УДК 536.2 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-4-12

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ АНИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ЕГО ЛОКАЛЬНОМ НАГРЕВЕ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

А.В. Аттетков fn2@bmstu.ru
И.К. Волков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Предложена математическая модель процесса формирования температурного поля анизотропного полупространства, граница которого подвержена воздействию стационарного теплового потока с интенсивностью гауссова типа и внешней среды с постоянной температурой. Показано, что температурное поле представляет собой сумму двух аддитивных составляющих. Первая составляющая обусловлена воздействием внешней среды, теплообмен с которой реализуется по закону Ньютона. С использованием композиции двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье и интегрального преобразования Лапласа в аналитически замкнутом виде найдено решение для второй аддитивной составляющей температурного поля объекта исследований. Сформулированы достаточные условия, реализация которых позволяет обобщить полученный результат на случай воздействия нестационарных тепловых потоков произвольной структуры в условиях теплообмена с внешней средой по закону Ньютона

Ключевые слова

Анизотропное полупространство, теплообмен с внешней средой, локальный нагрев, температурное поле, интегральные преобразования

Поступила в редакцию 05.09.2017

Введение. Широкое внедрение в инженерную практику вычислительной техники, методов математического моделирования и анизотропных материалов как естественного, так и искусственного происхождения существенно повлияло на приоритеты в научных исследованиях. В частности, в математической теории теплопроводности твердых тел [1–3] особое место занял «анизотропный раздел» [3, 4], что обусловлено как спецификой используемых в нем математических моделей, так и необходимостью разработки новых высокопроизводительных абсолютно устойчивых вычислительных методов [4–6], ориентированных на решение реальных инженерных задач.

Для тестирования новых вычислительных алгоритмов желательно использовать решения соответствующих задач, представленные в аналитически замкнутом виде, — тестовые задачи. Если в традиционных разделах математической теории теплопроводности твердых тел множество тестовых задач весьма обширно [1–3, 7], то в «анизотропном разделе» ситуация принципиально иная. Достаточно отметить, что за редким исключением все немногочисленные тестовые задачи «анизотропной теплопроводности» приведены в работах [4–6] и являются двумерными, поэтому любое новое решение задач этого класса, представленное в аналитически замкнутом виде, имеет вполне определенную значимость.

Основная цель проведенных исследований — решение задачи об определении температурного поля анизотропного полупространства, граница которого находится как под воздействием стационарного теплового потока с интенсивностью гауссова типа, так и внешней среды с постоянной температурой.

Исходные допущения и математическая модель. Для достижения поставленной цели при построении исходной математической модели процесса формирования температурного поля $T(x_1, x_2, x_3, t)$ анизотропного полупространства в фиксированной декартовой системе координат $0x_1x_2x_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ предполагалось, что:

1) плоскость $x_2 = 0$, являющаяся границей анизотропного полупространства, находится как под воздействием внешней среды с постоянной температурой T_c, так и внешнего теплового потока с интенсивностью гауссова типа, определяющими параметрами q_0, k и осью симметрии, совпадающей с координатной осью $0x_2$, т. е. $q(x_1, x_3) = q_0\left(k^2/\pi\right)\exp\left[-k^2\left(x_1^2 + x_3^2\right)\right]$;

2) теплообмен в системе анизотропное полупространство–внешняя среда реализуется по закону Ньютона с постоянным коэффициентом теплоотдачи α [1–3];

3) начальная температура анизотропного полупространства $T_0 = \text{const}$ отлична от температуры внешней среды, $T_0 \neq T_c$.

