left\langle \exp(-at/2) \left\{ \xi^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\xi^{1/2}t\right) [2(B_3 - B_5) + a(A_5 - A_3)] - \right. \right. \\
& - (A_5 - A_3) \cos\left(\frac{1}{2}\xi^{1/2}t\right) \left. \right\} + (C_3 - C_5) \exp(a_3t) + (D_3 - D_5 - G_5) - \\
& \left. - (E_5 + H_5) \exp(a_7t) - (F_5 + K_5) \exp(a_8t) \right\rangle \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_1}\right) dt'. \quad (34)
\end{aligned}$$

Результаты численного анализа. Для анализа полученных аналитических зависимостей и установления влияния параметров изолятора на конечные характеристики удара построим графики для нормального перемещения контактной области, ее ускорения и контактной силы. Выявление этих зависимостей также позволяет правильно определить характеристики, вычисляемые по формулам (4)–(6).

На рис. 2–4 приведены графические зависимости контактной силы в месте взаимодействия, нормального перемещения и ускорения точек мишени под областью контакта от времени для случаев использования изолятора с вязкоупругим элементом Кельвина–Фойгта (кривые 1–3) и элементом Максвелла (кривые 4–6) для различных значений упругой и вязкой составляющей изолятора. Кривые 1 и 4 получены для случая $C = 10^3$ Н/м, $K = 10^6$ Н·с/м, кривые 2 и 5 соответствуют значениям $C = 10^3$ Н/м, $K = 10^3$ Н·с/м, а кривые 3 и 6 — для $C = 10^6$ Н/м, $K = 10^3$ Н·с/м. Остальные параметры взаимодействия имеют значения: $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $q = 2/3$, $m = 1$ кг, $V_0 = 8$ м/с, $l = 2$ м, $r_0 = 0,1$ м; тип профиля — двутавр № 40.

На рис. 2 видно, что сила взаимодействия в месте установки изолятора имеет различный характер зависимости от времени для двух вязкоупругих элементов. Однако такие явления, как увеличение времени взаимодействия тел и уменьшение максимума контактной силы, наблюдаются и для элемента Максвелла, и для элемента Кельвина–Фойгта. Также имеет место прилипание ударника к мишени (кривые 1 и б), что происходит при противоположных соотношениях параметров упругости и вязкости. На рис. 3 видно, что при любом соотношении параметров вязкости и упругости нормальное перемещение балки при наличии в изоляторе вязкоупругого элемента Максвелла будет меньше. Вместе с тем для элемента Кельвина–Фойгта максимум перемещения (см. рис. 3) достигается за меньший интервал времени, а время контакта больше, чем для элемента Максвелла. Следует также отметить, что зависимости для двух разных вязкоупругих элементов начинают различаться уже на начальном этапе взаимодействия. В целом элемент Кельвина–Фойгта на этой стадии ведет себя более линейно, что говорит о большем влиянии в этой конструкции упругого элемента. Видно,

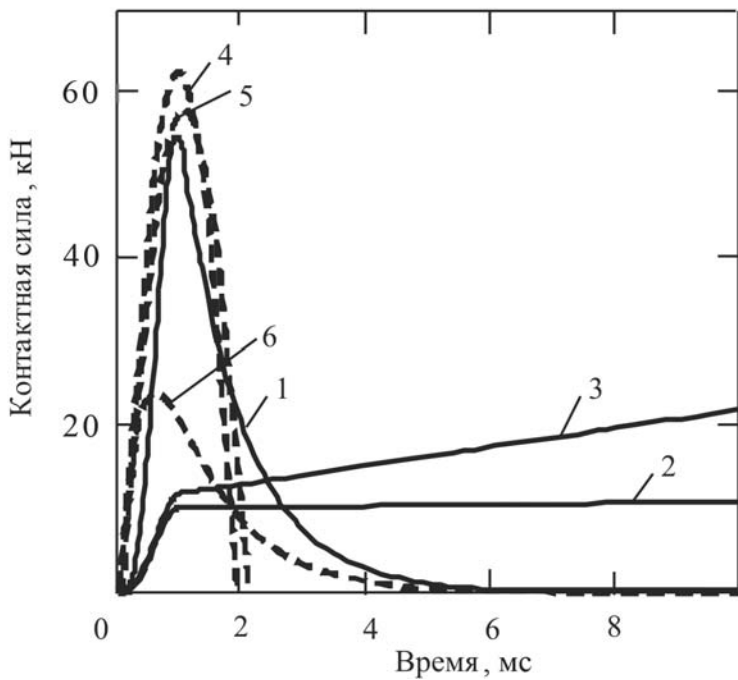


Рис. 2. Зависимость контактной силы от времени для различных значений упругих и вязких характеристик изолятора

