

УЕДИНЕННЫЕ ПРОДОЛЬНО-ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДОЙ

А.И. Землянухин

zemlyanukhinai@sstu.ru

А.В. Бочкарев

ab2009sar@list.ru

Л.И. Могилевич

mogilevich@sgu.ru

Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина,
Саратов, Российская Федерация

Аннотация

Выведено неинтегрируемое квазигиперболическое уравнение, моделирующее распространение осесимметричных продольно-изгибных волн в бесконечной цилиндрической оболочке типа Тимошенко, взаимодействующей с внешней нелинейно-упругой средой. С использованием диагональных аппроксимант Паде для суммирования рядов метода возмущений построены точные уединенно-волновые решения выведенного уравнения в виде бегущего фронта и бегущего импульса. Показано, что для существования точного решения в форме бегущего фронта необходимо, чтобы нелинейность окружающей оболочку упругой среды была «мягкой». Установлено, что выведенное уравнение допускает неявную линеаризацию с помощью преобразования типа Коула — Хопфа. Продемонстрирована возможность условной факторизации этого уравнения, позволяющая находить уединенно-волновые решения из соответствующего уравнения Дуффинга. Найденные точные решения могут найти применение в задачах акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов

Ключевые слова

Цилиндрические оболочки, продольно-изгибные волны, метод возмущений, точные уединенно-волновые решения

Поступила в редакцию 10.05.2017
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00176-а)

Введение. Теория оболочек представляет собой хорошо разработанный и имеющий многочисленные приложения раздел механики деформируемых твердых тел. В последнее время отмечается усиление интереса к неклассическим теориям, во многом инициированное необходимостью анализа упругих и динамических свойств нанообъектов, в частности карбоновых нанотрубок [1–4].

Нелинейность, дисперсия и диссипация являются основными факторами, определяющими волновые процессы в сплошных средах [5–7] и тонкостенных конструкциях. Известно, что в стержнях и пластинах взаимодействие продольных и изгибных волн происходит только за счет нелинейности [8]. При этом продольные волны действуют на изгибные параметрически, а изгибные волны,

в свою очередь, служат нелинейным источником для продольных волн [9]. В тонких оболочках продольные и нормальные компоненты перемещений связаны в линейном приближении. Поэтому динамические процессы в оболочках существенно сложнее аналогичных процессов в стержнях и пластинах.

Большая часть задач о распространении упругих волн в тонких оболочках рассмотрена в линейной постановке [10]. Аналитическое исследование системы уравнений движения элемента оболочки в перемещениях представляет собой сложную задачу, при решении которой используются различные упрощения. Чаще всего пренебрегают инерцией продольных перемещений, полагая срединную поверхность оболочки нерастяжимой. Это позволяет в осесимметричном случае проинтегрировать первое уравнение системы и свести проблему к исследованию одного уравнения для нормального перемещения. Такое упрощение, типичное для одномерных деформируемых систем, называют гипотезой Кирхгофа [11]. В каждом конкретном случае подобные предположения должны быть строго обоснованы и соответствовать физике явления, что необходимо для адекватного описания волнового процесса.

Настоящая работа посвящена выводу и анализу нелинейного квазигиперболического уравнения, моделирующего осесимметричное распространение продольно-изгибных волн в бесконечной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с внешней нелинейно-упругой средой. Допущение о бесконечности одномерных распределенных систем является корректным, если на границах системы расположены оптимальные демпфирующие устройства, препятствующие отражению возмущений [12]. Тогда распространяющиеся в системе вибрации можно рассматривать как бегущие упругие волны. Неинтегрируемые уравнения нелинейной волновой динамики имеют сложную аналитическую структуру. Построение их точных решений, наряду с установлением диапазона параметров, допускающих формирование и распространение устойчивых уединенно-волновых импульсов [13], представляет собой актуальную и сложную задачу, имеющую большое значение для акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов.

Вывод уравнения. Будем исходить из модели геометрически нелинейной цилиндрической оболочки типа Тимошенко, учитывающей в отличие от модели Кирхгофа — Лява деформации сдвига и инерцию вращения [14].

Уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в предположении о независимости волнового процесса от окружной координаты имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu k_y \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{g} \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\ & k^2 \frac{1 - \mu}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \mu k_y \frac{\partial u}{\partial x} - k_y^2 w + \frac{\mu}{2} k_y \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mu k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \right] - \frac{\gamma}{g} \frac{1 - \mu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{k_1}{R^2} w + \frac{k_2}{h^2 R^2} w^3; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{g} \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 6k^2 \frac{1-\mu}{h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) = 0, \quad (1)$$

где x, z — координаты вдоль образующей и радиуса оболочки; u, w — перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлениях x, z ; ψ — угол поворота отрезка нормали к срединной поверхности; E — модуль Юнга; μ — коэффициент Пуассона; $k_y = 1/R$ — параметр кривизны; R — радиус кривизны оболочки; γ — удельный вес материала оболочки; g — ускорение свободного падения; t — время; h — толщина оболочки; k — поправочный коэффициент модели Тимошенко; k_1, k_2 — коэффициенты, характеризующие влияние внешней нелинейно-упругой среды [15, 16].

