

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
МАГИСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА С УЧЕТОМ
НАЛИЧИЯ КРУТОИЗОГНУТЫХ ВСТАВОК**

А.А. Александров¹, Ю.В. Лисин², В.И. Ларионов¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
e-mail: rector@bmsu.ru;

²ОАО “АК“Транснефть”, Москва
e-mail: lar@esrc.ru

Приведена математическая модель пространственного изгиба трубопровода, используемая при оценке прочности магистрального нефтепровода, возведенного в сложных геологических условиях, учитывающая не только основные закономерности взаимодействия трубопровода с грунтом, но и конструктивные особенности трубопровода, такие как крутоизогнутые вставки.

Ключевые слова: нефтепровод, крутоизогнутые вставки, деформация, кривизна, изгиб, грунт, нагрузки, моделирование, сложные геологические условия.

**MATHEMATICAL SIMULATION OF THE STRESS
AND STRAIN BEHAVIOR OF THE MAIN PIPELINE
WITH STEEPLY CURVED INSERTS**

A.A. Aleksandrov¹, Yu.V. Lisin², V.I. Larionov¹

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow
e-mail: rector@bmsu.ru;

²ОАО АК “Transneft”, Moscow
e-mail: lar@esrc.ru

A mathematical model of spatial bending of a pipeline is given, which is used in estimation of strength of the main oil pipeline built under complex geological conditions and takes into account not only main regularities of the pipeline's interaction with soil, but also its design features such as steeply curved inserts.

Keywords: oil pipeline, steeply curved inserts, deformation, curvature, bending, soil, loads, simulation, complex geological conditions.

Магистральные трубопроводы представляют собой сложную инженерную систему, для адекватной оценки прочности и надежности которой в настоящее время используются методы математического моделирования.

Математическая модель пространственного изгиба трубопровода основана на минимизации функции Лагранжа L , которая равна потенциальной энергии деформаций \mathcal{E} , накопленной замкнутой системой, за вычетом работы действующих внешних сил A :

$$L = \mathcal{E} - A.$$

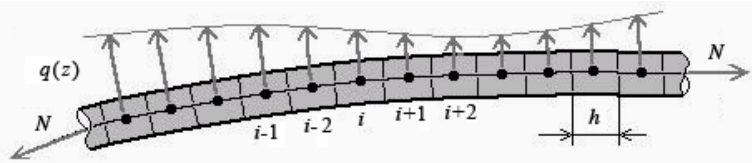


Рис. 1. Разбиение трубопровода на конечные элементы

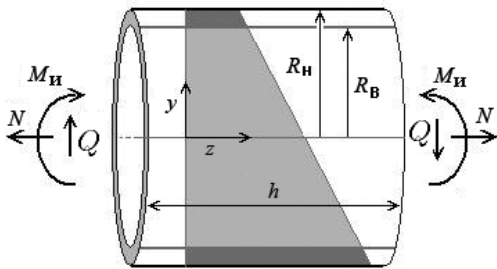


Рис. 2. Схема силового нагружения конечного элемента

Работа внешних сил определяется как произведение силы на перемещение или момента на угол поворота. Потенциальная энергия деформаций конечного элемента определяется действующими в нем нормальными и касательными напряжениями (рис. 1). В системах координат $x y z$ и $r \varphi z$ при выборе главных площадок, соответствующих координатным плоскостям, схема нагружения может быть представлена рис. 2.

Нормальные напряжения в радиальном и окружном направлениях σ_r и σ_φ определяются действием внутреннего или внешнего давления P .

Нормальные напряжения в продольном направлении σ_z зависят от многих факторов: давления, температуры, технологии монтажа трубопровода, внешних нагрузок. Все вместе эти силы образуют осевую силу N .

Касательные напряжения τ_{zy} и τ_{zx} определяются действием поперечных сил Q_y и Q_x , а касательные напряжения $\tau_{z\varphi}$ — действием крутящего момента M_K .

Рассмотрим энергию деформаций, возникающих при действии различных видов нагрузок: внутреннего и внешнего давления; поперечной составляющей распределенной нагрузки; продольной составляющей распределенной нагрузки; осевой нагрузки N ; крутящего момента M_K ; изгибающего момента $M_и$ (в вертикальной и горизонтальной плоскостях).

