УДК 519.21 DOI: 10.18698/1812-3368-2018-2-12-22

ГРУППОВОЙ МЕТОД ПОИСКА ФУНКЦИИ РИМАНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ЭПИДЕМИИ

А.В. Мастихин mastihin@bmstu.ru
М.Н. Шевченко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

На примере марковского процесса эпидемии Вейса рассмотрена задача поиска функции Римана для стационарного первого уравнения Колмогорова относительно экспоненциальной (двойной) производящей функции вероятностей перехода. С помощью групповых методов найдены четырехмерная алгебра Ли симметрий для этого гиперболического уравнения в частных производных и функция Римана

Ключевые слова

Инфинитезимальный оператор, марковский процесс, экспоненциальная производящая функция, первое уравнение Колмогорова, функция Римана

Поступила в редакцию 16.02.2017

Введение. В математической теории эпидемий базовыми примерами являются общая эпидемия, т. е. эпидемия Бартлетта — Мак-Кендрика и эпидемия Вейса, или простая эпидемия. В первой из них пара частиц двух типов (инфицированная частица — переносчик инфекции — и частица, восприимчивая к инфекции), взаимодействуя, переходит в пару инфицированных частиц. Естественно определяемый процесс тем не менее оказывается достаточно сложным для исследования, некоторые результаты получены асимптотическими методами. В эпидемии Вейса пара частиц, взаимодействуя, переходит в одну инфицированную частицу, один переносчик удаляется из популяции. Этот процесс хорошо изучен и допускает обобщения. Так, Дж. Гани предложил процесс заболевания с двумя стадиями и тремя типами частиц. Метод экспоненциальной (двойной) производящей функции вероятностей перехода для всех трех процессов приводит к одному и тому же гиперболическому уравнению.

Цель настоящей работы — проанализировать гиперболическое уравнение с помощью теории симметрий. Задача поиска функции Римана для стационарного первого уравнения Колмогорова относительно экспоненциальной (двойной) производящей функции вероятностей перехода рассмотрена на примере марковского процесса эпидемии Вейса. Четырехмерная алгебра Ли симметрий для этого гиперболического уравнения в частных производных и ее одномерная подалгебра, инвариантная относительно задачи Гурса, найдена с помощью групповых методов. Это позволяет получить функцию Римана, применяемую при выводе предельных теорем.

Определение процесса. Уравнение Колмогорова для двойной производящей функции. Пусть $\xi(t)=(\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t))$, $t\in[0,\infty)$ — однородный во времени марковский процесс со счетным множеством состояний $N^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \alpha_i \quad 0,1,2,\ldots,\ i = 1,\ldots,n\}$. Состояние системы, характеризуемое вектором $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, означает наличие совокупности из α_1-частиц типа T_1, α_2-частиц типа $T_2, \ldots$, α_n-частиц типа T_n. Возможные переходы системы из одного состояния в другое представляются соответствующей схемой взаимодействий. Обозначим переходные вероятности как [1]

$$P_{\alpha\beta}(t) = \mathrm{P}\{\xi(t) = \alpha | \xi(0) = \beta\},\ \ \alpha,\ \beta \in N^n.$$

Введем экспоненциальную (двойную) производящую функцию переходных вероятностей $(|s| \le 1)$

$$\mathcal{F}(t,s,z) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{z^\alpha}{\alpha!} P_{\alpha\beta}(t) s^\beta$$

и линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами

$$h_k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \sum_\gamma p_\gamma^k \ \frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma},\ \ k = 1,\ldots,l,$$

соответствующие распределению вероятностей

$$\left\{ p_\gamma^k \ \ \ge 0,\ \sum_\gamma p_\gamma^k \ \ = 1,\ p_k^k \ \ = 0 \right\},\ \ k = 1,\ldots,l,$$

определяемому процессом [2]. Двойная производящая функция переходных вероятностей $\mathcal{F}(t, s, z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(t,s,z) = \sum_{k=1}^{l} \lambda_k z^{\varepsilon^k} \left(h_k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^{\varepsilon^k}}{\partial z^{\varepsilon^k}} \right) \mathcal{F}(t,s,z),\ \ \mathcal{F}(0,s,z) = e^{sz},$$

называемому первым уравнением Колмогорова для двойной производящей функции. Здесь ε^k — число α-частиц; λ_k — положительный коэффициент, характеризующий интенсивность взаимодействия частиц из k-комплекса.