Для анализа системы уравнений (1) введем безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma(1-\mu^2)}} \frac{h}{l^2} t, \quad U = \frac{l}{h^2} u, \quad W = \frac{w}{h}, \quad (2)$$

где l — характерная длина изгибной волны. Подстановка переменных (2) в систему (1) выявляет в последней малые параметры

$$\varepsilon_1 = \frac{h^2}{l^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{h}{R},$$

характеризующие нелинейность (дисперсию) волнового процесса и тонкостенность оболочки. Для геометрически нелинейных гибких оболочек квадраты углов поворота, связанные с прогибом, — одного порядка с линейными деформациями в массиве материала [17]. Поэтому параметры $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ должны быть величинами одного порядка малости: $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 = O(\varepsilon)$. В связи с этим во втором уравнении системы (1) сохранен подчеркнутый член, которым обычно пренебрегают, формально — оставляя слагаемые не выше второй степени.

Второе и третье уравнения системы (1) содержат поправочный коэффициент k , характеризующий закон распределения касательных напряжений по толщине оболочки. При последующем асимптотическом анализе будем полагать, что выполняется следующее отношение порядка:

$$k^2 \frac{1-\mu}{2} = k_3 \varepsilon,$$

где $k_3 = \text{const} = O(1)$. Введем в рассмотрение разложения безразмерных зависимых переменных по степеням малого параметра ε :

$$U = U_0 + \varepsilon U_1 + \dots, \quad W = W_0 + \varepsilon W_1 + \dots, \quad \psi = \varepsilon^{1/2} (\psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \dots). \quad (3)$$

Тогда система (1) для главных членов разложений (3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} - \mu \frac{\partial W_0}{\partial \xi} + \frac{\partial W_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau^2} = 0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 & k_3 \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right) + \mu \frac{\partial U_0}{\partial \xi} - W_0 + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial W_0}{\partial \xi} \right)^2 + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial W_0}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U_0}{\partial \xi} - \mu W_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_0}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right] - \frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2} - k_1 W_0 - k_2 W_0^3 = 0; \quad (4) \\
 & \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \xi^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \tau^2} - 12k_3 \left(\frac{\partial W_0}{\partial \xi} + \psi_0 \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Перед инерционными членами в первом и третьем уравнениях системы (4) стоят малые параметры. Таким образом, если искомое осесимметричное возмущение имеет малую изменяемость по временной и пространственной координатам, можно пренебречь инерциями продольного перемещения и угла поворота.

Интегрируя первое уравнение системы (4) по ξ и полагая константу интегрирования, равной нулю, получаем связь между продольным и нормальным перемещениями:

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi} - \mu W_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_0}{\partial \xi} \right)^2 = 0. \quad (5)$$

Подставляя (5) во второе уравнение системы (4), находим

$$k_3 \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right) - \left[(k_1 + 1 - \mu^2) W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2} + k_2 W_0^3 \right] = 0. \quad (6)$$

Выражая из уравнения (6) $\frac{\partial \psi_0}{\partial \xi}$ и подставляя в третье уравнение системы (4), проинтегрированное по ξ , получаем уравнение для главного члена разложения безразмерного нормального перемещения:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial \tau^2} + a_1 \frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi^2} + a_2 W_0 + a_3 \frac{\partial^4 W_0}{\partial \xi^4} + a_4 \frac{\partial^4 W_0}{\partial \tau^2 \partial \xi^2} + a_5 W_0^3 + a_6 \frac{\partial^2 (W_0^3)}{\partial \xi^2} = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{k_1 + 1 - \mu^2}{12}; \quad a_2 = k_3 (k_1 + 1 - \mu^2); \quad a_3 = \frac{k_3}{12}; \\
 a_4 &= -\frac{1}{12}; \quad a_5 = k_2; \quad a_6 = -\frac{k_2}{12}.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что уравнение, аналогичное (7), было получено ранее в работе [18] для изгибных волн в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании. Его качественный анализ был проведен для случая $a_2 = a_5 = 0$. В настоящей работе рассмотрено полное уравнение.