Энергия радиальных деформаций от действия внутреннего и внешнего давлений. Распределение по толщине стенки радиальных напряжений описывается общим выражением

$$\sigma_r = a - \frac{b}{r^2},$$

где

$$a = \frac{R_B^2 P_B - R_H^2 P_H}{R_H^2 - R_B^2}; \quad b = \frac{(R_B R_H)^2 (P_B - P_H)}{R_H^2 - R_B^2};$$

$R_{\text{н}}, R_{\text{в}}$ — наружный и внутренний радиусы сечения трубы (см. рис. 2); $P_{\text{н}}, P_{\text{в}}$ — давления снаружи и внутри трубы; r — полярная координата, определяющая расстояние от оси трубы.

Плотность энергии радиальных деформаций определяется выражением [1]

$$\vartheta = \frac{\sigma_r^2}{2E},$$

тогда энергию радиальных деформаций в конечном элементе можно определить как

$$\mathcal{E}_h = \int_v \vartheta dv = \frac{\pi h}{E} \int_{R_{\text{в}}}^{R_{\text{н}}} \left(a - \frac{b}{r^2} \right)^2 r dr,$$

где E — модуль упругости металла; v — объем конечного элемента длиной h .

Вычисляя интеграл в последнем выражении, получаем, что энергия элемента квадратично зависит от внутреннего и внешнего давлений $P_{\text{в}}$ и $P_{\text{н}}$:

$$\mathcal{E}_h = \frac{\pi h}{E} \left\{ \frac{a^2}{2} (R_{\text{н}}^2 - R_{\text{в}}^2) - 2ab \ln \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{в}}} + \frac{b^2}{2R_{\text{н}}^2} \left(\frac{1}{R_{\text{в}}^2} - \frac{1}{R_{\text{н}}^2} \right) \right\}.$$

Магистральные трубопроводы относятся к классу тонкостенных трубопроводов. Кроме того, внешнее давление $P_{\text{н}}$ как минимум на порядок меньше внутреннего давления $P_{\text{в}}$. Исходя из этого, выражение для энергии конечного элемента можно упростить.

В пределах толщины стенки, которая мала по сравнению с радиусами $R_{\text{н}}$ и $R_{\text{в}}$, распределение радиальных напряжений вполне можно считать линейным, причем на наружной поверхности радиальное напряжение равно нулю ($\sigma_r = -P_{\text{н}} = 0$), а на внутренней поверхности равно давлению $P_{\text{в}}$, взятому с обратным знаком ($\sigma_r = -P_{\text{в}} = -P$).

Тогда среднее радиальное напряжение по толщине стенки будет равно $\sigma_r = -0,5P$. Учитывая, что плотность энергии радиальных деформаций $\vartheta = \frac{\sigma_r^2}{2E}$, получаем формулу для определения энергии радиальных деформаций в конечном элементе:

$$\mathcal{E}_h = \int_v \vartheta dv = \frac{\sigma_r^2}{2E} V_h = \frac{h}{8E} P^2 F. \quad (1)$$

Здесь $F = \pi\delta(D - \delta)$ — площадь поперечного сечения трубы; D — наружный диаметр трубы; δ — толщина стенки; V_h — объем металла в конечном элементе.

Энергия окружных деформаций от действия внутреннего и внешнего давлений. Окружные напряжения находятся по формуле

$$\sigma_{\varphi} = \frac{PR_{\text{в}}}{\delta},$$

где $P = P_v - P_n$ — разность внутреннего и внешнего давлений.

Плотность энергии окружающих деформаций [1]

$$\vartheta = \frac{\sigma_\varphi^2}{2E},$$

тогда энергию окружающих деформаций в конечном элементе можно определить из выражения

$$\Theta_h = \int_v \vartheta dv = \frac{\sigma_\varphi^2}{2E} V_h = \frac{h}{2E} P^2 F \left(\frac{R_B}{\delta} \right)^2. \quad (2)$$

Здесь и далее

$$R_n = D/2; \quad R_B = R_n - \delta$$

— соответственно наружный и внутренний радиусы трубы.