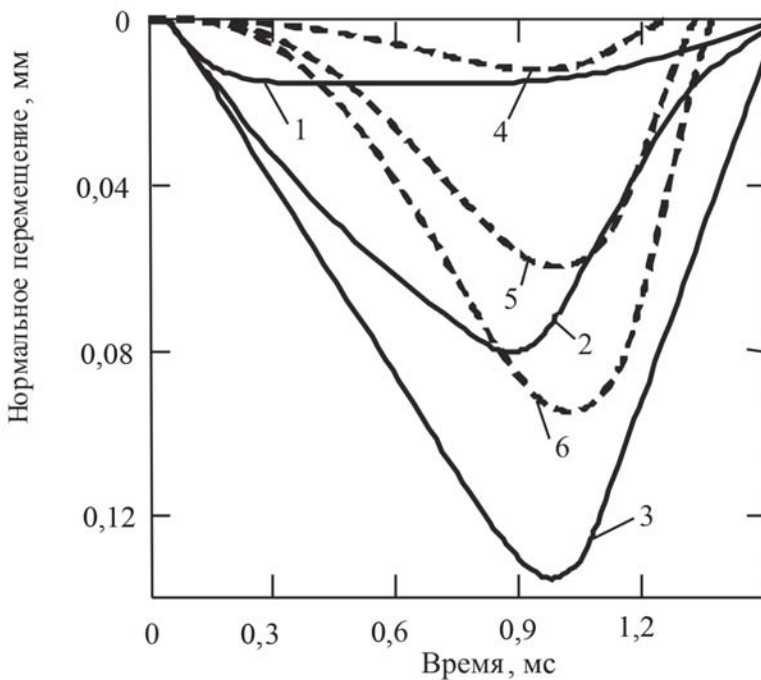


Рис. 3. Зависимость нормального перемещения от времени для различных значений упругих и вязких характеристик изолятора

что на начальном этапе характеристика нелинейности зависимости прогиба от времени для элемента Кельвина–Фойгта является жесткой, т.е. кривая вогнута, а для элемента Максвелла эта характеристика является мягкой, так как кривая выпукла. Из сравнения графических зависимостей для ускорения точек мишени в области взаимодействия тел (см. рис. 4) следует, что максимальные ускорения мишени соответствуют изолятору с вязкоупругим элементом Кельвина–Фойгта, и

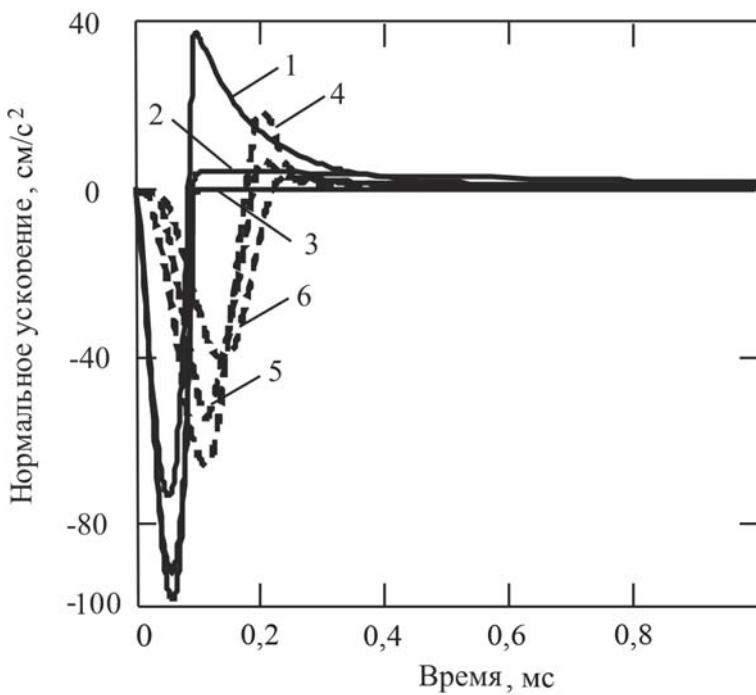


Рис. 4. Зависимость нормального ускорения от времени для различных значений упругих и вязких характеристик изолятора

кроме того, время их возникновения существенно меньше, чем для элемента Максвелла, для которого кривые в целом более плавные и имеют максимальные значения, сильнее разнесенные во времени в зависимости от параметров упругости и вязкости.