Уединенно-волновые решения. Для нахождения точных уединенно-волновых решений уравнения (7) будем использовать прямой метод возмущений с аппроксимантами Паде [19], предложенный в работах [20, 21]. Основная идея метода состоит в установлении соотношений между коэффициентами уравнения

и параметрами искомого решения, при которых ряд метода возмущений становится геометрическим. При этом сумма ряда дает выражение для искомого решения. Критерием геометричности ряда является равенство последовательных диагональных аппроксимант Паде $[Q/Q]$, $[Q+1/Q+1]$, $[Q+2/Q+2]$, ..., минимальный порядок Q которых определяется порядком полюса искомого решения.

Обозначим $W_0 = u$ и для удобства используем нижние буквенные индексы для производных по соответствующим независимым переменным. Уравнение (7) примет вид

$$u_{\tau\tau} + a_1 u_{\xi\xi} + a_2 u + a_3 u_{\xi\xi\xi\xi} + a_4 u_{\tau\tau\xi\xi} + a_5 u^3 + a_6 (u^3)_{\xi\xi} = 0. \quad (9)$$

Согласно методу возмущений [22], будем искать решение уравнения (9) в форме функционального ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\xi, \tau), \quad (10)$$

где $u_n(\xi, \tau)$ — функции, подлежащие определению; ε — формальный параметр. Подставляя (10) в (9) и группируя по степеням ε , получаем бесконечную систему уравнений относительно функций $u_n(\xi, \tau)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: & u_{1\tau\tau} + a_1 u_{1\xi\xi} + a_2 u_1 + a_3 u_{1\xi\xi\xi\xi} + a_4 u_{1\tau\tau\xi\xi} = 0; \\ \varepsilon^2: & u_{2\tau\tau} + a_1 u_{2\xi\xi} + a_2 u_2 + a_3 u_{2\xi\xi\xi\xi} + a_4 u_{2\tau\tau\xi\xi} = 0; \\ \varepsilon^3: & u_{3\tau\tau} + a_1 u_{3\xi\xi} + a_2 u_3 + a_3 u_{3\xi\xi\xi\xi} + a_4 u_{3\tau\tau\xi\xi} = \\ & = -a_5 u_1^3 - 3a_6 u_1 \left[2(u_{1\xi})^2 + u_1 u_{1\xi\xi} \right]; \\ \varepsilon^4: & u_{4\tau\tau} + a_1 u_{4\xi\xi} + a_2 u_4 + a_3 u_{4\xi\xi\xi\xi} + a_4 u_{4\tau\tau\xi\xi} = \\ & = -3a_5 u_1^2 u_2 - 3a_6 \left[2u_1 u_2 u_{1\xi\xi} + u_1^2 u_{2\xi\xi} + 4u_1 u_{1\xi} u_{2\xi} + 2u_2 (u_{1\xi})^2 \right] \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (11)$$

Первое уравнение системы (11) имеет частное решение $u_1 = e^{k\xi - \omega\tau}$ при условии

$$a_2 = -(\omega^2 + a_1 k^2 + a_3 k^4 + a_4 k^2 \omega^2). \quad (12)$$

В качестве решения второго уравнения системы (11) следует выбрать $u_2 = 0$. Это позволяет представить решение n -го уравнения системы в форме $u_n = K_n u_1^n$. Последовательно решая остальные уравнения и определяя постоянные K_n , для разложения (10) имеем

$$\begin{aligned} u = \varepsilon e^{k\xi - \omega\tau} & - \frac{(a_5 + 9a_6 k^2)}{8(\omega^2 + a_1 k^2 + 10a_3 k^4 + 10a_4 k^2 \omega^2)} (\varepsilon e^{k\xi - \omega\tau})^3 + \\ & + \frac{(a_5 + 9a_6 k^2)(a_5 + 25a_6 k^2)}{64(\omega^2 + a_1 k^2 + 10a_3 k^4 + 10a_4 k^2 \omega^2)(\omega^2 + a_1 k^2 + 26a_3 k^4 + 26a_4 k^2 \omega^2)} (\varepsilon e^{k\xi - \omega\tau})^5 - \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Правая часть равенства (13) содержит только нечетные степени произведения $\varepsilon e^{k\xi - \omega\tau}$. Умножая обе его части на $\varepsilon e^{k\xi - \omega\tau}$ и обозначая $z = (\varepsilon e^{k\xi - \omega\tau})^2$, получаем степенной ряд, содержащий все натуральные степени переменной z :

$$\hat{u} = z - \frac{a_5 + 9a_6k^2}{8(\omega^2 + a_1k^2 + 10a_3k^4 + 10a_4k^2\omega^2)}z^2 + \frac{(a_5 + 9a_6k^2)(a_5 + 25a_6k^2)}{64(\omega^2 + a_1k^2 + 10a_3k^4 + 10a_4k^2\omega^2)(\omega^2 + a_1k^2 + 26a_3k^4 + 26a_4k^2\omega^2)}z^3 - \dots \tag{14}$$