Энергия продольных напряжений и деформаций. Продольные напряжения и деформации возникают от действия осевой силы N и изгибающего момента M_n (см. рис. 2) и определяются выражением

$$\sigma_{np} = \frac{N}{F} - \frac{yM_n}{J_x} = \sigma_o - kr \sin \varphi,$$

где $\sigma_o = N/F$ — осевое напряжение; $k = M_n/J_x$; J_x — момент инерции поперечного сечения трубы относительно оси X :

$$J_x = \int y^2 dF = \frac{\pi (R_n^4 - R_B^4)}{4}.$$

Плотность энергии продольных деформаций определяется по формуле

$$\vartheta = \frac{\sigma_{np}^2}{2E}.$$

Тогда энергия продольных деформаций участка трубы единичной длины

$$\Theta_1 = \int_F \vartheta dF = \frac{1}{2E} \int_{R_B}^{R_n} \int_0^{2\pi} (\sigma_o - kr \sin \varphi)^2 r dr d\varphi = \frac{1}{2E} \left(\frac{N^2}{F} + \frac{M_n^2}{J_x} \right),$$

а энергия продольных деформаций в конечном элементе

$$\Theta_h = \frac{h}{2E} \left(\frac{N^2}{F} + \frac{M_n^2}{J_x} \right). \quad (3)$$

Энергия касательных напряжений. Касательные напряжения при кручении под действием момента M_k определяются из выражения

$$\tau_{z\varphi} = r \frac{M_k}{J_o},$$

где J_o — полярный момент инерции сечения трубы, равный

$$J_o = \int r^2 dF = \frac{\pi (R_H^4 - R_B^4)}{2} = 2J_x.$$

Плотность энергии деформаций находится по формуле

$$\vartheta = \frac{\tau_{z\varphi}^2}{2G},$$

где $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ — модуль сдвига, а μ — коэффициент Пуассона металла трубы.

Тогда энергия участка трубы единичной длины может быть найдена по формуле

$$\mathcal{E}_1 = \int_F \vartheta dF = \int_0^{2\pi} \int_{R_B}^{R_H} \frac{r^2 M_K^2}{2G J_o^2} r dr d\varphi = \frac{M_K^2}{2G J_o},$$

а энергия деформаций на участке трубы длиной h равна

$$\mathcal{E}_h = \frac{h}{2G} \cdot \frac{M_K^2}{J_o}. \quad (4)$$

Касательные напряжения от действия поперечной силы Q^1 определяются по формуле Журавского [2]

$$\tau_{zy} = \frac{Q S_x}{J_x b},$$

где b — ширина поперечного сечения стенки трубы на уровне определения τ_{zy} ; S_x — статический момент относительно нейтральной оси отсеченной части поперечного сечения.

Наибольшие касательные напряжения определяются по формуле

$$(\tau_{zy})_{\max} = \frac{4Q}{3\pi\delta} \cdot \frac{R_H^3 - R_B^3}{R_H^4 - R_B^4}.$$

Плотность энергии деформации при поперечном сдвиге и изгибе вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{\sigma_{\text{пр}}^2}{2E} + \frac{\tau_{zy}^2}{2G}.$$

Подставив в последнюю формулу $\sigma_{\text{пр}} = \frac{M_H}{J_x} y$ и $\tau_{zy} = \frac{Q S_x}{J_x b}$, интегрируя ее по объему конечного элемента, получим потенциальную

¹ Действие поперечной силы Q сопровождается появлением момента изгиба M_H , поэтому их необходимо рассматривать совместно.

энергию деформации участка трубы длиной h при действии поперечной силы Q и соответствующего изгибающего момента $M_{и}$

$$\mathcal{E}_h = \frac{h}{2G} \cdot \frac{Q^2 \eta}{F} + \frac{h}{2E} \cdot \frac{M_{и}^2}{J_x}, \quad (5)$$

где $\eta = \frac{F}{J_x^2} \int_F \frac{S_x^2}{b^2} dF$ – безразмерный параметр, зависящий от формы сечения, принимаемый для труб $\eta = 1,5$; F – площадь поперечного сечения трубы; S_x , J_x – статический момент и момент инерции поперечного сечения.

Энергия деформаций от действия различных видов нагрузок. Формулы (1)–(5) показывают, что составляющие энергии, определяемые различными видами нагрузок, полностью разделены. Это позволяет рассматривать энергии деформаций от разных видов нагрузок независимо друг от друга с последующим их суммированием. Таким образом, энергия деформации конечного элемента длиной h выражается общей формулой

$$\mathcal{E}_h = \frac{h}{2E} P^2 F \xi + \frac{h}{2E} \cdot \frac{N^2}{F} + \frac{h}{2E} \cdot \frac{M_{и}^2}{J_x} + \frac{h}{2G} \left(\frac{Q^2}{F} \eta + \frac{M_{к}^2}{J_o} \right), \quad (6)$$

где безразмерные параметры приняты равными: $\xi = 0,25 + (R_b/\delta)^2$; $\eta = 1,5$.