Пусть $\gamma \in N^n$ — поглощающие состояния процесса. Вероятности попадания из состояния α в поглощающее состояние γ называются финальными вероятностями [3].

Для нахождения финальных вероятностей $q_{\alpha\gamma}$ используют производящую функцию

$$\Phi_\alpha(s) = \sum_\gamma q_{\alpha\gamma} s^\gamma,\ \ |s| \le 1,$$

и экспоненциальную производящую функцию

$$\Phi(z,s) = \sum_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!} \Phi_\alpha(s).$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 3.1, приведенной в работе [2], можно показать, что

$$\Phi(z,s) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{F}(t,s,z)$$

и $\Phi(z,s)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\sum_{k=1}^{l} \lambda_k z^{\varepsilon^k} \left(h_k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^{\varepsilon^k}}{\partial z^{\varepsilon^k}} \right) \Phi(s,z) = 0.$$

Примеры. Процесс эпидемий Вейса, Бартлетта — Мак-Кендрика, Гани. Рассмотрим стационарные уравнения на трех примерах марковских процессов, интерпретируемых как процессы эпидемии [4]. Для процесса эпидемии Вейса, следуя изложенному выше алгоритму, приведем подробную постановку задачи. Начнем с определения процесса. На дискретной четверти плоскости $N^2 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2, \ldots\}$ рассмотрим однородный во времени марковский процесс $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $[0, \infty)$, с переходными вероятностями $P_{(\beta_1,\beta_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = P\{\xi(t) = (\beta_1, \beta_2) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2)\}$. При $\Delta t \to 0$ полагаем

$$P_{(\alpha_1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = 1 - (\alpha_1\alpha_2 + \mu\alpha_1)\ \Delta t + o(\Delta t);$$

$$P_{(\alpha_1,\alpha_2-1)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \alpha_1\alpha_2\Delta t + o(\Delta t);$$

$$P_{(\alpha_1-1,\alpha_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \mu\alpha_1\Delta t + o(\Delta t),$$

где $\mu \ge 0$. Событие $\xi(t) = (\alpha_1, \alpha_2)$ интерпретируется как наличие совокупности из α_1-частиц типа T_1 и α_2-частиц типа T_2. Частицы рассматривают как больные (типа T_2) и здоровые (типа T_1) особи. Принятая запись для схемы взаимодействий $T_1 + T_2 \to T_1$, $T_1 \to 0$. Для приложений важна задача об оценке числа $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ финальных частиц типа T_2 (оставшихся здоровых особей). Случайная величина $\eta^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ имеет распределение $\{q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}, \gamma_2 = 0, \ldots, \alpha_2\}$, где $q_{(o,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} = \lim_{t\to\infty} P_{(o,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}(t)$.

Аналитический подход [2] к решению задачи о финальных вероятностях $q_{(o,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)}$ для поглощающих состояний $(0, \gamma_2)$, где $\gamma_2 = 0, 1, 2, \ldots$, приводит для экспоненциальной производящей функции

$$\Phi(z_1, z_2, s) = \sum_{\alpha_1,\,\alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,\alpha_2!} \sum_{\gamma_2=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2)}^{(\alpha_1,\alpha_2)} s^{\gamma_2}$$

к дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа

$$z_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2} + \left(\mu - z_2\right) \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - \mu\Phi = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\Phi\left(0, z_2, s\right) = e^{z_2 s}, \ \Phi\left(z_1, 0, s\right) = e^{z_1}. \tag{2}$$

Для марковских процессов с взаимодействием частиц, таких как процессы эпидемии Вейса [5], эпидемии Гани [6] и процесса общей эпидемии Бартлетта — Мак-Кендрика [7], задача о финальных вероятностях приводит к задачам Гурса для гиперболических уравнений.