Выводы. Приведенные на рис. 2–4 зависимости позволяют воспользоваться качественными параметрами, вычисляемыми по формулам (4)–(6), и сделать вывод о том, что изолятор с вязкоупругим элементом типа Максвелла в целом является более мягким, но вместе с тем элемент Кельвина–Фойгта обеспечивает большее время, в течение которого прогиб мишени не вернется в нулевое положение. Для этих элементов совершенно разным является характер вязкоупругих деформаций после достижения максимального значения: для элемента Кельвина–Фойгта время существования этих деформаций больше. Элемент типа Кельвина–Фойгта также дает возможность подобрать значения параметров вязкости и упругости, для которых контактная сила, достигнув максимума, практически не будет меняться, вызывая остаточные напряжения. Отметим, что это свойство может быть использовано при защите от одиночного удара. Для изолятора с вязкоупругим элементом типа Кельвина–Фойгта необходимо подобрать значения параметров упругости и вязкости таким образом, чтобы деформации этих элементов примерно совпадали, в противном случае такой элемент будет вести себя либо как отдельный упругий элемент, либо как чисто вязкий элемент (см. рис. 3, 4).

Работа элемента Кельвина–Фойгта существенно зависит от времени приложения нагрузки: в случае кратковременной динамической

нагрузки (ударное воздействие) деформации не успевают развиться и изолятор ведет себя достаточно жестко, а деформации нарастают и после приложения нагрузки. Элемент Максвелла работает практически при любой длительности приложения нагрузки, но он не позволяет распределить значения динамических характеристик точек мишени во времени. Из анализа работы элемента Кельвина–Фойгта следует, что при заданных параметрах динамического воздействия для каждого значения упругой характеристики существует только одно значения параметра вязкости (и наоборот), при котором два простейших элемента изолятора работают синхронно и гасят удар наилучшим образом. Итак, элементы типа Кельвина–Фойгта и Максвелла могут оказывать похожее воздействие на некоторые динамические характеристики, но на большинство из них это влияние различно. Следовательно, при проектировании реальных противоударных изоляторов целесообразно использовать эти элементы вместе, подбирая параметры вязкости и упругости в зависимости от прогнозируемых характеристик удара. Эффективность конструктивного решения при этом будет зависеть от времени ударного взаимодействия, от повторяемости динамической нагрузки и от способа восстановления первоначальной формы изолятора после первого удара.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а л а н д и н Д. В., Б о л о т н и к Н. Н. Предельные возможности противоударной изоляции системы с двумя степенями свободы // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 6. – С. 52–62.
2. Л о к т е в А. А. Удар вязкоупругого тела по упругой изотропной пластинке // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 3. – С. 170–178.
3. Б а л а н д и н Д. В., Б о л о т н и к Н. Н. Оптимизация параметров противоударных изоляторов для системы с двумя степенями свободы // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – № 3. – С. 57–74.
4. B a l a n d i n D. V., B o l o t n i k N. N., P i l k e y W. D., P u r t s e z o v S. V., S h a w C. G. Concept of a platform-based impact isolation system for protection of wheelchair occupants from injuries in vehicle crashes // Medical Engineering and Physics. – 2008. – No. 30. – P. 258–267.
5. Л о к т е в А. А. Исследование нелинейности ударника на процесс ударного взаимодействия твердого тела и тонкой пластинки // Сб. тр. Международ. конф., посвященной 75-летию со дня рождения В.И. Зубова “Устойчивость и процессы управления”. – СПб.: СПбГУ. – 2005. – С. 1283–1292.
6. К и л ь ч е в с к и й Н. А. Теория соударений твердых тел. – Киев: Наукова думка, 1969. – 346 с.
7. К у к у д ж а н о в В. Н. Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида. // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – № 5. – С. 96–111.
8. К у к у д ж а н о в К. В. Исследование разрушения слоистых пластин из композиционных материалов при ударном контактном нагружении // Изв. РАН. МТТ. – 2009. – № 1 – С. 185–192.

9. Б е л я е в Н. М. Сопротивление материалов. – М.: Физматгиз, 1962. – 822 с.
10. Т и м о ш е н к о С. П. Прочность и колебания элементов конструкций. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
11. Л у р ь е А. И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. – 534 с.
12. Г о л ь д с м и т В. Удар. – М.: Стройиздат, 1965. – 595 с.

Статья поступила в редакцию 18.11.2011

Алексей Алексеевич Локтев окончил Воронежский государственный архитектурно-строительный университет в 2001 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой Московской финансово-юридической академии. Автор 59 научных работ в области механики контактного взаимодействия, теории упругости, волновых процессов и математического моделирования.

A.A. Loktev graduated from the Voronezh State University for Architecture and Civil Engineering in 2001. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor, head of department of the Moscow Academy of Finance and Law. Author of 59 publications in the field of mechanics of contact interaction, theory of elasticity, wave processes and mathematical modeling.

Владислав Владимирович Вершинин — студент Московского государственного строительного университета. Автор трех научных работ в области механики контактного взаимодействия, теории упругости и волновых процессов.

V.V. Vershinin — student of the Moscow State University of Civil Engineering. Author of 3 publications in the field of mechanics of contact interaction, theory of elasticity and wave processes.