Порядок полюса решения определяется из условия баланса доминантных членов уравнения [23]. В (9) такими членами являются $u_{\xi\xi\xi\xi}$ и $(u^3)_{\xi\xi}$. Обозначая $u = a\xi^{-p}$, находим, что баланс достигается при равенстве показателей степенных функций $(-p-4) = (-3p-2)$, отсюда $p = 1$. Таким образом, решение имеет полюс первого порядка и для аппроксимант Паде необходимо выбрать $Q = 1$.

Вычислив диагональные аппроксиманты Паде [1/1] и [2/2] для ряда (14), проведем факторизацию их разности. Числитель полученного выражения содержит множители

$$(a_5 + 9a_6k^2)(\omega^2 + a_1k^2 + 50a_3k^4 + 50a_4k^2\omega^2) \times (a_3a_6k^4 + a_4a_6k^2\omega^2 + a_1a_6k^2 - a_3a_5k^2 - a_4a_5\omega^2 + a_6\omega^2). \tag{15}$$

Первый множитель содержится в числителях всех слагаемых (14), кроме первого, и его обращение в нуль приводит к тривиальному решению $\hat{u} = z$. Второй множитель (15) имеется в знаменателях всех слагаемых (14), начиная с четвертого, и не может обращаться в нуль. Третий множитель обращается в нуль при условии

$$a_1 = \frac{(a_5 - a_6k^2)(a_3k^2 + a_4\omega^2)}{a_6k^2} - \frac{\omega^2}{k^2}, \tag{16}$$

которое преобразует ряд (14) в геометрический

$$\hat{u} = z - \frac{a_6}{8(a_3k^2 + a_4\omega^2)}z^2 + \frac{a_6^2}{64(a_3k^2 + a_4\omega^2)^2}z^3 - \dots \tag{17}$$

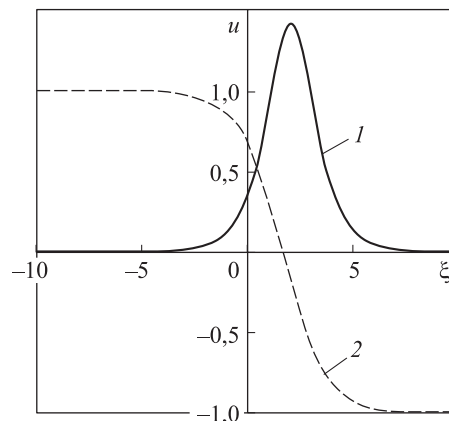
Сумма ряда (17)

$$\hat{u} = \frac{z}{1 + \frac{a_6}{8(a_3k^2 + a_4\omega^2)}z}$$

совпадает с его аппроксимантами $[Q/Q]$, $Q \in N$, и после возвращения к переменным ξ, τ для функции u имеем

$$u = \frac{\varepsilon e^{k\xi - \omega\tau}}{1 + \frac{a}{8}\varepsilon^2 (e^{k\xi - \omega\tau})^2} = \pm \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sech} \left[k\xi - \omega\tau + \ln \left(\pm \varepsilon \sqrt{\frac{a}{8}} \right) \right], \quad (18)$$

где $a = a_6 (a_3 k^2 + a_4 \omega^2)^{-1}$ и знак выбирается совпадающим со знаком ε . Выражение (18) содержит шесть произвольных параметров $k, \omega, \varepsilon, a_3, a_4, a_6$ и является точным решением уравнения (9), коэффициенты которого связаны соотношениями (12) и (16). При условии $a > 0$ решение имеет форму бегущего импульса. Отметим, что в отличие от классического метода возмущений, где ε — малый параметр, в рассматриваемом случае ε — произвольное вещественное число. График решения (18) при $a = \omega = k = \varepsilon = \tau = 1$ показан на рисунке.