Приведем стационарные уравнения для эпидемии Гани и процесса общей эпидемии Бартлетта — Мак-Кендрика соответственно:

$$z_3 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_2 \partial z_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \rho \left(\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} \right) = 0;$$

$$\mu z_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1 \partial z_2} \right) + \rho \left(\Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \right) = 0.$$

Здесь μ, ρ — коэффициенты, определяемые процессом как интенсивности взаимодействия частиц. Для первых двух процессов соответствующие уравнения были решены методом Римана [8, 9], для третьего была получена функция Римана [10]. Для всех трех процессов уравнения Колмогорова могут быть сведены к одному гиперболическому уравнению, рассматриваемому ниже.

Групповые свойства уравнения. Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} - \frac{\mu}{y} u\left(x, y\right) = 0,$$

или

$$u_{xy} - \frac{\mu}{y} u = 0, \tag{3}$$

и для краткости обозначим его $F = 0$. Вычислим группу Ли, допускаемую этим дифференциальным уравнением.

Теорема 1. *Группа Ли уравнения* (3) *обладает четырехмерным базисом из инфинитезимальных операторов.*

◄ Пусть $p_1 = u_x, q_1 = u_y, \ldots$ Рассмотрим переменные $x, y, u, p_1, q_1, \ldots$ и ограничение операторов полных производных на (3):

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty} p_{k+1} \frac{\partial}{\partial p_k} + \sum_{k=1}^{\infty} D_y^{k-1} \left(\frac{\mu}{y} u \right) \frac{\partial}{\partial q_k};$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + q_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty} q_{k+1} \frac{\partial}{\partial q_k} + \sum_{k=1}^{\infty} D_x^{k-1} \left(\frac{\mu}{y} u \right) \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Определяющее уравнение [11, 12]

$$l_F(\varphi)|_{F=0} = \sum_\sigma \frac{\partial F}{\partial u_\sigma} D_\sigma \varphi = 0,$$

составленное для (3), имеет вид

$$D_y D_x \varphi - \frac{\mu}{y}\varphi = 0. \tag{4}$$

Вычислим последовательно значения операторов на φ:

$$D_x\varphi = \varphi_x + p_1\varphi_u + p_2\varphi_{p_1} + \varphi_{q_1}\frac{\mu}{y}u;$$

$$D_y D_x\varphi = \varphi_{xy} + q_1\varphi_{xu} + \frac{\mu}{y}u\varphi_{xp_1} + q_2\varphi_{xq_1} +$$

$$+\frac{\mu}{y}u\varphi_u + p_1\left(\varphi_{uy} + q_1\varphi_{uu} + \frac{\mu}{y}u\varphi_{up_1} + q_2\varphi_{uq_1}\right) +$$

$$+\frac{\mu}{y}p_1\varphi_{p_1} + p_2\left(\varphi_{p_1y} + q_1\varphi_{p_1u} + \frac{\mu}{y}u\varphi_{p_1p_1} + q_2\varphi_{p_1q_1}\right) +$$

$$+\left(-\frac{\mu}{y^2} + \frac{\mu}{y}q_1\right)\varphi_{q_1} + \frac{\mu}{y}u\left(\varphi_{q_1y} + q_1\varphi_{q_1u} + \frac{\mu}{y}u\varphi_{q_1p_1} + q_2\varphi_{q_1q_1}\right).$$

Теперь запишем новый вид уравнения (4)

$$\varphi_{xy} + q_1\varphi_{xu} + \frac{\mu}{y}u\varphi_{xp_1} + q_2\varphi_{xq_1} +$$

$$+\frac{\mu}{y}u\varphi_u + p_1\left(\varphi_{uy} + q_1\varphi_{uu} + \frac{\mu}{y}u\varphi_{up_1} + q_2\varphi_{uq_1}\right) +$$

$$+\frac{\mu}{y}p_1\varphi_{p_1} + p_2\left(\varphi_{p_1y} + q_1\varphi_{p_1u} + \frac{\mu}{y}u\varphi_{p_1p_1} + q_2\varphi_{p_1q_1}\right) +$$

$$+\left(-\frac{\mu}{y^2} + \frac{\mu}{y}q_1\right)\varphi_{q_1} + \frac{\mu}{y}u\left(\varphi_{q_1y} + q_1\varphi_{q_1u} + \frac{\mu}{y}u\varphi_{q_1p_1} + q_2\varphi_{q_1q_1}\right) - \frac{\mu}{y}\varphi = 0. \tag{5}$$