Взаимная независимость энергий деформаций от воздействия разных нагрузок (P , N , Q , $M_{и}$, $M_{к}$) позволяет значительно упростить процедуру получения уравнений равновесия в конечно-элементном представлении.

Численное решение моделирования напряженно-деформированного состояния трубопровода. Схема трубопровода представлена на рис.3. Трубопровод состоит из прямых и крутоизогнутых участков. Но при укладке в траншею прямые участки могут получить некоторую кривизну в пределах упругих деформаций. Эти участки будем называть условно прямыми, исходя из того, что в ненапряженном состоянии они опять стали бы прямыми. Крутоизогнутые участки также могут изменить свою кривизну под действием внешних факторов, в том числе при укладке в траншею. Но в ненапряженном состоянии они принимают свою исходную кривизну.

Границы прямых и кривых участков обозначим точками L_1 , L_2 , L_3 , L_4 и т.д. Местонахождение точек определим через криволинейные координаты l_1 , l_2 , l_3 , l_4 и т.д., ось l совпадает с осью трубопровода. На практике положение точек можно указать в километрах или пикетах по трассе трубопровода.

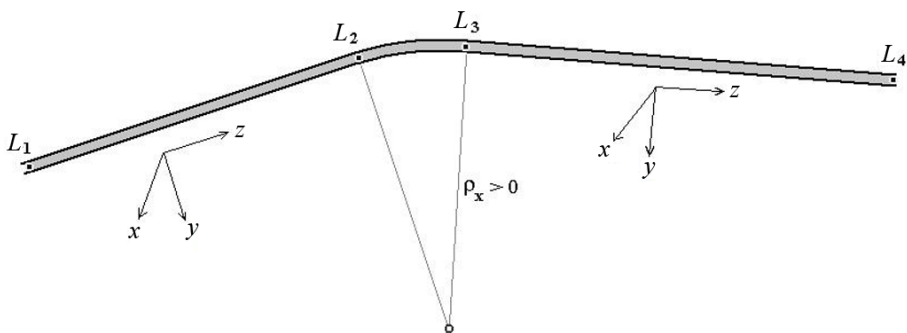


Рис. 3. Схема трубопровода, состоящего из прямых и крутоизогнутых участков

Также введем подвижную прямоугольную систему координат, привязанную к трубопроводу следующим образом: ось x направлена перпендикулярно к оси трубопровода горизонтально, ось y — вертикально к оси трубопровода, ось z направлена вдоль горизонтальной проекции оси трубопровода. При прохождении кривых участков оси координат x , y и z постепенно меняют свои направления. В выбранной системе координат обозначим координаты точек трубопровода как u_0, v_0, w_0 в начальный и u, v, w — в текущий (в процессе решения) моменты времени.

Кривизну участков в горизонтальной и вертикальной плоскостях обозначим соответственно $K_x = \frac{1}{\rho_x}$ и $K_y = \frac{1}{\rho_y}$, где ρ_x и ρ_y — радиусы кривизны участков в плоскостях zx и zy . Кривизна может принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем считается, что K_x и K_y положительны, если направление вогнутости кривой совпадает с положительным направлением осей x и y соответственно.

Таким образом, для задания конфигурации участка трубопровода необходимо:

- 1) разбить заданный участок на прямые и кривые участки, определить их длины l_{12}, l_{23}, l_{34} и т.д.;
- 2) задать координаты граничных точек и точек, разделяющих прямые и кривые участки $L_1(u_1, v_1, w_1), L_2(u_2, v_2, w_2), L_3(u_3, v_3, w_3), L_4(u_4, v_4, w_4)$ и т.д.; также можно задавать любые промежуточные точки;
- 3) задать кривизну каждого участка K_{12}, K_{23}, K_{34} и т.д. с учетом знаков.

Далее строится конечно-элементная сетка. Для этого следует задать узлы, начиная от точки L_1 , с шагом h . Пронумеруем узлы и элементы, как показано на рис. 4.