Графики решений (18) (1) и (27) (2)

Найти решение в форме бегущего фронта поможет подстановка в (9) выражения

$$u = C + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\xi, \tau), \quad (19)$$

где C — произвольная постоянная. После группировки по степеням ε имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : C^3 a_5 + C a_2 &= 0; \\ \varepsilon^1 : u_{1\tau\tau} + (a_1 + 3a_6 C^2) u_{1\xi\xi} + (a_2 + 3a_5 C^2) u_1 + a_3 u_{1\xi\xi\xi\xi} + a_4 u_{1\tau\tau\xi\xi} &= 0; \\ \varepsilon^2 : u_{2\tau\tau} + (a_1 + 3a_6 C^2) u_{2\xi\xi} + (a_2 + 3a_5 C^2) u_2 + a_3 u_{2\xi\xi\xi\xi} + a_4 u_{2\tau\tau\xi\xi} &= \\ &= -3a_5 C u_1^2 - 6a_6 C \left[u_1 u_{1\xi\xi} + (u_{1\xi})^2 \right]; \\ \varepsilon^3 : u_{3\tau\tau} + (a_1 + 3a_6 C^2) u_{3\xi\xi} + (a_2 + 3a_5 C^2) u_3 + a_3 u_{3\xi\xi\xi\xi} + a_4 u_{3\tau\tau\xi\xi} &= -12a_6 C u_1 u_{1\xi} u_{2\xi} - \\ &- 3a_6 \left[2C u_2 + (u_1)^2 \right] u_{1\xi\xi} - 6a_6 u_1 \left[C u_{2\xi\xi} + (u_{1\xi})^2 \right] - a_5 u_1 (u_1^2 + 6C u_2), \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Из первого уравнения системы (20) находим

$$a_2 = -C^2 a_5, \quad (21)$$

второе уравнение (20) имеет частное решение $u_1 = e^{k\xi - \omega\tau}$ при условии

$$a_1 = -\frac{1}{k^2} \left[\omega^2 + a_3 k^4 + a_4 k^2 \omega^2 + C^2 (2a_5 + 3a_6 k^2) \right], \quad (22)$$

следующие уравнения (20) имеют решения вида $u_n = K_n u_1^n$. Последовательно определяя из следующих уравнений постоянные $K_n, n=2, 3, \dots$, для ряда из равенства (19) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n = z - \frac{C(a_5 + 4a_6 k^2)}{2(2a_3 k^4 + 2a_4 k^2 \omega^2 - a_5 C^2)} z^2 + \frac{(a_5 + 9a_6 k^2)(6a_6 C^2 k^2 - a_3 k^4 - a_4 k^2 \omega^2 + 2a_5 C^2)}{4(2a_3 k^4 + 2a_4 k^2 \omega^2 - a_5 C^2)(9a_3 k^4 + 9a_4 k^2 \omega^2 - 2a_5 C^2)} z^3 - \dots, \quad (23)$$

где $z = \varepsilon e^{k\xi - \omega\tau}$.

Числитель разности диагональных аппроксимант Паде [1/1] и [2/2] для ряда (23) содержит множитель

$$(a_3 k^2 + a_4 \omega^2 + 2a_6 C^2), \quad (24)$$

приравнивание нулю которого дает условие

$$a_3 = -\frac{1}{k^2}(a_4 \omega^2 + 2a_6 C^2), \quad (25)$$

при котором ряд (23) становится геометрическим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n = z + \frac{z^2}{2C} + \frac{z^3}{4C^2} + \frac{z^4}{8C^3} + \dots$$

и имеет сумму

$$\frac{2Cz}{2C - z}. \quad (26)$$

После подстановки (26) вместо ряда в (19) и возврата к переменным ξ, τ имеем выражение, являющееся точным решением уравнения (9) при соблюдении условий (21), (22) и (25):

$$u = C + \frac{2C\varepsilon e^{k\xi - \omega\tau}}{2C - \varepsilon e^{k\xi - \omega\tau}} = -C \operatorname{th} \left[\frac{1}{2} \left(k\xi - \omega\tau + \ln \left(-\frac{\varepsilon}{2C} \right) \right) \right]. \quad (27)$$

Решение (27) содержит четыре произвольные постоянные k, ω, C и ε , ограничено и имеет форму бегущего фронта (кинка) при $C\varepsilon < 0$. Из условия (21) следует, что коэффициенты a_2 и a_5 уравнения (9) должны иметь противоположные знаки. Физически это означает, что для существования точного решения (27) в форме кинка необходимо, чтобы нелинейность окружающей оболочку упругой среды была «мягкой». График решения (27) при $C = \omega = k = \tau = 1, \varepsilon = -1$ показан на рисунке.

Неявная линеаризация и факторизация уравнения (9). Уравнение (9) после перехода к бегущей переменной $\zeta = k\xi - \omega\tau$ примет вид

$$u_{\zeta\zeta} + b_1 u + b_2 u_{\zeta\zeta\zeta} + b_3 u^3 + b_4 (u^3)_{\zeta\zeta} = 0, \quad (28)$$

где

$$b_1 = \frac{a_2}{\omega^2 + a_1 k^2}; \quad b_2 = \frac{k^2(a_3 k^2 + a_4 \omega^2)}{\omega^2 + a_1 k^2}; \quad b_3 = \frac{a_5}{\omega^2 + a_1 k^2}; \quad b_4 = \frac{a_6 k^2}{\omega^2 + a_1 k^2}.$$

Структура точного решения (27) уравнения (9) подсказывает вид замены зависимой переменной для уравнения (28):

$$u = A + B \frac{w'}{w}, \quad (29)$$

где $w = w(\zeta)$ — новая неизвестная функция. Если принять $A = C$, $B = -2C$, $w = 2C - \varepsilon \exp(\zeta)$, то (29) совпадает с (27).