Последовательно рассмотрим коэффициенты при независимых переменных и приравняем их нулю. При произведении переменных p_1q_2 имеем $\varphi_{p_1q_1} = 0$, следовательно, φ распадается на сумму двух функций $\varphi = A(x, y, u, p_1) + B(x, y, u, q_1)$. При $p_2 : D_y(A_{p_1}) = 0$, таким образом, A_{p_1} зависит от x; при $q_2 : D_x(B_{q_1}) = 0$, следовательно, B_{q_1} зависит от y; φ имеет вид $\varphi = \alpha(x)\;\; p_1 + \beta(y)q_1 + C(x, y, u)$. Подставим в (5) и получим

$$C_{xy} + q_1C_{xu} + \frac{\mu}{y}u\alpha_x - \frac{\mu}{y}uC_u + p_1(C_{uy} + q_1C_{uu}) +$$

$$+\frac{\mu}{y}p_1\alpha + \beta\left(-\frac{\mu}{y^2}u + \frac{\mu}{y}q_1\right) + \frac{\mu}{y}u\beta_y - \frac{\mu}{y}(\alpha\, p_1 + \beta q_1 + C) = 0. \tag{6}$$

Получаем, продолжая расщепление, при $p_1 q_1 : C_{xy} = 0;$ при $p_1 : C_{uy} = 0;$ при $q_1 : C_{xu} = 0,$ следовательно, $C = c_1 u + \gamma(x, y).$ Подставляя в (6), получим

$$\gamma_{xy} + \frac{\mu}{y} u\alpha_x - \frac{\mu}{y} uc_1 - \frac{\mu}{y^2} u\beta + \frac{\mu}{y} u\beta_y - \frac{\mu}{y}\left(c_1 u + \gamma\right) = 0. \quad (7)$$

При $u = 1$

$$\frac{\mu}{y}\alpha_x - \frac{\mu}{y} c_1 - \frac{\mu}{y^2}\beta + \frac{\mu}{y}\beta_y - \frac{\mu}{y} c_1 = 0.$$

После приведения подобных слагаемых получаем уравнение

$$\alpha_x = \frac{\beta}{y} - \beta_y,$$

дифференцируя которое по x, определяем $\alpha_{xx} = 0$ и $\alpha = c_2 x + c_3;$ дифференцируя по y, после преобразования находим уравнение Эйлера

$$y^2\beta_{yy} - y\beta_y + \beta = 0,$$

которое имеет решение $\beta = c_4 y + c_5 y \ln y.$ Подставляя полученные из дифференциальных следствий результаты в исходное уравнение, запишем связь между константами

$$c_5 = -c_2. \quad (8)$$

Отметим, что, собирая в уравнении (7) коэффициенты при 1, получаем

$$\gamma_{xy} - \frac{\mu}{y}\gamma = 0,$$

т. е. симметрию, задаваемую любым решением исходного уравнения и связанную с ними бесконечномерную алгебру Ли L_∞. В итоге (с учетом (8)) был получен следующий вид производящей функции:

$$\varphi = \alpha(x) p_1 + \beta\left(y\right) q_1 + \gamma\left(x, y\right) = \left(c_2 x + c_3\right) p_1 + \left(c_4 y - c_2 y \ln y\right) q_1 + c_1 u + \gamma =$$
$$= c_1\_\varphi_1 + c_2\_\varphi_2 + c_3\_\varphi_3 + c_4\_\varphi_4 + \gamma, \quad (9)$$

где $\varphi_1 = u,$ соответствующий оператор $X_1 = u\frac{\partial}{\partial u};$ $\varphi_2 = xp_1 - y \ln y q_1,$ соответствующий оператор $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y \ln y \frac{\partial}{\partial y};$ $\varphi_3 = p_1,$ соответствующий оператор $X_3 = \frac{\partial}{\partial x};$ $\varphi_4 = yq_1,$ соответствующий оператор $X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$ Инфинитезимальные операторы X_1, X_2, X_3, X_4 составляют базис четырехмерной алгебры Ли $L_4,$ что и требовалось доказать. ►