Координаты всех узлов конечно-элементной сетки определим с помощью интерполяции по координатам заданных граничных и проме-

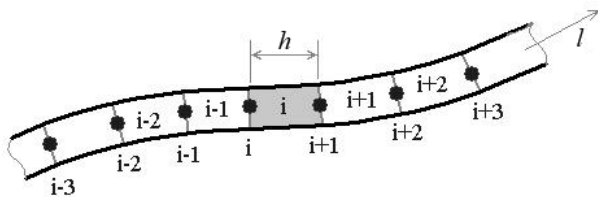


Рис. 4. Нумерация узлов и элементов в конечно-элементной модели

жуточных точек L_1, L_2, L_3, L_4 и т.д. Затем находим исходную кривизну для каждого конечного элемента. Поскольку в процессе решения задачи координаты всех узлов будут изменяться под действием сил, пометим все параметры в начальный момент дополнительным индексом 0 (текущие значения индекса 0 не имеют), т.е. $u_{0(i)}, v_{0(i)}, w_{0(i)}$ — это начальные координаты узла с номером (i) , а $u_{(i)}, v_{(i)}, w_{(i)}$ — текущие координаты узла с номером (i) ; $K_{0x(i)}, K_{0y(i)}$ — начальные значения кривизны элемента (i) в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно.

Зависимость энергии деформаций от координат узлов конечно-элементной сетки. Рассмотрим формулу (6) применительно к построенной конечно-элементной модели трубопровода (см. рис. 4).

Исходные данные для моделирования: D — наружный диаметр трубопровода; δ — толщина стенки трубопровода; $E = 206 \cdot 10^9$ Па и $\mu = 0,3$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона металла трубы; $\alpha = 0,00012 \text{ K}^{-1}$ — коэффициент температурного расширения материала трубы; h — длина конечного элемента; P — рабочее давление; Δt — расчетный температурный перепад, определяемый как разность между температурой в стенке трубы в процессе эксплуатации и температурой трубы при строительстве трубопровода.

По исходным данным находятся вспомогательные величины: $R_{\text{н}} = D/2$ — наружный радиус сечения трубы; $R_{\text{в}} = R_{\text{н}} - \delta$ — внутренний радиус сечения трубы; $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$ — модуль сдвига металла; $F = \pi(R_{\text{н}}^2 - R_{\text{в}}^2)$ — площадь поперечного сечения трубы; $\xi = 0,25 + \left(\frac{R_{\text{в}}}{\delta}\right)^2$, $\eta = 1,5$ — безразмерные параметры в формулах (6) и (5) соответственно; $J_x = J_y = \frac{\pi}{4}(R_{\text{н}}^4 - R_{\text{в}}^4)$ — момент инерции поперечного сечения трубы относительно осей x и y ; $J_o = \frac{\pi}{2}(R_{\text{н}}^4 - R_{\text{в}}^4)$ — полярный момент инерции сечения трубы. Задается начальная кривизна на всех конечных элементах (i) в горизонтальной и вертикальной плоскостях, соответственно $K_{0x(i)} = \frac{1}{\rho_{0x(i)}}$ и $K_{0y(i)} = \frac{1}{\rho_{0y(i)}}$, где $\rho_{0x(i)}, \rho_{0y(i)}$ — исходные радиусы кривизны элемента (i) в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Рассмотрим выражения для разных составляющих энергии деформаций в зависимости от положений узлов.

1. Энергия элемента (i) за счет действия внутреннего давления P определяется из выражения

$$\mathcal{E}_{P(i)} = \frac{h}{2E} P^2 F \xi. \quad (7)$$

Как видно, эта часть энергии не зависит явно от координат узлов, а при смещении узлов вариация этой энергии равна нулю, следовательно, в построении конечно-элементных уравнений равновесия эта часть энергии не участвует.

2. Энергия элемента (i) за счет действия осевой силы N описывается формулой

$$\mathcal{E}_{N(i)} = \frac{h}{2E} \cdot \frac{N^2}{J_x}, \quad (8)$$

где $N = (\sigma_0 + \varepsilon_i E) F$ — осевая сила; $\sigma_0 = \mu \sigma_{\text{кн}} - E \alpha \Delta t$ — осевое напряжение, вызванное внутренним давлением и расчетным температурным перепадом; $\sigma_{\text{кн}} = \frac{P R_{\text{в}}}{\delta}$ — кольцевое напряжение в стенке

трубы; $\varepsilon_i = \frac{\ell_i - \ell_{0i}}{\ell_{0i}}$ — осевая деформация конечного элемента

(i); $\ell_i = \gamma_x \gamma_y \sqrt{(u_{(i+1)} - u_{(i)})^2 + (v_{(i+1)} - v_{(i)})^2 + (w_{(i+1)} - w_{(i)} + h)^2}$ — длина элемента (i) в текущем состоянии (на текущем шаге решения); $\ell_{0i} = \sqrt{(u_{0(i+1)} - u_{0(i)})^2 + (v_{0(i+1)} - v_{0(i)})^2 + (w_{0(i+1)} - w_{0(i)} + h)^2}$ — длина элемента (i) в начальном (ненапряженном) состоянии трубопровода.

Так как в начальном состоянии $w_{0(i+1)} = w_{0(i)}$, то

$$\ell_{0i} = \sqrt{(u_{0(i+1)} - u_{0(i)})^2 + (v_{0(i+1)} - v_{0(i)})^2 + h^2}.$$

Здесь введены поправочные коэффициенты² γ_x и γ_y , учитывающие поворот системы координат в пределах кривых вставок. Эти коэффициенты определяются следующим образом:

$$\gamma_x = \gamma_y = 1$$

— для прямолинейных участков;

$$\gamma_x = \frac{\rho_{0x} - u_{\text{ср}}}{\rho_{0x}} = 1 - u_{\text{ср}} K_{0x}, \quad \gamma_y = \frac{\rho_{0y} - v_{\text{ср}}}{\rho_{0y}} = 1 - v_{\text{ср}} K_{0y}$$

²На практике коэффициенты γ_x и γ_y следует учитывать лишь в том случае, когда радиус кривизны участка меньше ста диаметров трубы, а длина конечного элемента сопоставима с диаметром трубы, т.е. при одновременном выполнении условий $\rho < 100D$, $0,1 < h < 10D$.

– в пределах участков с исходной кривизной, где $u_{\text{ср}} = \frac{u_{(i+1)} + u_{(i)}}{2}$;
 $v_{\text{ср}} = \frac{v_{(i+1)} + v_{(i)}}{2}$, причем при подстановке в расчетные формулы необходимо учитывать знак радиусов изогнутых вставок ρ_x и ρ_y .

При варьировании узла (i) изменения претерпевают только энергии узлов с номерами (i) и ($i - 1$), поэтому достаточно рассмотреть сумму энергий этих элементов

$$\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_{N(i-1)} + \mathcal{E}_{N(i)}. \quad (9)$$

3. Энергия элемента (i) за счет действия внешней поперечной (перезывающей) силы Q определяется из выражения

$$\mathcal{E}_{Q(i)} = \frac{h}{2G} \cdot \frac{Q^2}{F} \eta. \quad (10)$$

Составляющие силы Q , определяемой соотношением

$$Q^2 = Q_x^2 + Q_y^2, \quad (11)$$

где

$$Q_x = EJ_y \frac{d^3 u}{dz^3}, \quad Q_y = EJ_x \frac{d^3 v}{dz^3}; \quad (12)$$

$$\left. \frac{d^3 u}{dz^3} \right|_{(i)} = \frac{u_{(i+2)} - 3u_{(i+1)} + 3u_{(i)} - u_{(i-1)}}{h^3}; \quad (13)$$

$$\left. \frac{d^3 v}{dz^3} \right|_{(i)} = \frac{v_{(i+2)} - 3v_{(i+1)} + 3v_{(i)} - v_{(i-1)}}{h^3}, \quad (14)$$

входят в формулы для касательных напряжений

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y}{F}; \quad \tau_{xz} = \frac{Q_x}{F}.$$

Из формул (11)–(14) следует, что смещение узла (i) приводит к изменению энергии группы элементов ($i - 2$), ($i - 1$), (i), ($i + 1$), а энергия других элементов не зависит от положения узла (i). Поэтому достаточно рассматривать сумму энергий этих элементов

$$\mathcal{E}_Q = \mathcal{E}_{Q(i-2)} + \mathcal{E}_{Q(i-1)} + \mathcal{E}_{Q(i)} + \mathcal{E}_{Q(i+1)}. \quad (15)$$

4. Энергия элемента (i) за счет действия изгибающего момента M_n вычисляется по формуле

$$\mathcal{E}_{M_n(i)} = \frac{h}{2E} \cdot \frac{M_n^2}{J_x}, \quad (16)$$

где изгибающий момент

$$M_n^2 = M_x^2 + M_y^2; \quad (17)$$

$$M_x = EJ_y \left(\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{d^2 u_0}{dz^2} \right) =$$

$$= EJ_y \left(\frac{u_{(i+2)} - u_{(i+1)} - u_{(i)} + u_{(i-1)}}{2h^2} - K_{0x(i)} \right); \quad (18)$$

$$M_y = EJ_x \left(\frac{d^2 v}{dz^2} - \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) =$$

$$= EJ_x \left(\frac{v_{(i+2)} - v_{(i+1)} - v_{(i)} + v_{(i-1)}}{2h^2} - K_{0y(i)} \right). \quad (19)$$

Здесь $K_{0x(i)}$, $K_{0y(i)}$ — исходная кривизна элемента (i) в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно.

Из формул (16)–(19) следует, что смещение узла (i) приводит к изменению энергии группы элементов ($i - 2$), ($i - 1$), (i), ($i + 1$) аналогично предыдущему случаю.

Поэтому для получения условий локального равновесия узла (i) достаточно рассматривать сумму энергий указанных элементов

$$\mathcal{E}_{M_n} = \mathcal{E}_{M_n(i-2)} + \mathcal{E}_{M_n(i-1)} + \mathcal{E}_{M_n(i)} + \mathcal{E}_{M_n(i+1)}. \quad (20)$$

5. Энергия элемента (i) за счет действия крутящего момента M_k определяется по формуле

$$\mathcal{E}_{M_k(i)} = \frac{h}{2G} \cdot \frac{M_k^2}{J_o}. \quad (21)$$

Как видно из (21), эта часть энергии не зависит от координат узлов и при смещении узлов вариация этой энергии равна нулю: $\delta \mathcal{E}_{M_k(i)} = 0$. Следовательно, в конечно-элементных уравнениях равновесия вклад этой части энергии отсутствует.

Для определения энергии деформаций узла (i) просуммируем энергии деформаций (9), (15), (20), в которых явным образом участвуют координаты узлов:

$$\mathcal{E}_{(i)} = \mathcal{E}_{N(i-1)} + \mathcal{E}_{N(i)} +$$

$$+ \mathcal{E}_{Q(i-2)} + \mathcal{E}_{Q(i-1)} + \mathcal{E}_{Q(i)} + \mathcal{E}_{Q(i+1)} +$$

$$+ \mathcal{E}_{M_n(i-2)} + \mathcal{E}_{M_n(i-1)} + \mathcal{E}_{M_n(i)} + \mathcal{E}_{M_n(i+1)}. \quad (22)$$

Так как в каждом из слагаемых выражения (22) участвует хотя бы одна из координат узла (i) — $u(i)$, $v(i)$, $w(i)$, то производная энергии деформаций по координатам узла (i) может отличаться от нуля.

Условие равновесия конечно-элементной модели трубопровода. Условие равновесия трубопровода соответствует минимум функции Лагранжа:

$$L = \mathcal{E} - A = \min,$$

где \mathcal{E} — энергия деформации рассматриваемого участка трубопровода, A — работа внешних сил, действующих на трубопровод. На основании этого можно утверждать, что условию равновесия трубопровода соответствует равенство нулю вариации функции Лагранжа при любых вариациях смещений всех узлов, т.е.

$$\delta L = \delta(\mathcal{E} - A) = 0. \quad (23)$$

Условие (23) должно соблюдаться для каждого узла. Отсюда

$$\delta L_{(i)} = \frac{\partial L}{\partial u_{(i)}} \delta u_{(i)} + \frac{\partial L}{\partial v_{(i)}} \delta v_{(i)} + \frac{\partial L}{\partial w_{(i)}} \delta w_{(i)} = 0, \quad (24)$$

где $i = 1 \dots n$ — номера узлов; n — число узлов в конечно-элементной сетке; $\delta u_{(i)}$, $\delta v_{(i)}$, $\delta w_{(i)}$ — произвольные малые изменения координат узла (i) .