Согласно принятым допущениям, при использовании обозначений

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_c - T_0};\quad x = \frac{x_1}{l};\quad y = \frac{x_2}{l};\quad z = \frac{x_3}{l};\quad \mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{22}};\quad \text{Fo} = \frac{\lambda_{22}t}{c\rho l^2};$$

$$K = kl;\quad Q_0 = \frac{q_0}{(T_c - T_0)\lambda_{22}l};\quad \text{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda_{22}},$$

где l — используемая единица масштаба пространственных переменных; $\lambda_{ij} \equiv \lambda_{ji}$ — компонент тензора теплопроводности анизотропного материала, функция $\theta(x, y, z, \text{Fo})$, определяющая искомое температурное поле, должна удовлетворять однородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка параболического типа [3, 4]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial \text{Fo}} = \mu_{11}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} + 2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} +$$

$$+\ \mu_{33}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2},\quad \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\quad y > 0,\quad \text{Fo} > 0, \tag{1}$$

однородному начальному условию

$$\theta(x, y, z, 0) = 0 \qquad (2)$$

и специфическому краевому условию при $y = 0$ [4, 8]

$$\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{y=0} = -\operatorname{Bi}(1-\theta)\big|_{y=0} -$$

$$- Q_0\frac{K^2}{\pi}\exp\left[-K^2(x^2+z^2)\right], \qquad (3)$$

с наличием которого связана проблема задания краевого условия при $x^2 + y + z^2 \to +\infty$ для замыкания математической модели (1)–(3).

Для преодоления возникших трудностей достаточно предположить наличие у искомого температурного поля следующей структуры:

$$\theta(x,\ y,\ z,\ \mathrm{Fo}) = \theta_1(y,\ \mathrm{Fo}) + \theta_2(x,\ y,\ z,\ \mathrm{Fo}) \qquad (4)$$

и потребовать, чтобы функция $\theta_1(y,\ \mathrm{Fo})$ являлась решением смешанной задачи

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2},\ \ y > 0,\ \ \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\theta_1(y, 0) = 0;$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -\operatorname{Bi}(1-\theta_1)\big|_{y=0};$$

$$\theta_1(y,\ \mathrm{Fo})\big|_{(\mathrm{Fo}\geq 0)} \in L^2[0, +\infty);$$

$$\theta_1(y,\ \mathrm{Fo})\big|_{(y\geq 0)} \in L^2[0, +\infty).$$

Здесь два последних условия означают, что по каждому аргументу функция $\theta_1(y,\ \mathrm{Fo})$ интегрируема с квадратом на полуинтервале $[0, +\infty) \subset \mathbb{R}$. В этом случае, согласно (4) и (5), функция $\theta_2(x,\ y,\ z,\ \mathrm{Fo})$ должна удовлетворять уравнению (1), однородному начальному условию (2), модифицированному краевому условию (3) и требованиям его принадлежности классу функций $L^2(\mathbb{R}^2)$ по совокупности пространственных переменных $[x, z]^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2$ и классу функций $L^2[0, +\infty)$ как по пространственному переменному *y*, так и по временному переменному Fo:

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial \mathrm{Fo}} = \mu_{11}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} + 2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial y} + 2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial y^2} +$$

$$+ 2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial y\partial z} + \mu_{33}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2},\quad \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \ y > 0,\ \ \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\theta_2(x, y, z, 0) = 0;$$

$$\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta_2}{\partial z} - \mathrm{Bi}\theta_2\right]\Bigg|_{y=0} = -Q_0\frac{K^2}{\pi}\exp\left[-K^2(x^2+z^2)\right];$$

$$\theta_2(x,\ y,\ z,\ \mathrm{Fo})\big|_{(y\ge 0)\wedge(\mathrm{Fo}\ge 0)} \in L^2(\mathbb{R}^2);\ \ \theta_2(x,\ y,\ z,\ \mathrm{Fo})\big|_{([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)\wedge(\mathrm{Fo}\ge 0)} \in L^2[0,\ +\infty);$$

$$\theta_2(x,\ y,\ z,\ \mathrm{Fo})\big|_{([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)\wedge(y\ge 0)} \in L^2[0,+\infty).$$