Для элементов $X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial u}$ алгебры Ли L_4 умножение определяется по формуле

$$[X_i, X_j] = (X_i(\xi_j) - X_j(\xi_i))\frac{\partial}{\partial x} + (X_i(\eta_j) - X_j(\eta_i))\frac{\partial}{\partial y} + (X_i(\zeta_j) - X_j(\zeta_i))\frac{\partial}{\partial u}.$$

Таблица умножения образующих элементов приведена ниже.

Таблица умножения образующих элементов

Элемент	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0	0	0
X_2	0	0	$-X_3$	X_4
X_3	0	X_3	0	0
X_4	0	$-X_4$	0	0

Отметим, что симметрия, соответствующая оператору $X_1 = u\frac{\partial}{\partial u}$, имеется у каждого линейного уравнения второго порядка, и поэтому в работе [12] набор образующих алгебры Ли рассмотрен с точностью до X_1, в такой классификации полученная алгебра Ли является трехмерной.

Приложение. Вывод функции Римана. Метод функции Римана состоит в сведении задачи интегрирования гиперболического уравнения

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = 0 \qquad (10)$$

к построению вспомогательной функции v, которая называется функцией Римана, если она удовлетворяет сопряженному уравнению

$$L^*[v] = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a(x,y)\frac{\partial v}{\partial x} - b(x,y)\frac{\partial v}{\partial y} + c(x,y)v = 0 \qquad (11)$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{x=x_0} = a(x_0, y)v; \ \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{y=y_0} = b(x, y_0)v. \qquad (12)$$

Если решена задача (11), (12), то решение задачи Коши для уравнения (10) дается явным интегральным представлением [13]. По теореме 4.1, приведенной в работе [12], если уравнение допускает четырехмерную алгебру Ли, то задача Гурса допускает одномерную инвариантную алгебру Ли и потому сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. Будем искать его, следуя алгоритму, изложенному в работе [14]. Из найденных в теореме 1 операторов X_1, X_2, X_3 составим (единственно возможным образом) линейную комбинацию

$$X = (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} - y(\ln y - \ln y_0)\frac{\partial}{\partial y},$$

оставляющую инвариантными характеристики, а также условия на характеристиках

$$v\left(x_0, x_0; y, y_0\right) = 1,\ v\left(x, x_0; y_0, y_0\right) = 1.$$

Отметим, что для второй характеристики, инвариантной относительно оператора, является ее запись в виде $\ln y / y_0 = 0$. Критерий инвариантности функции F относительно оператора $X = \xi \dfrac{\partial}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial}{\partial y} + \zeta \dfrac{\partial}{\partial u}$ состоит в удовлетворении ею уравнения $XF = 0$.

В рассматриваемом случае это уравнение

$$\left(x - x_0\right)\frac{\partial F}{\partial x} - y\left(\ln y - \ln y_0\right)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Решая его как уравнение в частных производных

$$\frac{dx}{x - x_0} = -\frac{dy}{y\left(\ln y - \ln y_0\right)},$$

получаем, что инвариантами оператора X являются первый интеграл $\theta = \left(x - x_0\right)\ln y / y_0$ и v. В уравнении (3), совпадающим со своим сопряженным, выполним замену $v = V\left(\theta\right) = V\left(\left(x - x_0\right)\ln\dfrac{y}{y_0}\right)$ и запишем уравнение типа Бесселя

$$\theta V''\left(\theta\right) + V'\left(\theta\right) - \mu V\left(\theta\right) = 0.$$

Замена $z = -\theta^2 / \left(4\mu\right)$ приводит его к каноническому уравнению Бесселя $zV''_{zz} + V'_z + zV = 0$, отсюда $V = J_0(z)$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка; $V\left(\theta\right) = J_0\left(2\sqrt{-\mu\theta}\right)$. Окончательно запишем следующее утверждение.