Равенство (24) выполняется при любых значениях $\delta u_{(i)}$, $\delta v_{(i)}$, $\delta w_{(i)}$ только в том случае, когда одновременно равны нулю все частные производные на всех узлах (i) :

$$\frac{\partial L}{\partial u_{(i)}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial v_{(i)}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial w_{(i)}} = 0. \quad (25)$$

Используя условие равновесия трубопровода, можно записать

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{(i)}} - \frac{\partial A}{\partial u_{(i)}} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_{(i)}} - \frac{\partial A}{\partial v_{(i)}} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_{(i)}} - \frac{\partial A}{\partial w_{(i)}} = 0. \quad (26)$$

Полученные уравнения (26) используются при построении алгоритма численного решения задачи.

1. В уравнениях (26) вместо полной энергии \mathcal{E} можно использовать выражение $\mathcal{E}_{(i)}$ в виде (22), поскольку их производные одинаковы:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_{(i)}} = \frac{\partial \mathcal{E}_{(i)}}{\partial u_{(i)}}; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_{(i)}} = \frac{\partial \mathcal{E}_{(i)}}{\partial v_{(i)}}; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_{(i)}} = \frac{\partial \mathcal{E}_{(i)}}{\partial w_{(i)}}. \quad (27)$$

2. Работа внешних сил A определяется как сумма произведений всех сил \vec{Q} (с проекциями Q_x, Q_y, Q_z), действующих на все узлы конечно-элементной сетки, на смещения этих узлов. Вариация работы при вариации смещений узлов определяется как

$$\delta A = \sum_i (Q_{x(i)} \delta u_{(i)} + Q_{y(i)} \delta v_{(i)} + Q_{z(i)} \delta w_{(i)}). \quad (28)$$

Отсюда

$$\frac{\partial A}{\partial u_{(i)}} = Q_{x(i)}; \quad \frac{\partial A}{\partial v_{(i)}} = Q_{y(i)}; \quad \frac{\partial A}{\partial w_{(i)}} = Q_{z(i)}. \quad (29)$$

С учетом этих двух предложений условия равновесия (26) примут вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{(i)}}{\partial u_{(i)}} - Q_{x(i)} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_{(i)}}{\partial v_{(i)}} - Q_{y(i)} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}_{(i)}}{\partial w_{(i)}} - Q_{z(i)} = 0. \quad (30)$$

3. Вместо общей функции Лагранжа L используем локальные функции Лагранжа $L_{(i)}$ в виде

$$L_{(i)} = \mathcal{E}_{(i)} - A_{(i)}, \quad (31)$$

где

$$A_{(i)} = Q_{x(i)}u_{(i)} + Q_{y(i)}v_{(i)} + Q_{z(i)}w_{(i)}.$$

Силы \vec{Q} , действующие на узлы, связаны с распределенными нагрузками $\vec{q}(z)$ следующим образом:

$$Q_{x(i)} = hq_x(z_i); \quad Q_{y(i)} = hq_y(z_i); \quad Q_{z(i)} = hq_z(z_i). \quad (32)$$

Особенность локальных функций Лагранжа $L_{(i)}$ состоит в том, что для локальной области узла (i) они приводят к таким же условиям равновесия, что и общая функция Лагранжа. Это означает, что в каждой локальной области положение узла (i) отвечает минимуму локальной функции Лагранжа $L_{(i)}$, т.е.

$$L_{(i)} = \mathcal{E}_{(i)} - A_{(i)} = \min. \quad (33)$$

4. Условие (33) заменяет систему уравнений (30) для конкретного узла (i), которая справедлива и для всех узлов, если в выражениях для функций $\mathcal{E}_{(i)}$ и $A_{(i)}$ изменить значения индекса (i) при сохранении общего вида этих функций.

Общая система уравнений для всего участка трубопровода с суммарным числом узлов n содержит $3n$ уравнений вида (30). Число искоемых величин (координат всех n узлов в равновесном состоянии) также равно $3n$. Получить явные решения такой системы уравнений относительно величин $u_{(i)}$, $v_{(i)}$, $w_{(i)}$ можно только при малых деформациях и перемещениях методом аппроксимации локальных функций Лагранжа в сочетании с методами итераций и последовательных приближений.

Вывод. Разработана модель, позволяющая оценить напряженно-деформированное состояние трубопровода на участках сложных геологических условий с учетом наличия крутоизогнутых вставок.

Работа, результаты которой использованы в данной научной публикации, выполнена по заказу ОАО “АК “Транснефть” при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С. П., Гудьер Д. ж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
2. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.

Статья поступила в редакцию 19.10.2012