Температурное поле. Согласно условиям, представленным в математической модели (6), для определения аддитивной составляющей $\theta_2(x, Y, z,\ \mathrm{Fo})$ искомого температурного поля анизотропного полупространства, как скалярная функция пространственных переменных $[x, z]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ она является оригиналом двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье, задаваемого парой линейных интегральных операторов [9]:

$$\begin{gathered}\Phi[\cdot] \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdot \exp(-ipx - irz)\,dx\,dz;\\ \Phi^{-1}[\cdot] \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdot \exp(ipx + irz)dp\,dr,\end{gathered} \tag{7}$$

а как скалярная функция временного переменного Fo — оригиналом интегрального преобразования Лапласа [2]:

$$L[\cdot] \equiv \int\limits_0^{\infty} \cdot \exp(-s\,\mathrm{Fo})d\mathrm{Fo};\ \ L^{-1}[\cdot] \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \cdot \exp(s\,\mathrm{Fo})ds. \tag{8}$$

Учитывая изложенное выше, применим к математической модели (6) последовательно операторы $\Phi[\cdot]$ и $L[\cdot]$ с использованием их стандартных свойств [2, 9] и соответствующих таблиц «оригинал–изображение» [10]. При этом полагая

$$\begin{gathered}A(p, y, r,\ \mathrm{Fo}) \triangleq \Phi[\theta_2(x, y, z,\ \mathrm{Fo})];\\ B(p, y, r, s) \triangleq L\left[A(p, y, r,\ \mathrm{Fo})\right],\end{gathered} \tag{9}$$

приходим к краевой задаче для определения функции $\theta_2(x, y, z,\ \mathrm{Fo})$ в пространстве изображений композиции двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (7) и интегрального преобразования Лапласа (8):

$$\begin{gathered}\frac{d^2B}{dy^2} + 2i(\mu_{12}p + \mu_{23}r)\frac{dB}{dy} - (\mu_{11}p^2 + 2\mu_{13}pr + \mu_{33}r^2 + s)B = 0,\quad y > 0;\\ \left[\frac{dB}{dy} + i(\mu_{12}p + \mu_{23}r)B - \mathrm{Bi}\,B\right]\Bigg|_{y=0} = -\frac{Q_0}{s}\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2}\right];\end{gathered} \tag{10}$$

$$B(p,y,r,s)\big|_{([p,r]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)\wedge(s\in\mathbb{C})}\in L^2[0,+\infty). \qquad (10)$$

Поскольку краевая задача (10) обладает вполне определенной спецификой, обусловленной наличием комплекса $i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)$ как в обыкновенном линейном дифференциальном уравнении второго порядка, так и в краевом условии при $y=0$, естественно предполагать, что ее решение имеет структуру

$$B(p,y,r,s)=D(p,y,r,s)\exp\left[-i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)y\right]. \qquad (11)$$

Здесь, согласно (10) и (11), функция $D(p,y,r,s)$ должна удовлетворять упрощенному аналогу краевой задачи (10)

$$\frac{d^2D}{dy^2}-\left[\delta(p,r)+s\right]D=0,\ \ y>0;$$

$$\left[\frac{dD}{dy}-\mathrm{Bi}\,D\right]\bigg|_{y=0}=-\frac{Q_0}{s}\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2}\right]; \qquad (12)$$

$$D(p,y,r,s)\big|_{([p,r]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)\wedge(s\in\mathbb{C})}\in L^2[0,+\infty),$$

содержащему квадратичную форму

$$\delta(p,r)=(\mu_{11}-\mu_{12}^2)p^2+2(\mu_{13}-\mu_{12}\mu_{23})pr+(\mu_{33}-\mu_{23}^2)r^2, \qquad (13)$$

в положительной определенности которой можно убедиться непосредственно, используя свойства тензора теплопроводности второго ранга [4] и критерия Сильвестра [11]. Решение краевой задачи (12), (13) находим с помощью стандартных методов [12] и представляем в следующем виде:

$$D(p,y,r,s)=\frac{\exp\left[-y\sqrt{s+\delta(p,r)}\right]}{s\left[\mathrm{Bi}+\sqrt{s+\delta(p,r)}\right]}Q_0\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2}\right],\ \ y\geq 0. \qquad (14)$$