Теорема 2 [8–10]. *Уравнение эпидемии* (3) *обладает функцией Римана*

$$v\left(x, x_0; y, y_0\right) = J_0\left(2\sqrt{-\mu\left(x - x_0\right)\ln y / y_0}\right).$$

Далее выводят [8, 9] решение стационарного уравнения (3) и рассматривают предельные теоремы, относящиеся для процессов эпидемии к теоремам «порогового» типа, которые применяют для определения пороговой численности инфицированных частиц, превышение которого означает начало эпидемии [15]. Отметим, что граничные условия для уравнения Бартлетта — Мак-Кендрика не являются условиями на характеристиках, поэтому приведенный метод Римана к нему неприменим.

Заключение. Предложенный в работе групповой подход к исследованию уравнений на двойную производящую функцию процесса дает новый взгляд на аналитические методы и результаты теории эпидемий. Применение полученной в теореме 1 алгебры Ли хорошо вписывается в сложившийся набор используемых для исследования процессов эпидемии методов, не только подтверждает уже полученные результаты для процессов Вейса и Гани, но и позволяет выявить причину возникших трудностей исследования процесса Бартлетта — Мак-Кендрика. В следующей работе с групповой точки зрения будет рассмотрен метод разделения переменных для системы первого и второго уравнений Колмогорова процессов эпидемии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с.

2. *Калинкин А.В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи математических наук. 2002. Т. 57. № 2. С. 23–84.

3. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.

4. *Эпидемии* процесс // Математическая энциклопедия. Т. 5. М.: Советская энциклопедия, 1985. 623 с.

5. *Weiss G.* On the spread of epidemics by carries // Biometrics. 1965. Vol. 21. No. 2. P. 481–490. DOI: 10.2307/2528105 URL: http://www.jstor.org/stable/2528105

6. *Gani J.* Approaches to the modelling of AIDS // Stochastic processes in epidemic theory. Springer, 1990. Pp. 145–154.

7. *Bartlett M.S.* Some evolutionary stochastic processes // J. of Royal Statistical Society. Ser. B (Methodological). 1949. Vol. 11. No. 2. P. 211–229.

8. *Калинкин А.В.* Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии // Теория вероятностей и ее применение. 1998. Т. 43. № 4. С. 773–780.

9. *Мастихин А.В.* Финальное распределение для марковского процесса эпидемии Гани // Математические заметки. 2007. Т. 82. № 6. С. 873–884.

10. *Мастихин А.В.* Функция Римана для некоторых уравнений Колмогорова // Инженерный вестник. 2014. № 12. URL: http://engsi.ru/doc/745888.html

11. *Виноградов А.М., Красильщик И.С., ред.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. М.: Факториал Пресс, 2005. 379 с.

12. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 339 с.

13. *Бицадзе А.В., Калиниченко Д.Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1985. 312 с.

14. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Знание, 1991. 48 с.

15. *Kalinkin A.V., Mastikhin A.V.* A limit theorem for a Weiss epidemic // J. Appl. Probab. 2015. Vol. 52. No. 1. P. 247–257.

Мастихин Антон Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Шевченко Маргарита Николаевна — старший преподаватель кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Мастихин А.В., Шевченко М.Н. Групповой метод поиска функции Римана для некоторых уравнений эпидемии // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 2. С. 12–22. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-2-12-22

GROUP METHOD IN SEARCHING RIEMANN FUNCTION FOR SOME EPIDEMIC EQUATIONS

A.V. Mastikhin mastihin@bmstu.ru
M.N. Shevchenko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