Оставляя функцию $w(\zeta)$ в (29) неопределенной, выясним, какому дифференциальному уравнению она должна удовлетворять. Для этого подставим (29) в (28), сгруппируем результат по степеням w и получим переопределенную систему шести уравнений для определения $w(\zeta)$. Разрешая эту систему с учетом $A \neq 0$, $B \neq 0$, $w \neq \text{const}$, получаем, что при выполнении равенств

$$b_1 = \frac{2A^2}{B^2}(A^2b_4 + 1), \quad b_2 = -\frac{1}{2}B^2b_4, \quad b_3 = -\frac{2}{B^2}(A^2b_4 + 1) \quad (30)$$

функция $w(\zeta)$ должна удовлетворять линейному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$2Aw' + Bw'' = 0. \quad (31)$$

Общее решение уравнения (31)

$$w = C_1 + C_2 \exp(-2A\zeta / B)$$

придает выражению (29) вид

$$u = A - \frac{2AC_2 \exp(-2A\zeta / B)}{C_1 + C_2 \exp(-2A\zeta / B)}. \quad (32)$$

Выражение (32) является точным решением уравнения (28) и совпадает с (27) после соответствующего переобозначения постоянных и замены $\zeta = k\xi - \omega t$.

Заключение. Замена зависимой переменной (29), представляющая собой преобразование типа Коула — Хопфа [24], преобразует нелинейное уравнение (28) в эквивалентное линейное уравнение (31).

Отметим, что при условии

$$b_1 = \frac{b_3(b_4 - b_2b_3)}{b_4^2}$$

уравнение (28) допускает факторизацию

$$\left(\frac{d^2}{d\zeta^2} + H \right) \left(E \frac{d^2u}{d\zeta^2} + Fu + Gu^3 \right) = 0;$$

$$E = b_2, \quad F = 1 - \frac{b_2b_3}{b_4}, \quad G = b_4, \quad H = \frac{b_3}{b_4},$$

позволяющую нахождение точных уединенно-волновых решений (18) и (27) из уравнения Дуффинга

$$E \frac{d^2u}{d\zeta^2} + Fu + Gu^3 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taj M., Zhang J.* Analysis of wave propagation in orthotropic microtubules embedded within elastic medium by Pasternak model // *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* 2014. Vol. 30. P. 300–305. DOI: 10.1016/j.jmbbm.2013.11.011
2. *Lim C.W., Yang Y.* Wave propagation in carbon nanotubes: Nonlocal elasticity induced stiffness and velocity enhancement effects // *J. Mech. Mater. Struct.* 2010. Vol. 5. No. 3. P. 459–476.
3. *Muc A., Banas A., Chwal M.* Free vibrations of carbon nanotubes with defects // *Mech. and Mechan. Eng.* 2013. Vol. 17. No. 2. P. 157–166.
4. *Wang Q., Varadan V.K.* Application of nonlocal elastic shell theory in wave propagation analysis of carbon nanotubes // *Smart Mater. and Struct.* 2007. Vol. 16. P. 178–190. DOI: 10.1088/0964-1726/16/1/022
5. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Пространственное нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2017. № 2. С. 40–59. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-40-59
6. *Аришинов Г.А., Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // *Акустический журнал.* 2000. Т. 46. № 1. С. 116–117.
7. *Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф.* Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стесненным вращением // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2009. Т. 2. № 4. С. 67–75.
8. *Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М.* Нелинейные продольные магнитоупругие волны в стержне // *Нелинейный мир.* 2009. Т. 7. № 7. С. 533–540.
9. *Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
10. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // *Сер. Механика твердых деформируемых тел.* Т. 5. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
11. *Андреианов И., Аврейцевич Я.* Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела // *Сер. Математика и механика.* М.–Ижевск: ИКИ, 2013. 276 с.
12. *Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е.* Общие соотношения для волн в одномерных упругих системах // *Прикладная математика и механика.* 2013. Т. 77. № 2. С. 315–321.
13. *Гавриков М.Б., Савельев В.В.* Взаимодействие уединенных волн в двухжидкостной магнитной гидродинамике в продольном магнитном поле // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2017. № 1. С. 59–77. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-59-77
14. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
15. *Shen H.S.* Thermal postbuckling analysis of imperfect Reissner — Mindlin plates on softening nonlinear elastic foundations // *J. Engineer. Math.* 1998. Vol. 33. Iss. 3. P. 256–270. DOI: 10.1023/A:1004257527313
16. *Jabareen M., Sheinman I.* Dynamic buckling of a beam on a nonlinear elastic foundation under step loading // *J. Mechanics of Materials and Struct.* 2009. Vol. 4. No. 7-8. P. 1365–1373.
17. *Филин А.П.* Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1984. 384 с.

18. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 30–36.
19. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
20. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 2. С. 182–191.
21. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Непрерывные дроби, метод возмущений и точные решения нелинейных эволюционных уравнений // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24. № 4. С. 71–85.
22. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 454 с.
23. Конт Р.М., Мюзетт М. Метод Пенлеве и его приложения. М.: Институт компьютерных исследований; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2011. 340 с.
24. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.

Землянухин Александр Исаевич — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина (Российская Федерация, 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77).

Бочкарев Андрей Владимирович — канд. техн. наук, доцент кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина (Российская Федерация, 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77).

Могилевич Лев Ильич — д-р техн. наук, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина (Российская Федерация, 410054, Саратов, ул. Политехническая, д. 77).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Землянухин А.И., Бочкарев А.В., Могилевич Л.И. Уединенные продольно-изгибные волны в цилиндрической оболочке, взаимодействующей с нелинейно-упругой средой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2018. № 1. С. 47–60.
DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-47-60

SOLITARY LONGITUDINAL-BENDING WAVES IN CYLINDRICAL SHELL INTERACTING WITH A NONLINEAR ELASTIC MEDIUM

A.I. Zemlyanukhin
A.V. Bochkarev
L.I. Mogilevich

zemlyanukhinai@sstu.ru
ab2009sar@list.ru
mogilevich@sgu.ru

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation

Abstract

Nonlinearity and dispersion are the main factors that determine wave processes in thin-walled structures. In contrast to rods and plates, in thin shells the longitudinal and normal components of displacements are connected already in the linear approximation.

Keywords

Cylindrical shells, longitudinal-bending waves, perturbation method, exact solitary-wave solutions

Therefore, dynamic processes in shells are much more complex and are analyzed after some simplifications. Most often, researchers neglect the inertia of the longitudinal displacements, assuming that the middle surface of the shell is inextensible. In each case, assumptions of this kind must be strictly justified and should match the physics of the phenomenon. This article focuses on the derivation and analysis of nonlinear quasi-hyperbolic equation modeling axisymmetric propagation of longitudinal-bending waves in infinite cylindrical shell interacting with an external nonlinear-elastic medium. The shell is studied in the framework of the Timoshenko model that takes into account shear deformation and rotational inertia. Using diagonal Pade approximants for the summation of the perturbation series, the exact solitary-wave solutions of the derived equation in the form of traveling front and traveling pulse are obtained. The study shows that the exact solution in the form of a traveling front exists if the nonlinearity of the elastic medium surrounding the shell is "soft". It is established that the derived equation allows an implicit linearization using the Cole — Hopf transformation. The equation permits a conditional factorization that enables to find solitary-wave solutions using the appropriate Duffing equation. The exact solutions of the derived equation can be used in problems of acoustic diagnostics and nondestructive testing of materials

Received 10.05.2017
© BMSTU, 2018

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00176-a)

REFERENCES

- [1] Taj M., Zhang J. Analysis of wave propagation in orthotropic microtubules embedded within elastic medium by Pasternak model. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.*, 2014, vol. 30, pp. 300–305. DOI: 10.1016/j.jmbbm.2013.11.011
- [2] Lim C.W., Yang Y. Wave propagation in carbon nanotubes: Nonlocal elasticity induced stiffness and velocity enhancement effects. *J. Mech. Mater. Struct.*, 2010, vol. 5, no. 3, pp. 459–476.
- [3] Muc A., Banas A., Chwal M. Free vibrations of carbon nanotubes with defects. *Mech. and Mechan. Eng.*, 2013, vol. 17, no. 2, pp. 157–166.
- [4] Wang Q., Varadan V.K. Application of nonlocal elastic shell theory in wave propagation analysis of carbon nanotubes. *Smart Mater. and Struct.*, 2007, vol. 16, pp. 178–190. DOI: 10.1088/0964-1726/16/1/022
- [5] Gavrikov M.B., Tayurskiy A.A. Spatial nonlinear Alfvén wave absorption by dissipative plasma. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 2, pp. 40–59 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-40-59
- [6] Arshinov G.A., Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. Two-dimensional solitary waves in a strained nonlinear viscoelastic medium. *Akusticheskiy zhurnal*, 2000, vol. 46, no. 1, pp. 116–117 (in Russ.).
- [7] Erofeev V.I., Zemlyanukhin A.I., Katson V.M., Sheshenin S.F. Formation of strain solitary waves in the Cosserat continuum with restricted rotation. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics], 2009, vol. 2, no. 4, pp. 67–75 (in Russ.).