Для возвращения в пространство оригиналов сначала, используя равенства (9), (11), (14), оператором $L^{-1}[\cdot]$ обращения интегрального преобразования Лапласа (8) и соответствующими таблицами «оригинал–изображение» [13] реализуем переход из пространства изображений композиции интегральных преобразований (7), (8) в пространство изображений двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (7), т. е. определяем

$$A(p,y,r,\mathrm{Fo})=G(p,y,r,\mathrm{Fo})\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2}-i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)y\right],\ \ y\geq 0,\ \mathrm{Fo}\geq 0;$$

$$G(p,y,r,\mathrm{Fo})=Q_0\left\{\frac{\exp\left[-y\sqrt{\delta(p,r)}\right]}{2\left[\mathrm{Bi}+\sqrt{\delta(p,r)}\right]}\mathrm{erfc}\left[\frac{y}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}-\sqrt{\delta(p,r)\mathrm{Fo}}\right]+\right.$$

$$+\frac{\exp\left[y\sqrt{\delta(p,r)}\right]}{2\left[\mathrm{Bi}-\sqrt{\delta(p,r)}\right]}\operatorname{erfc}\left[\frac{y}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}+\sqrt{\delta(p,r)}\right]-$$

$$-\frac{\mathrm{Bi}\exp\left\{y\mathrm{Bi}+\left[(\mathrm{Bi})^2-\delta(p,r)\right]\mathrm{Fo}\right\}}{(\mathrm{Bi})^2-\delta(p,r)}\operatorname{erfc}\left[\frac{y}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}+\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}\right]\Bigg\}, \qquad (15)$$

где $\operatorname{erfc}[\cdot]$ — дополнительная функция ошибок Гаусса [2].

Согласно равенствам (7), (9), (13) и (15), имеем

$$\theta_2(x-\mu_{12}\,y,\,y,\,z-\mu_{23}\,y,\ \mathrm{Fo})=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(p,y,r,\mathrm{Fo})\,\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{p^2+r^2}{4K^2}+i(x-\mu_{12}y)p+i(z-\mu_{23}\,y)r\right]dp\,dr, \qquad (16)$$

$$\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2,\quad y\ge 0,\quad \mathrm{Fo}\ge 0.$$

В соответствии с равенством (4) для достижения поставленной цели осталось определить функцию $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$, которая является решением смешанной задачи (5). Используя известный результат [2], получаем

$$\theta_1(y,\ \mathrm{Fo})=\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right)-\exp\left[\mathrm{Bi}\,(\mathrm{Bi}\,\mathrm{Fo}+y)\right]\ \operatorname{erfc}\left(\mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}}+\frac{y}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}}\right), \qquad (17)$$

$$y\ge 0,\ \mathrm{Fo}\ge 0.$$

Заключение. Равенства (4), (13), (15)–(17) полностью определяют температурное поле анизотропного полупространства, граница которого находится под воздействием стационарного теплового потока с интенсивностью гауссова типа и внешней среды с постоянной температурой.

При проведении вычислительных экспериментов с использованием равенства (16) целесообразно в двойном интеграле реализовать замену переменных, одновременно приводящую к каноническому виду две входящие квадратичные формы [11], с последующим использованием положительной определенности этих форм и существующей связи между двумерным экспоненциальным интегральным преобразованием Фурье и двумерным косинус-преобразованием [9].

Полученный результат может быть обобщен на случай нестационарного теплового потока произвольной структуры $Q(x,z,\ \mathrm{Fo})$ при условии, что

$$Q(x,z,\ \mathrm{Fo})\big|_{(\mathrm{Fo}\ge 0)}\in L^2(\mathbb{R}^2),\quad Q(x,z,\ \mathrm{Fo})\big|_{([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)}\in L^2[0,+\infty).$$

При этом принципиальная схема решения остается практически неизменной с коррекцией на использование теоремы о свертке для двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.

2. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

3. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 552 с.

4. *Формалев В.Ф.* Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.

5. *Формалев В.Ф.* Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 280 с.

6. *Формалев В.Ф., Колесник С.А.* Математическое моделирование аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.

7. *Карташов Э.М.* Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Инженерно-физический журнал. 2001. Т. 74. № 2. С. 171–195.

8. *Пехович А.И., Жидких В.М.* Расчет теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1968. 304 с.

9. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955. 668 с.

10. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 334 с.

11. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

12. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

13. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 468 с.

Аттетков Александр Владимирович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Волков Игорь Куприянович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства при его локальном нагреве в условиях теплообмена с внешней средой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 3. С. 4–12.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-4-12

TEMPERATURE FIELD OF ANISOTROPIC HALF-SPACE AT ITS LOCAL HEATING UNDER CONDITIONS OF HEAT EXCHANGE WITH EXTERNAL ENVIRONMENT

A.V. Attetkov fn2@bmstu.ru
I.K. Volkov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The paper introduces a mathematical model of the process of generating the temperature field of an anisotropic half-space, whose boundary is subjected to a stationary heat flow with Gaussian-type intensity and to the external impact at a constant temperature. The study shows that the temperature field is the sum of two additive components. The first component is due to the external impact, the heat exchange with the environment being realized according to Newton's law. Using the composition of a two-dimensional exponential integral Fourier transformation and an integral Laplace transformation in an analytically closed form, we found a solution for the second additive component of the temperature field of the object under study. Consequently, we formulated sufficient conditions, whose implementation allows us to generalize the result obtained in the case of unsteady heat flows of an arbitrary structure under conditions of heat exchange with the external environment according to Newton's law

Keywords

Anisotropic half-space, heat exchange with external environment, local-heating, temperature field, integral transformations

Received 05.09.2017

REFERENCES

[1] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. Oxford Science Publications, 1986. 520 p.

[2] Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti [Heat conduction theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1967. 600 p.

[3] Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods of heat conduction in solids]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2001. 552 p.

[4] Formalev V.F. Teploprovodnost' anizotropnykh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach [Heat conduction of anisotropic solids. Analytical technique of problem solving]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 312 p.

[5] Formalev V.F. Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh. Chislennye metody, teplovye volny, obratnye zadachi [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, heat waves, inverse problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2015. 280 p.

[6] Formalev V.F., Kolesnik S.A. Matematicheskoe modelirovanie aerogazodinamicheskogo nagreva zatuplennykh anizotropnykh tel [Mathematical simulation of aerogasdynamic heating of blunt body]. Moscow, MAI Publ., 2016. 160 p.

[7] Kartashov É.M. Analytical methods of solution of boundary-value problems of nonstationary heat conduction in regions with moving boundaries. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2001, vol. 74, iss. 2, pp. 498–536. DOI: 10.1023/A:1016641613982

[8] Pekhovich A.I., Zhidkikh V.M. Raschet teplovogo rezhima tverdykh tel [Calculation of thermal regime for solids]. Leningrad, Energiya Publ., 1968. 304 p.

[9] Sneddon I.N. Fourier transforms. McGraw-Hill, 1951. 542 p.

[10] Bateman H., Erdélyi A. Tables of integral transforms. Vol. 1. McGraw-Hill, 1954. 391 p.

[11] Bellman R. Introduction to matrix analysis. McGraw-Hill, 1960. 328 p.

[12] El'sgol'ts L.E. Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie [Differential equations and variational calculus]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 424 p.

[13] Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu [Handbook on operating calculus]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1965. 468 p.

Attetkov A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Senior Research Fellow, Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Volkov I.K. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature Field of Anisotropic Half-Space at its Local Heating under Conditions of Heat Exchange with External Environment. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 3, pp. 4–12 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-3-4-12