In the stochastic theory of epidemics, the general stochastic epidemic (i. e. Bartlett — Mac-Kendric epidemic process) and the simple stochastic epidemic (i. e. Weiss epidemic process) are the basic models; both of them are considered on the set of states N^2. In Bartlett — Mac-Kendric epidemic process an ineracting pair of infected and susceptible particles transform into a pair of two infected particles (or two carriers). This process is rather complicated; some results were obtained by asymptotic methods. In Weiss epidemic process an interacting pair of infected and susceptible particles transform into one carrier, i. e. one infected individual is removed from the population. This Markov process is more accessible to study; there are many generalizations of Weiss model on the case of N^n. For instance, J. Gany introduced a carrier borne epidemic process with two stages of infection on N^3 which may be of some relevance to the spread of AIDS. We consider the first stationary Kolmogorov equation for exponential (double) generating function of transitions probabilities of Markov epidemic process. For all three processes considered above we have the same stationary Kolmogorov equation. It is possible to solve it by using Riemann function as the solution of a characteristic value problem. In present paper we study this hyperbolic equation by the symmetry method. The 4-dimentional Li algebra was obtained in the theorem 1. It contains a subalgebra, which is invariant due to the characteristic problem. So, we can reduce the hyperbolic equation to Bessel differential equation. Then, it is easy to construct the solution in an integral form and to obtain limit theorems. We also discuss the possibility of using Riemann method in the case of general epidemic process

Keywords

Infinitesimal symmetry generator, Markov process, exponential (double) generating function, first Kolmogorov equation, Riemann function

Received 16.02.2017

REFERENCES

[1] Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Vvedenie v teoriyu sluchaynykh protsessov [Introduction to the random processes theory]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 568 p.

[2] Kalinkin A.V. Markov branching processes with interaction. *Russian Mathematical Surveys*, 2002, vol. 57, no. 2, pp. 241–304. DOI: 10.1070/RM2002v057n02ABEH000496

[3] Sevast'yanov B.A. Vetvyashchiesya protsessy [Branching processes]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 436 p.

[4] Epidemii protsess. Matematicheskaya entsiklopediya. T. 5 [Epidemic process. In: Mathematical encyclopedia. Vol. 5]. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya Publ., 1985. 623 p.

[5] Weiss G. On the spread of epidemics by carries. *Biometrics*, 1965, vol. 21, no. 2, pp. 481–490. DOI: 10.2307/2528105 Available at: http://www.jstor.org/stable/2528105

[6] Gani J. Approaches to the modelling of AIDS. Stochastic processes in epidemic theory. Springer, 1990. Pp. 145–154.

[7] Bartlett M.S. Some evolutionary stochastic processes. *J. of Royal Statistical Society. Ser. B (Methodological)*, 1949, vol. 11, no. 2, pp. 211–229.

[8] Kalinkin A.V. Final probabilities for a branching process with interaction of particles and an epidemic process. *Theory of Probability and its Applications*, 1999, vol. 43, no. 4, pp. 633–640. DOI: 10.1137/S0040585X97977203

[9] Mastikhin A.V. Final distribution for Gani epidemic Markov processes. *Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, iss. 5–6, pp. 787–797. DOI: 10.1134/S0001434607110223

[10] Mastikhin A.V. Riemann functions for some Kolmogorov equations. *Inzhenernyy vestnik* [Engineering Bulletin], 2014, no. 12 (in Russ.). Available at: http://engsi.ru/doc/745888.html

[11] Vinogradov A.M., Krasil'shchik I.S., ed. Simmetrii i zakony sokhraneniya uravneniy matematicheskoy fiziki [Symmetry and energy conservation laws of equations of mathematical physics]. Moscow, Faktorial Press Publ., 2005. 379 p.

[12] Ovsyannikov L.V. Gruppovoy analiz differentsial'nykh uravneniy [Group analysis of differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 339 p.

[13] Bitsadze A.V., Kalinichenko D.F. Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki [Problem book of mathematical physics equations]. Moscow, Nauka Publ., 1985. 312 p.

[14] Ibragimov N.Kh. Opyt gruppovogo analiza obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [Group analysis experience of ordinary differential equations]. Moscow, Znanie Publ., 1991. 48 p.

[15] Kalinkin A.V., Mastikhin A.V. A limit theorem for a Weiss epidemic. *J. Appl. Probab*., 2015, vol. 52, no. 1, pp. 247–257.

Mastikhin A.V. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Shevchenko M.N. — Assist. Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Mastikhin A.V., Shevchenko M.N. Group Method in Searching Riemann Function for some Epidemic Equations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 2, pp. 12–22 (in Russ.).
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-2-12-22