- [8] Erofeev V.I., Zemlyanukhin A.I., Katson V.M. Nonlinear longitudinal magnetoelastic waves in a rod. *Nelineynyy mir* [Nonlinear World], 2009, vol. 7, no. 7, pp. 533–540 (in Russ.).
- [9] Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost' [Waves in a rod. Dispersion. Dissipation. Non-linearity]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 208 p.
- [10] Grigolyuk E.I., Selezov I.T. Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek [Non-classical oscillation theory for rods, plates and shells]. Ser. Mekhanika tverdykh deformiruemykh tel. T. 5 [Ser. Deformable solid bodies mechanics. Vol. 5]. Moscow, VINITI Publ., 1973. 272 p.
- [11] Andrianov I., Avreytsevich Ya. Asymptotic analysis and synthesis methods in nonlinear dynamics and mechanics of deformable solid bodies. Ser. Matematika i mekhanika [Ser. Mathematics and Mechanics]. Moscow, Izhevsk, IKI Publ., 2013. 276 p.
- [12] Erofeev V.I., Lisenkova E.E. General relations for waves in one-dimensional elastic systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, iss. 2, pp. 230–234. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.07.015
- [13] Gavrikov M.B., Savel'yev V.V. The interaction of solitary waves in two-fluid magnetohydrodynamics in a longitudinal magnetic field. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 1, pp. 59–77 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-59-77
- [14] Vol'mir A.S. Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1972. 432 p.
- [15] Shen H.S. Thermal postbuckling analysis of imperfect Reissner — Mindlin plates on softening nonlinear elastic foundations. *J. Engineer. Math.*, 1998, vol. 33, iss. 3, pp. 256–270. DOI: 10.1023/A:1004257527313
- [16] Jabareen M., Sheinman I. Dynamic buckling of a beam on a nonlinear elastic foundation under step loading. *J. Mechanics of Materials and Struct.*, 2009, vol. 4, no. 7-8, pp. 1365–1373.
- [17] Filin A.P. Elementy teorii obolochek [Shells theory elements]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1984. 384 p.
- [18] Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Lisenkova E.E., Semerikova N.P. Nonsinusoidal bending waves in Timoshenko beam lying on nonlinear elastic foundation. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2008, vol. 37, no. 3, p. 230. DOI: 10.3103/S1052618808030059
- [19] Baker G.A. Jr., Graves-Morris P.R. Padé Approximants. In 2 vols. Addison-Wesley, 1981.
- [20] Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. The perturbation method and exact solutions of nonlinear dynamics equations for media with microstructure. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics], 2016, vol. 9, no. 2, pp. 182–191 (in Russ.).
- [21] Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V. Continued fractions, the perturbation method and exact solutions to nonlinear evolution equations. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics], 2016, vol. 24, no. 4, pp. 71–85 (in Russ.).
- [22] Nayfe A.Kh. Metody vozmushcheniy [Perturbations method]. Moscow, Mir Publ., 1976. 454 p.
- [23] Conte R.M., Micheline M. The Painlevé handbook. Netherlands, Springer, 2008. 256 p.
- [24] Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. New York, Springer-Verlag, 1986. 475 p.


Zemlyanukhin A.I. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of Department of Applied Mathematics and System Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

Bochkarev A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

Mogilevich L.I. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mathematics and System Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov (Politekhnikeskaya ul. 77, Saratov, 410054 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I. Solitary Longitudinal-Bending Waves in Cylindrical Shell Interacting with a Nonlinear Elastic Medium. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2018, no. 1, pp. 47–60 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-1-47-60



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышло в свет учебное пособие автора
Н.И. Сидняева
**«Статистический анализ и теория
планирования эксперимента»**

Изложены краткие теоретические сведения по курсу «Теория планирования эксперимента». Представлено введение в статистический анализ и теорию планирования эксперимента. Основные понятия проиллюстрированы примерами практического содержания, рассмотренными с позиций регрессионного анализа. Издание носит справочный характер и поможет студентам старших курсов овладеть методами теории планирования эксперимента, которые широко используются при решении прикладных задач. Для студентов четвертого–шестого курсов инженерных специальностей технических университетов.

По вопросам приобретения обращайтесь:
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
+7 (499) 263-60-45
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru