

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ ТИПА МАКСВЕЛЛА: ОБЩИЕ СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ РЕЛАКСАЦИИ И ОГРАНИЧЕНИЯ НА МАТЕРИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

А.В. Хохлов

andrey-khokhlov@ya.ru

МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Исследованы возможности и область применимости нелинейного определяющего соотношения для вязкоупругопластичных разносопротивляющихся материалов с двумя произвольными материальными функциями в одномерном случае. Соотношение нацелено на описание комплекса основных реологических эффектов, типичных для материалов, обладающих наследственностью и высокой чувствительностью к скорости деформирования (полимеры, их расплавы и растворы, композиты, твердое топливо, асфальтобетон, титановые и алюминиевые сплавы, углеродные и керамические материалы при высоких температурах и др.), имеющих выраженную стадию установившейся ползучести, «площадку текучести» на диаграмме деформирования и предел текучести, зависящий от скорости деформирования. Аналитически изучены в общем виде качественные свойства кривых релаксации, порожденных этим определяющим соотношением (как при мгновенном нагружении, так и с начальной стадией деформирования): условия монотонности и выпуклости; скорость релаксации; асимптотика; равновесное значение напряжения; их зависимости от параметров программ деформирования и характеристик обеих материальных функций. В результате выявлены необходимые ограничения на материальные функции, обеспечивающие адекватное описание типичных свойств кривых релаксации широкого класса материалов. Обнаружены два основных случая, в которых определяющее соотношение обладает существенно различными свойствами и моделируемый материал (при длительном деформировании) ведет себя как жидкость или твердое тело

Ключевые слова

Вязкоупругопластичность, разносопротивляемость, ограничения на материальные функции, кривые релаксации, равновесное напряжение, сверхпластичность, полимеры

Поступила в редакцию 16.08.2016
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Нелинейная модель Максвелла, первичные ограничения на материальные функции. Рассмотрим изотермические одномерные процессы, характеризуемые в точке тела историей напряжения $\sigma(t)$ и (логарифмической) деформации $\varepsilon(t)$, $t > 0$. Связь между процессами $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$ зададим по аналогии с реологической моделью Максвелла, т. е. постулируем, что деформация $\varepsilon(t)$ разлагается в

сумму упругой и вязкопластической компонент, каждая из которых зависит от (безразмерного) напряжения $\sigma(t)$, но нелинейно:

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v; \quad \varepsilon_e = F(\sigma)/E; \quad \dot{\varepsilon}_v = V(\sigma)/\eta. \quad (1)$$

Определяющее соотношение (ОС) (1) содержит две материальные функции (МФ) — $F(x)$; $V(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$, $\omega_- < 0$, $\omega_+ > 0$ (возможны случаи $\omega_- = -\infty$, $\omega_+ = +\infty$) — и две постоянные: модуль упругости $E > 0$ и коэффициент вязкости $\eta > 0$. Параметры E и η выделены из МФ F и V для удобства сопоставления с линейной моделью Максвелла (получающейся при $V(x) = F(x) = x$) и учета влияния температуры в форме $E = E(T)$, $\eta = \eta(T)$ [1]. Если ω_+ и ω_- конечны, они могут быть интерпретированы как пределы прочности при растяжении и сжатии. Процесс $\sigma(t)$, $t \geq 0$, предполагается кусочно-непрерывным и кусочно-гладким (при $t < 0$ полагаем, что $\sigma = 0$). Обезразмеривание напряжения можно проводить делением на cE или на характерное напряжение материала (пределы прочности ω_+ или ω_- , текучести и т. п.), безразмерное время вводится делением на время релаксации линейной модели Максвелла $\tau_r = \eta/E$.

Материальная функция $F(x)$ определяет закон упругого деформирования $\varepsilon_e = F(\sigma)/E$. Поэтому минимальные первичные ограничения на $F(x)$ (естественные с позиции феноменологии и минимальные математические) таковы: $F(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$ — непрерывная (строго) возрастающая функция с кусочно-непрерывной производной, такая, что $F(0) = 0$ (тогда $x F(x) > 0$, т. е. $\text{sgn } F(x) = \text{sgn } x$). Последние два условия обеспечивают совпадение знаков упругой деформации ε_e и напряжения, а также отсутствие упругой деформации при нулевом напряжении. Строгое возрастание $F(x)$ равносильно требованию увеличения ε_e с ростом σ . Из возрастания $F(x)$ следует существование обратной функции $f = F^{-1}$ на промежутке $(\underline{y}; \bar{y})$, где $\bar{y} := \sup F(x) = F(\omega_+ - 0)$, $\underline{y} := \inf F(x) = F(\omega_- + 0)$. Дифференцируемость требуется для определения скорости упругой и полной деформации.

Функция вязкости $V(x)/\eta$ задает в ОС (1) связь напряжения со скоростью вязкопластической компоненты деформации (регулирует чувствительность напряжения к скорости деформации, наследственные свойства и скорость диссипации). Очевидно, чем больше $|V(\sigma)|/\eta$, тем меньше вязкое сопротивление (больше $|\dot{\varepsilon}_v|$ и $|\dot{\varepsilon}|$ при том же σ) и тем ближе поведение моделируемого материала к поведению жидкости («кажущаяся вязкость» задается обратной к V функцией $W(y)$, точнее, функцией $w = W(y)/y$: $\sigma = W(\eta \dot{\varepsilon}_v)$ и $\mu(\dot{\varepsilon}_v) := \sigma / \dot{\varepsilon}_v = W(\eta \dot{\varepsilon}_v) / \dot{\varepsilon}_v = \eta w(\eta \dot{\varepsilon}_v)$). Минимальные первичные ограничения на $V(x)$ [1–5]: $V(x)$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$ — непрерывная (нестрого) возрастающая функция, такая, что $V(0) = 0$ (тогда $V(x)x \geq 0$). Возможен случай $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ \geq 0$, $\sigma_+ \neq \sigma_-$; тогда при $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$ (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала, а σ_- , σ_+ — пределы упругости материала при сжатии и растяжении (см. далее).

Далее будет показано, какие следствия вытекают из принятых ограничений на МФ, какими общими свойствами кривых ползучести, релаксации и деформирования ОС (1) они управляют, моделирование каких реологических эффектов обеспечивают или запрещают. Сопоставление обнаруженных свойств теоретических кривых ОС (1) с типичными свойствами кривых квазистатических испытаний широкого класса вязкоупругопластичных материалов приводит к необходимости наложения дополнительных ограничений на МФ F и V для обеспечения адекватного описания типичных экспериментальных кривых и основных термомеханических эффектов [1–5].

Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии (у которых совпадают не только мгновенные упругопластические свойства и диаграммы деформирования, но и пределы прочности, а также кривые ползучести и релаксации при растяжении и сжатии) $\omega_- = -\omega_+$, и МФ должны быть нечетными, их можно задавать лишь при $x \in (0, \omega_+)$ и продолжать на $(-\omega_+, 0)$ по формулам $F(x) = F(|x|) \operatorname{sgn}(x)$, $V(x) = V(|x|) \operatorname{sgn}(x)$ (при этом обеспечивается непрерывность производных и потому — единый касательный модуль в нуле, так как $F'(0+0) = F'(0-0)$).

Если материалы при растяжении и сжатии ведут себя не одинаково (это может проявляться только при релаксации и ползучести, хотя мгновенные упругопластические свойства и начальные участки диаграмм деформирования одинаковы, например, у титановых и алюминиевых сплавов [6, 7]), то необходимо «склеивать» обе МФ из двух ветвей на $(0, \omega_+)$ и $(\omega_-, 0)$. Их можно определить, например, по семействам кривых ползучести при сжатии и растяжении.

Определяющее соотношение (1) можно записать как в интегральной, так и в дифференциальной формах:

$$\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t)) + \int_0^t k V(\sigma(\tau)) d\tau, \text{ или } \varepsilon = \mathbf{P}\sigma; \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon} = E^{-1}F'(\sigma)\dot{\sigma} + kV(\sigma), \quad t > 0, \quad (3)$$

где $k := \eta^{-1}$. Наличие интегрального члена в (2) свидетельствует об учете в ОС предыстории нагружения, т. е. о наличии памяти у модели.

К ОС (2) применена техника качественного анализа определяющих соотношений для вязкоупругопластических материалов, разработанная ранее в работах [1–3, 8–10] и др. В общем виде выведены (в виде неявных функций, интегралов и рядов, зависящих от параметров и МФ) уравнения семейств всех основных кривых одномерного ОС (2), аналитически изучены их качественные свойства в зависимости от МФ F и V при минимальных априорных ограничениях на последние [1–5]. На основе их сопоставления с набором типичных качественных свойств базовых экспериментальных квазистатических кривых широкого класса вязкоупругопластичных материалов (с целевым списком моделируемых термомеханических эффектов) выведены минимальные необходимые феноменологические ограничения на две МФ, обеспечивающие адекватное описание экспериментальных кривых, выявлены эффекты, которые ОС принципи-

ально не могут описать ни при каких МФ, и эффекты, которые могут быть описаны при определенных дополнительных ограничениях, наложенных на МФ. Настоящая работа посвящена первому этапу анализа ОС (2) — исследованию свойств, порожденных им кривых релаксации (КР).

В работе приняты следующие сокращения и обозначения: $(\omega_-; \omega_+)$ — область определения МФ $F(x)$ и $V(x)$ ОС (1); $f = F^{-1}$; $k := \eta^{-1}$; $\tau_r = \eta / E = 1 / (kE)$; ДУ — дифференциальное уравнение; $y(x_0 + 0)$ — предел функции $y(x)$ справа в точке $x = x_0$.

Родственные модели. Общая тензорная формулировка нелинейных ОС максвелловского типа для (больших деформаций) вязкоупругих сред, родственных ОС (2), описание кинематики, термодинамические аспекты и способы конкретизации ОС изучены в работах [11–17]. Поскольку внимание авторов работ [11, 12, 14–17] было сосредоточено на описании поведения жидкостей, они обсуждали эксперименты и эффекты, присущие жидкостям (расплавам и растворам полимеров и т. п.), не рассматривали кривые ползучести, релаксации и деформирования, порождаемые ОС (2) и родственными ему, не адресовали ОС вопросы, специфичные для механики деформируемого твердого тела.

Частный случай ОС (2) с $F(x) = x$ и строго возрастающей $V(x)$ формально совпадает с вырожденным вариантом модели *VBO (viscoplasticity based on overstress)* [18], когда задано нулевое равновесное напряжение $g(\epsilon)$.

Наиболее простой и популярный (в теории ползучести, вязкопластичности, реологии полимеров, динамике неньютоновских жидкостей) закон течения — степенной $\dot{\epsilon}_v = \eta^{-1} \sigma^n$ (*Norton — Bailey model, Norton viscoplastic law*), т. е. частный случай ОС (2) с $F(x) \equiv 0$, $V(x) = x|x|^{n-1}$, $n > 1$. Его используют для моделирования зависимости скорости установившейся ползучести от напряжения [7, 19–22], течения степенных жидкостей [23] и течения материалов в состоянии сверхпластичности [24–26] (наряду с обобщением вида $\sigma(t) = K \dot{\epsilon}(t)^m \epsilon(t)^N$, $m < 1$, $N > 0$). Ограничение $n > 1$ — условие псевдопластичности среды [23], т. е. условие убывания кажущейся вязкости с ростом напряжения. К псевдопластическим средам относятся расплавы и растворы полимеров, мазуты и битумы, кровь и плазма, пищевые и фармацевтические эмульсии, кремы, пасты, мази и т. п.

Зафиксировав $V(x) = x|x|^{n-1}$ в (3), получим модель

$$\dot{\epsilon} = E^{-1} F'(\sigma) \dot{\sigma} + \eta^{-1} \sigma |\sigma|^{n-1} \tag{4}$$

с одной МФ и параметрами $E > 0$, $\eta > 0$ и $n \geq 1$ — показатель, регулирующий вязкость, степень ее нелинейности и чувствительность напряжения к скорости деформации. В работе [1] доказано, что показатель скоростной чувствительности диаграмм деформирования $\sigma(\epsilon, a)$ ОС (4) с постоянными скоростями $\dot{\epsilon} = a$

$$m(a, \epsilon) := \frac{\partial \lg |\sigma(\epsilon, a)|}{\partial \lg |a|} = \sigma^{-1} a \frac{\partial \sigma}{\partial a}$$

(играющий важную роль в описании сверхпластичности) всегда убывает с увеличением n .

Зафиксировав $F(x) = x$ в ОС (4), получим модель с линейной упругостью и степенной вязкостью (назовем ее полулинейной):

$$\dot{\varepsilon} = E^{-1} \dot{\sigma} + \eta^{-1} \sigma |\sigma|^{n-1}. \quad (5)$$

Она содержит только три материальных параметра. Именно эта модель ближе всего к модели $\sigma(t) = K \dot{\varepsilon}(t)^m \varepsilon(t)^N$, $N \geq 0$, традиционно используемой для описания сверхпластического течения и ползучести с деформационным упрочнением [6, 7, 19, 24–26], но теоретические кривые модели (5) лучше и полнее описывают данные испытаний материалов в сверх- и предсверхпластичном состояниях, и сфера ее применимости гораздо шире, чем сверхпластичность [1–5].

Модель (5) применена в ряде работ для описания экспериментальных кривых ползучести и решения конкретных задач [19, 20, 27–29]. В монографии [24] она примерялась к моделированию сверхпластичности. В работе [30] исследованы кривые ползучести и обратной ползучести параллельного соединения двух полулинейных моделей вида (5) с различными показателями n .

Однако систематическое исследование в общем виде (для произвольных МФ F, V) свойств всех теоретических квазистатических кривых (релаксации, ступенчатой ползучести, деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях деформации и нагружения, циклического нагружения и др.), порождаемых ОС (2), — даже при малых деформациях в одноосном случае — и их сравнение с типовыми свойствами экспериментальных кривых, отсутствуют в литературе по вязкоупругости, ползучести, реологии и механике полимеров, в частности, в работах [7, 11–30] и [31–35]. Например, в монографии [20] для описания ползучести стержней использована полулинейная модель (5), но ничего не говорится о принципиальных качественных ограничениях: например, о том, что при любом показателе степени n она описывает только релаксацию напряжений к нулю (не может описать кривые релаксации с отличным от нуля предельным значением напряжения при $t \rightarrow \infty$ [1]), характерную, прежде всего, для класса сред, проявляющих (при больших временах и медленных процессах) свойства жидкостей [31, 36].

Работы [1–5], настоящая статья и последующие — попытка восполнить этот пробел, выявить арсенал возможностей ОС (2), индикаторы его (не)применимости, феноменологические ограничения на МФ и способы их идентификации. Хотелось бы подвергнуть ОС (2) и порождаемые им теоретические кривые более детальному и систематическому изучению, точнее очертить круг реологических явлений и спектр материалов, которые оно может описывать, выявить качественный характер зависимости МФ и параметров от температуры, обеспечивающий описание типичных результатов изотермических испытаний на релаксацию, ползучесть и деформирование с постоянной скоростью. Соотношение (2) управляется двумя МФ, потому его арсенал возможностей и область адекватности

гораздо шире, чем у классической линейной модели Максвелла и степенного закона течения, управляемых двумя параметрами. Соотношение (2) может быть нацелено на описание комплекса основных термомеханических эффектов, которые типичны для материалов, обладающих наследственностью, разносопротивляемостью и высокой чувствительностью к скорости деформирования (полимеры, их расплавы и растворы, композиты, твердое топливо, асфальтобетон, титановые и алюминиевые сплавы, углеродные и керамические материалы при высоких температурах и др.), имеющих выраженную стадию установившейся ползучести, «площадку текучести» на диаграмме деформирования и предел текучести, зависящий от скорости деформирования, — материалов, проявляющих (в определенных структурных состояниях и при определенных режимах деформирования) свойства как твердого тела, так и жидкости. В частности, ОС (2) (и его модификации) могут быть полезны для моделирования поведения материалов, находящихся в состоянии сверхпластичности.

Базовые свойства определяющего соотношения (2). Установим некоторые свойства нелинейного оператора $\Pi: \sigma(t) \mapsto \varepsilon(t)$ из ОС (2) (записанного в форме $\varepsilon = \Pi\sigma$), которые следуют из общих математических ограничений, наложенных на МФ F и V , и подтверждают их необходимость и значимость.

1. Если $\sigma(t) \equiv 0$ при $t < t_*$, то и $\varepsilon \equiv 0$, $t < t_*$ (так как $F(0) = 0$ и $V(0) = 0$). Если $\sigma(t) > 0$ в некоторой правой окрестности точки $t = t_*$ (например, $\sigma(t_* + 0) > 0$), то $\varepsilon(t) > 0$ в этой правой окрестности точки t_* (ибо $F(x) > 0$, $V(x) \geq 0$ при $x > 0$).

2. Если $\sigma(t) \geq 0$, $t \in [0, t_*]$, то $\varepsilon(t) \geq 0$ при $t < t_*$.

3. Если на некотором интервале $\sigma(t)$ положительна и возрастает, то $\varepsilon(t)$ тоже возрастает на этом интервале (первое слагаемое в (3) положительно, а второе неотрицательно, поскольку $F'(x) > 0$ и $V(x) \geq 0$ при $x > 0$).

4. Скачок напряжения в некоторый момент $t = t_*$ вызывает скачки деформации (2) и ее скорости. Интегральное слагаемое $\varepsilon_v(t)$ в (2) сохраняет непрерывность и в точках разрыва $\sigma(t)$ (ибо $V(x)$ непрерывна), скачок деформации обеспечивается только первым слагаемым:

$$\Delta\varepsilon = (F(\sigma_2) - F(\sigma_1)) / E \quad (6)$$

(индексами «1» и «2» обозначены пределы функций слева и справа в точке $t = t_*$). Скачок скорости деформации в момент $t = t_*$ найдем предельными переходами в (3):

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= E^{-1}F'(\sigma_1)\dot{\sigma}_1 + kV(\sigma_1); & \dot{\varepsilon}_2 &= E^{-1}F'(\sigma_2)\dot{\sigma}_2 + kV(\sigma_2); \\ \dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1 &= E^{-1}(F'(\sigma_2)\dot{\sigma}_2 - F'(\sigma_1)\dot{\sigma}_1) + k(V(\sigma_2) - V(\sigma_1)). \end{aligned} \quad (7)$$

5. Оператор Π переводит любую кусочно-непрерывную функцию $\sigma(t)$, $t \in [0, t_*]$, в кусочно-непрерывную функцию $\varepsilon(t)$ с теми же точками разрыва

первого рода, непрерывную — в непрерывную, а кусочно-дифференцируемую $\sigma(t)$ — в кусочно-дифференцируемую $\varepsilon(t)$ (к точкам излома $\sigma(t)$ могут добавиться еще точки, порожденные разрывами $F'(x)$).

6. Оператор Π монотонен: если $\sigma_2(t) \geq \sigma_1(t)$ при $t < t_*$, то $\varepsilon_2(t) \geq \varepsilon_1(t)$ при $t < t_*$. Поскольку МФ возрастают, $F(\sigma_2(t)) \geq F(\sigma_1(t))$ и $V(\sigma_2(t)) \geq V(\sigma_1(t))$, таким образом, при любом $t < t_*$ оба слагаемых в (2) будут больше для второго процесса.

7. Оператор Π аддитивен для процессов с дизъюнктными носителями: если $\sigma_i(t) \equiv 0$ при $t \in [0; +\infty) \setminus A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, то $\Pi(\sum \sigma_i(t)) = \sum \Pi \sigma_i(t)$ (сумма может быть счетной). Этим свойством обладают оба оператора-слагаемых в (2). Оно полезно при определении отклика на ступенчатую программу нагружения и другие кусочные процессы [2, 4].

8. Оператор Π коммутирует с операторами сдвига по времени $T_{t_0} : y(t) \mapsto y(t - t_0)$: для любого $t_0 > 0$ $\Pi T_{t_0} = T_{t_0} \Pi$ на множестве кусочно-непрерывных функций $y(t)$ (из области определения Π), таких, что $y(t) = 0$ при $t < 0$. Другими словами, оператор Π инвариантен относительно (полугруппы) сдвигов по времени: если $\varepsilon(t) = \Pi \sigma(t)$, то $\Pi(\sigma(t - t_0)) = \varepsilon(t - t_0)$. Доказывается заменой $u = \tau - t_0$ в интеграле (2), записанном для $\tilde{\sigma}(t) := \sigma(t - t_0)$.

9. Наложённые на МФ ОС (2) в п. 1 первичные ограничения обеспечивают термодинамическую согласованность модели, т. е. положительность работы напряжений в произвольном процессе деформирования и неотрицательность диссипации (соблюдение диссипативного неравенства). Действительно, работа напряжений $\sigma(\tau)$ в процессе деформирования $\varepsilon(\tau)$, связанном с $\sigma(\tau)$ соотношением (3), выражается формулой

$$A = \int_0^t \sigma(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = \int_0^t E^{-1} \sigma F'(\sigma) \dot{\sigma} d\tau + \int_0^t k V(\sigma) \sigma d\tau = W_1(\sigma) + W_2(t), \quad (8)$$

где $W_1(\sigma) := E^{-1} \int_0^\sigma x F'(x) dx = \int_0^{F(\sigma)/E} f(Ez) dz$, $W_2(t) := \eta^{-1} \int_0^t \sigma(\tau) V(\sigma(\tau)) d\tau$ — энергия упругой деформации и диссипация; $f = F^{-1}$ — обратная функция.

В силу непрерывности МФ $V(x)$ и ограничения $\sigma V(\sigma) \geq 0$ при $\sigma \neq 0$ справедливо неравенство $W_2(t) \geq 0$ при всех $t > 0$. Равенство $W_2(t_*) = 0$ возможно лишь в случае, когда $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ \geq 0$, $\sigma_+ \neq \sigma_-$ и $\sigma(\tau) \in [\sigma_-, \sigma_+]$ для всех $\tau < t_*$ (т. е. модуль напряжения не превышает пределов упругости, и ОС (2) моделирует упругое поведение материала). Энергия $W_1(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$ в силу ограничения $F'(x) > 0$ (и $W_1'(\sigma) = E^{-1} \sigma F'(\sigma) > 0$ при $\sigma > 0$). Очевидно, энергия упругой деформации $W_1(\sigma)$ не зависит от процесса, а только от конечного состояния, характеризуемого значением σ (или упругой деформацией $\varepsilon_e = F(\sigma)/E$).

Свойства семейства кривых релаксации модели. Условие выпуклости кривых релаксации. Кривые релаксации (КР) ОС (1) — интегральные кривые

$\sigma(t; \bar{\varepsilon}, t_0)$ дифференциального уравнения (3) с заданной деформацией $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} = \text{const}$ при $t \geq t_0$:

$$E^{-1}F'(\sigma)\dot{\sigma} + kV(\sigma) = 0, \text{ или } \dot{\sigma} = -\tau_r^{-1}g(\sigma), \tag{9}$$

где $t_0 \geq 0$ — продолжительность начальной стадии нагружения (*rise time*), т. е. стадии выхода деформации $\varepsilon(t)$ на постоянный уровень $\bar{\varepsilon} \neq 0$, $\tau_r = \eta/E = 1/(kE) > 0$,

$$g(x) := V(x)/F'(x), \quad x \in (\omega_-, \omega_+). \tag{10}$$

Очевидно, $g(0) = 0$ (если $F'(0 \pm 0) \neq 0$) и $\text{sgn } g(x) = \text{sgn } V(x) = \text{sgn } x$; $g(x)$ — кусочно-непрерывная функция на (ω_-, ω_+) (так как $F'(x) > 0$, $F'(x)$ кусочно-непрерывна, а $V(x)$ непрерывна), ее точки разрыва x_i совпадают с точками разрыва $F'(x)$ (если они есть). В точках пресечения с прямыми $\sigma = x_i$ решения ДУ (9) могут иметь излом.

Для индивидуализации конкретной КР $\sigma(t; \bar{\varepsilon}; t_0, \sigma_0)$ необходимо, кроме значений $\bar{\varepsilon} \neq 0$ и $t_0 \geq 0$, задать начальное значение напряжения $\sigma_0 = \sigma(t_0) \neq 0$ (так, что $\sigma_0 \bar{\varepsilon} > 0$). Если $t_0 = 0$ (т. е. деформация считается мгновенной: $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} h(t)$), то $\sigma_0 = \sigma(0+)$ совпадает с упругим напряжением: $E\bar{\varepsilon} = F(\sigma_0)$, или $\sigma_0 = f(E\bar{\varepsilon})$, $f = F^{-1}$. Если $t_0 > 0$, то σ_0 зависит от истории $\varepsilon(t)$ при $t \in [0; t_0]$ и его вычисление требует использования ОС (2), (3).

Рассмотрим случай $|V(\sigma)| > 0$ при $\sigma \neq 0$. Тогда автономное уравнение (9) имеет ровно одну точку равновесия $\sigma = 0$ (ибо $V(\sigma) = 0$ только при $\sigma = 0$); $\sigma(t) \equiv 0$ — особое решение уравнения (9). Другие интегральные кривые (9) (с начальным значением $\sigma_0 = \sigma(t_0) \neq 0$) не могут пересекать эту прямую по теореме единственности решения задачи Коши для обыкновенного ДУ, если $g(x)$ удовлетворяет ее предпосылкам в некоторой окрестности точки $x = 0$ (достаточно, например, выполнения условия Липшица для $g(x)$; это можно обеспечить, потребовав существования непрерывных производных $V'(x)$ и $F'(x)$ при $x \neq 0$ и $F'(0) \neq 0$). Таким образом, $\sigma(t)$ сохраняет знак (задаваемый знаком σ_0).

Поскольку $g(x) > 0$ при $x > 0$, для любой интегральной кривой ДУ (9) с положительным начальным значением $\sigma(t_0) = \sigma_0$ ($\bar{\varepsilon} > 0$) будет $\dot{\sigma}(t) < 0$ (при $t \in [t_0; \infty)$ или $t \in [t_0; t_*)$), т. е. КР с $\sigma_0 > 0$ убывает при всех $t \geq t_0$ (как и экспериментальные КР всех стабильных материалов с $\bar{\varepsilon} > 0$). Аналогично любая КР с $\sigma_0 < 0$ возрастает (и $\sigma(t) \leq 0$), так как $g(x) < 0$ при $x < 0$.

При $t \rightarrow +\infty$ $\sigma(t; \bar{\varepsilon}; t_0, \sigma_0) \rightarrow 0$, т. е. любая КР ОС (1) с $\sigma_0 \neq 0$ (при условии, что она продолжается на весь луч $[t_0; \infty)$) имеет горизонтальную асимптоту $\sigma = 0$. Действительно, поскольку КР с $\sigma_0 > 0$ ($\bar{\varepsilon} > 0$) монотонно убывает и ограничена снизу на $[t_0; \infty)$, существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = \inf_{(t_0, +\infty)} \sigma(t) := \sigma_\infty \geq 0$ (зависящий от параметров $\bar{\varepsilon}; t_0, \sigma_0$); переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$ в тождестве (9), получаем $0 = -EkV(\sigma_\infty)/F'(\sigma_\infty)$, отсюда $V(\sigma_\infty) = 0$, т. е. $\sigma_\infty = 0$ (здесь $F'(\sigma_\infty)$ — предел $F'(\sigma)$ справа, если она имеет разрыв в точке σ_∞).

Отметим, что наличие разрыва первого рода у $F'(x)$ в точке $x=0$ для описания разномодульности материалов нарушает предпосылки теоремы существования и единственности решения задачи Коши для ДУ (9) в точках прямой $\sigma=0$, и тогда нельзя гарантировать $\sigma(t) \neq 0$ для всех КР: возможно $\sigma(t_*)=0$ в некоторый момент $t=t_* < \infty$; в таком случае необходимо потребовать отличие от нуля пределов $F'(0 \pm 0)$ или хотя бы существование конечных пределов функции $V(x)/F'(x)$ при $x \rightarrow 0 \pm 0$, чтобы скорость релаксации $\dot{\sigma}(t_*) = -\tau_r^{-1}g(\sigma(t_*)) = -\tau_r^{-1}g(0)$ была конечной. Однако даже в этом случае $\sigma(t) \geq 0$, т. е. КР может лишь «уткнуться» в прямую $\sigma=0$, но не может ее пересечь (в противном случае производная $\dot{\sigma}(t) = -\tau_r^{-1}g(\sigma(t))$ изменяла бы знак в точке $t=t_*$ и t_* была бы точкой экстремума $\sigma(t)$, но это противоречило бы смене знака $\sigma(t)$ в точке t_*).

В испытаниях стабильных материалов на релаксацию КР с $\bar{\varepsilon} > 0$ всегда выпуклы вниз, поэтому теоретические КР с $\bar{\varepsilon} > 0$ (или $\sigma_0 > 0$) должны быть выпуклы вниз, т. е. функция $\dot{\sigma}(t)$ должна возрастать ($\ddot{\sigma}(t) > 0$, если существует). В силу (9) это равносильно возрастанию $g(x)$: из (9) имеем $\ddot{\sigma}(t) = -\tau_r^{-1}g'(\sigma)\dot{\sigma} = \tau_r^{-2}g'(\sigma)g(\sigma)$, но $g(\sigma) > 0$ при $\sigma > 0$ и потому $\ddot{\sigma}(t) > 0 \Leftrightarrow g'(\sigma) > 0$ (а $\ddot{\sigma}(t) = 0 \Leftrightarrow g'(\sigma) = 0$). По (10) $g'(x) = [V'(x)F'(x) - V(x)F''(x)](F'(x))^{-2}$ (если существуют $V'(x)$ и $F''(x)$), потому $g'(x) > 0$ равносильно неравенству

$$V'(x)F'(x) - V(x)F''(x) > 0, \quad (11)$$

или $V'(x)/V(x) > F''(x)/F'(x)$, $x \in (0, \omega_+)$, или $[\ln V(x)]' > [\ln F'(x)]'$. Это дополнительное ограничение, которое необходимо наложить на МФ ОС (1), чтобы обеспечить выпуклость вниз КР ОС (1) с $\bar{\varepsilon} > 0$.

Условие выпуклости КР с $\bar{\varepsilon} < 0$ (т. е. $\sigma_0 < 0$) вверх $\ddot{\sigma}(t) < 0$ тоже равносильно (11) (т. е. $g'(x) > 0$), но в области $x \in (\omega_-, 0)$ (так как $F'(\sigma) > 0$, а множитель $V(\sigma)$ в (10) изменяет знак: $V(x) < 0$ и $g(x) < 0$ при $x < 0$). Теперь условие возрастания МФ $g(x)$ (11) эквивалентно $V'(x)/V(x) < F''(x)/F'(x)$ при $x \in (\omega_-, 0)$. Выполнение условия (11) на (ω_-, ω_+) равносильно

$$|V'(x)/V(x)| > |F''(x)/F'(x)|, \quad x \in (\omega_-, \omega_+).$$

Если у некоторой КР ОС (1) есть точка перегиба, то в ней $\ddot{\sigma}(t) = 0$ и ее ордината $\tilde{\sigma}$ удовлетворяет уравнению $g'(\sigma) = 0$, или $V'(x)F'(x) - V(x)F''(x) = 0$. Тогда все КР $\sigma(t, \bar{\varepsilon}; t_0, \sigma_0)$ с произвольными $\bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0$ имеют точку перегиба на прямой $\sigma = \tilde{\sigma}$.

Если (11) справедливо не на всем интервале (ω_-, ω_+) , а только при $x \in (a, b) \subset (\omega_-, \omega_+)$, то выпуклыми будут лишь КР (и их участки), лежащие в полосе $a \leq \sigma(t) \leq b$. Если известно, что для КР всегда $|\sigma(t)| \leq \omega$, т. е. $|\sigma_0| < \omega$ для некоторого $\omega < \min\{|\omega_-|, \omega_+\}$, достаточно требовать (11) при $|x| < \omega$.

Для ОС (1) с $F(x) = x$ (11) равносильно $V'(x) > 0$. Для ОС со степенными МФ $F = Ax^N$, $V = Bx^n$ с $n, N > 0$, условие (11) на любом интервале $(0, \omega_+)$ равносильно $n > N - 1$ ($n > 0$ для полуполинейной модели (5) с $N = 1$).

Для экспонент $F = A(e^{\lambda x} - 1)$, $V = B(e^{\gamma x} - 1)$ с $A, B, \gamma, \lambda > 0$ условие (11) выполнено на всей полуоси $x > 0$ тогда и только тогда, когда $\gamma \geq \lambda$. Действительно, из (11) $\gamma e^{\gamma x} (e^{\gamma x} - 1)^{-1} > \lambda$, или $(\gamma \lambda^{-1} - 1)e^{\gamma x} > -1$ для $x > 0$; так как $e^{\gamma x}$ неограниченно возрастает, условие выпуклости КР (11) выполняется для всех $x > 0$ лишь при $\gamma \geq \lambda$.

Для МФ $V \equiv F = A \operatorname{tg}(\lambda x)$, $A, \lambda > 0$, $\omega_+ = -\omega_- = 0,5\pi / \lambda$, имеем $V'(x) / V(x) = \lambda(1 + \operatorname{tg}^2 \lambda x) / \operatorname{tg} \lambda x$, $F''(x) / F'(x) = 2\lambda \operatorname{tg} \lambda x$ и неравенство (11) дает $1 - \operatorname{tg}^2 \lambda x > 0$, т. е. $\lambda x \in [0; \pi / 4)$. Таким образом, для таких МФ нельзя гарантировать выполнение условия (11) при всех $x < 0,5\pi / \lambda$, и выпуклыми вниз будут только те КР, которые полностью лежат в полосе $|\sigma(t)| < 0,25\pi / \lambda$, а остальные КР будут иметь точку перегиба с ординатой $\sigma = \tilde{\sigma} = 0,25\pi / \lambda$.

Кривые релаксации для $V \equiv F = \operatorname{tg} 0,5\pi x$ ($A = 1$, $\lambda = \pi / 2$) с $t_0 = 0$ и $\bar{\varepsilon} = 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 10; 20; 30; 40; 100$ приведены на рис. 1, а: условие выпуклости (11) равносильно $x \in [0; 0,5]$, при $\bar{\varepsilon} = 1$ значение $\sigma_0 = 0,5$ еще не выходит за границы интервала выпуклости КР (голубые линии — КР с $\bar{\varepsilon} = 0,5$ и $\bar{\varepsilon} = 1$), а при $\bar{\varepsilon} > 1$ — выходит, и КР обретает точку перегиба (с ординатой $\sigma = 0,5$). С увеличением $\bar{\varepsilon}$ возрастает $\sigma_0 = f(E\bar{\varepsilon}) = \lambda^{-1} \operatorname{arctg}(E\bar{\varepsilon} / A)$, КР смещается вверх и убывает все медленнее; при $\bar{\varepsilon} \rightarrow \infty$ $\sigma_0 \rightarrow \lambda^{-1}\pi / 2 = 1$.

Если $|V(\sigma)| > 0$ в полосе, где лежит искомое решение $\sigma(t)$ ДУ (9) (достаточно при всех $\sigma \neq 0$), то переменные в (9) разделяются и можно выписать решение задачи Коши с произвольным начальным условием $\sigma(t_0) = \sigma_0 > 0$:

$$-\tau_r \int_{\sigma_0}^{\sigma} g(\sigma)^{-1} d\sigma = \int_{t_0}^t dt; \tag{12}$$

$$t - t_0 = -\tau_r \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{F'(x)}{V(x)} dx, \quad t \geq t_0, \quad \text{или} \quad t = t_0 + \tau_r \int_{F(\sigma)}^{F(\sigma_0)} \frac{dy}{V(f(y))},$$

где $f = F^{-1}$. Уравнение (12) задает семейство КР $\sigma = R(t; \bar{\varepsilon}, t_0)$, $t \geq t_0$, в неявном виде $t = r(\sigma; \bar{\varepsilon}, t_0)$ (с безразмерным временем t / τ_r). Параметр $\bar{\varepsilon}$ входит в уравнение КР через начальное значение $\sigma(t_0) = \sigma_0$.

Если $t_0 = 0$, то $E\bar{\varepsilon} = F(\sigma_0)$, $\sigma_0 = f(E\bar{\varepsilon})$, и КР (12) имеют вид

$$t = -\tau_r \int_{f(E\bar{\varepsilon})}^{\sigma} \frac{F'(x)}{V(x)} dx, \quad \text{или} \quad t = \tau_r \int_{F(\sigma)}^{E\bar{\varepsilon}} \frac{dy}{V(f(y))}. \tag{13}$$

Если $t_0 > 0$, то σ_0 зависит от истории деформирования на начальной стадии $\varepsilon(t)$, $t \in [0; t_0]$, и вычисляется с помощью (2), (3). Например, для $\varepsilon(t) = at$,

$t \in [0; t_0]$, $a = \bar{\varepsilon} / t_0$, необходимо решить ДУ (3) с заданной $\dot{\varepsilon}(t) = a$: это даст уравнение $\bar{\varepsilon} = E^{-1} \int_0^{F(\sigma_0)} \frac{dy}{1 - (a\eta)^{-1} V(f(y))}$ для определения $F(\sigma_0)$ и σ_0 , можно доказать [1], что оно имеет единственное решение $\sigma_0 = \sigma_0(\bar{\varepsilon}, a)$ и справедлива оценка $\sigma_0(\bar{\varepsilon}, a) < \nu(a\eta)$, где $\nu = V^{-1}$.

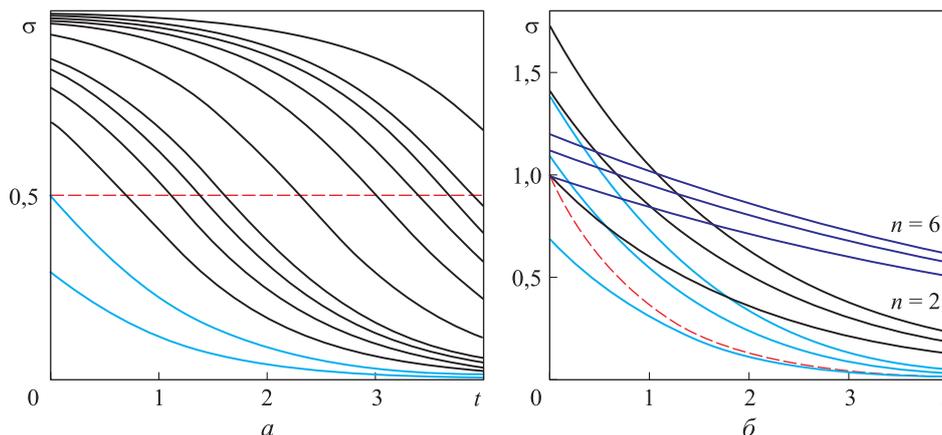


Рис. 1. Кривые релаксации для $V = F = \text{tg} 0,5\pi x$ ($A=1, \lambda = \pi/2$) с $t_0 = 0$ и $\bar{\varepsilon} = 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 10; 20; 30; 40; 100$ (а) и кривые релаксации (13) с $t_0 = 0$ и $\bar{\varepsilon} = 1; 2; 3$ для трех моделей с $E = \eta = 1$ и разными парами МФ (б)

Поскольку $\partial\sigma / \partial\bar{\varepsilon} > 0$, то чем больше $\bar{\varepsilon}$, тем выше лежит вся КР $\sigma(t, \bar{\varepsilon}; t_0, \sigma_0)$. Действительно, продифференцировав тождество (13) по $\bar{\varepsilon}$, получим

$$0 = - \frac{F'(\sigma)}{V(\sigma)} \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\varepsilon}} + \frac{F'(\sigma_0)}{V(\sigma_0)} f'(E\bar{\varepsilon})E; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\varepsilon}} = E f'(E\bar{\varepsilon}) \frac{F'(\sigma_0)V(\sigma)}{F'(\sigma)V(\sigma_0)} > 0,$$

так как $V(\sigma)/V(\sigma_0) > 0$, $F' > 0$ и $f' > 0$.

Кривые релаксации (13) с $t_0 = 0$ и $\bar{\varepsilon} = 1; 2; 3$ для трех моделей с $E = \eta = 1$ и разными парами МФ (и различными тройками значений $\sigma_0 = f(E\bar{\varepsilon})$) приведены на рис. 1, б: кривые голубого цвета — КР для $V = F = A(e^{\lambda x} - 1)$, $A, \lambda = 1, x > 0$, кривые черного цвета — КР для $V = F = x^n$, $n = 2$, кривые синего цвета — КР для $V = F = x^n$ с $n = 6$, штриховая линия красного цвета — КР линейной модели Максвелла (для $n = 1$).

Время релаксации нелинейной модели (2) находится из (12) и условия $\sigma(\tau + t_0) / \sigma_0 = e^{-1}$: $\tau = \tau_r \int_{\sigma_0/e}^{\sigma_0} \frac{F'(x)}{V(x)} dx$. Очевидно, $\tau = \tau(\sigma_0)$ возрастает с увеличением $\tau_r = \eta / E > 0$ и убыванием σ_0 : $\tau'(\sigma_0) = \tau_r [g(\sigma_0)^{-1} - g(\sigma_0/e)^{-1}] < 0$, если выполнено неравенство (11) — критерий выпуклости КР и возрастания функ-

ции (10). Если $V_2(x) > V_1(x)$ или $F_2'(x) < F_1'(x)$ (вязкость второго материала меньше или жесткость больше), то $\tau_2 < \tau_1$.

Исследуем поведение КР при $\sigma(t) \rightarrow 0$, т. е. предел интеграла (12) при $\sigma \rightarrow 0$. У подынтегральной функции (12) есть особенность в точке $x = 0$ вследствие условия $V(0) = 0$ (в частности, при $F'(0+0) \neq 0$).

Если интеграл

$$I(\sigma_0) = - \int_{\sigma_0}^0 \frac{F'(x)}{V(x)} dx = \int_0^{\sigma_0} \frac{F'(x)}{V(x)} dx \tag{14}$$

расходится, то все КР (12) с произвольными $\bar{\epsilon}, t_0, \sigma_0$ (как при мгновенном нагружении, так и с начальной стадией деформирования) определены на всем луче $[t_0; \infty)$ и при $t \rightarrow +\infty$ обладают горизонтальной асимптотой $\sigma = 0$. Например, если существует предел $V'(0+0) \neq 0$, т. е. $V(x) = Ax + o(x)$ при $x \rightarrow 0+0$ с $A \neq 0$, и $F'(0+0) < \infty$, то интеграл (14) расходится по признаку сравнения ($F'(x)/V(x) = Cx^{-1} + o(x^{-1})$ при $x \rightarrow 0+0$). Это верно и в более общем случае, когда требуется только $F'(x)/V(x) = Cx^{-m} + o(x^{-m})$ при $x \rightarrow 0+0$ с показателем $m \geq 1$ (возможно $V'(0+0) = 0$ и $F'(0+0) = \infty$).

Если интеграл (14) сходится, то КР с произвольными $\bar{\epsilon}, t_0, \sigma_0$ достигает уровня $\sigma = 0$ в некоторый момент $t_* = t_0 + \tau_r I(\sigma_0) < \infty$, и ОС моделирует материал с полной релаксацией напряжения за конечное время $t_* - t_0$. Если $F'(0+0) \neq 0$, то в силу (9) $\dot{\sigma}(t_* - 0) = 0$, т. е. КР гладко склеивается с продолжением $\sigma(t) \equiv 0$ при $t > t_*$. Так будет, например, при $V = x^n$, $n < 1$. Если $F'(0+0) = 0$ и предел $F'(x)/V(x)$ при $x \rightarrow 0+0$ конечен (т. е. существует предел $g(t_* - 0) \neq 0$), то подынтегральная функция ограничена в точке $x = 0$, $I(\sigma_0) < \infty$, но $\dot{\sigma}(t_* - 0) = -\tau_r g(t_* - 0) \neq 0$.

Так, для степенных МФ $F = Ax^N$, $V = Bx^n$ с $n, N > 0$ (в частности, полулинейной модели (5)) интеграл (14) расходится и КР обладают асимптотой $\sigma = 0$ при $t \rightarrow +\infty$, если выполнено условие $-(N-1-n) \geq 1$, т. е. $n \geq N$. Последнее условие жестче, чем критерий выпуклости всех КР ОС (2) со степенными МФ: $n > N - 1$. В случае $n \in (N-1; N)$ КР с $\sigma_0 > 0$ выпуклы вниз, но интеграл (14) (от Cx^{-m} , $m = n - N + 1 \in (0; 1)$) сходится и напряжение релаксирует до нуля за конечное время $t_* = t_0 + \tau_r I(\sigma_0) = t_0 + \tau_r C(N-n)^{-1} \sigma_0^{N-n}$, $C = A/B$ (очевидно, $t_*(\sigma_0)$ возрастает). В случае $n < N - 1$ формула для $t_*(\sigma_0)$ сохраняется (особенность в интеграле (14) исчезает и $\dot{\sigma}(t_*) = -\tau_r^{-1} g(0+) = -\infty$), но КР меняют направление выпуклости и не отражают адекватно экспериментальные данные для структурно-стабильных материалов.

Случай $V(x) \equiv 0$ в окрестности нуля (упругость при малых напряжениях). Требования к материальным функциям можно немного ослабить и тем самым расширить семейство моделей и круг описываемых эффектов. Можно разрешить, чтобы $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+]$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ \geq 0$, $\sigma_+ \neq \sigma_-$

(например, задав $V = B(x - \sigma_+)^n$ при $x > \sigma_+$, $n > 1$). Тогда в силу (2) при $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$ среда будет деформироваться упруго: $\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t))$, вязкость бесконечна, диссипации и гистерезиса нет, релаксация и ползучесть отсутствуют (пределы упругости на сжатие и растяжение σ_-, σ_+ совпадают с порогами ползучести), диаграмма деформирования не зависит от скорости, остаточная деформация после разгрузки отсутствует. При $\sigma > \sigma_+$ (или $\sigma < \sigma_-$) начнут проявляться вязкопластические свойства: модель станет описывать (установившуюся) ползучесть, релаксацию, скоростную чувствительность, гистерезис, накопление необратимой деформации, рэтчетинг и т. п.

Кривые релаксации при $t > t_0$ — решения ДУ (9), где $g(x) \equiv 0$ при $x \in [\sigma_-, \sigma_+]$. Поэтому все КР $\sigma(t; \bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0)$ с начальным значением $\sigma_0 \in [\sigma_-, \sigma_+]$, т. е. с $\bar{\varepsilon} \in [F(\sigma_-)/E, F(\sigma_+)/E]$ (так как $\sigma_0 = f(E\bar{\varepsilon})$, $f = F^{-1}$) будут при $t > t_0$ горизонтальными «прямыми» $\sigma(t) = \sigma_0$ (а на начальной стадии деформирования $\sigma(t) = f(E\varepsilon(t))$, $t \leq t_0$, если $\varepsilon(t) \in [F(\sigma_-)/E, F(\sigma_+)/E]$).

Если $\sigma_0 \notin [\sigma_-, \sigma_+]$ (например, $\sigma_0 > \sigma_+$, т. е. $\bar{\varepsilon} > F(\sigma_+)/E$), то релаксация происходит, $\dot{\sigma}(t) < 0$ при $t > t_0$ (так как $g(x) > 0$ в (9) при $x > \sigma_+$) и уравнение КР имеет вид (12) до тех пор, пока $\sigma(t) > \sigma_+$. У подынтегральной функции (12) есть особенность в точке $x = \sigma_+$ из-за условий $V(\sigma_+) = 0$ и $F'(\sigma_+) > 0$. Если несобственный интеграл

$$I(\sigma_0, \sigma_+) = - \int_{\sigma_0}^{\sigma_+} \frac{F'(x)}{V(x)} dx = \int_{\sigma_+}^{\sigma_0} \frac{F'(x)}{V(x)} dx \quad (15)$$

сходится (т. е. сходится интеграл от $1/V(x)$ по отрезку $[\sigma_+, \sigma_0]$), то КР с произвольными $t_0 \geq 0$ и $\sigma_0 > \sigma_+$ (т. е. $\bar{\varepsilon} > F(\sigma_+)/E$) достигает равновесного уровня $\sigma = \sigma_+$ за конечное время $\tau_f = t_+ - t_0 = \tau_r I(\sigma_0, \sigma_+) < \infty$, а в дальнейшем $\sigma(t) \equiv \sigma_+ = \text{const}$. В силу (9) $\dot{\sigma}(t_+ - 0) = 0$, т. е. КР гладко склеивается с продолжением $\sigma(t) \equiv \sigma_+$ при $t > t_+$. Интеграл (15) сходится, например, для $V = (x - \sigma_+)^n$, $x > \sigma_+$, $n < 1$.

Если интеграл (15) расходится, то все КР с $\sigma_0 > \sigma_+$ (и при мгновенном нагружении, и с начальной стадией деформирования) определены на всем луче $[t_0; \infty)$, $\sigma(t) > \sigma_+$, а при $t \rightarrow \infty$ имеют горизонтальную асимптоту $\sigma = \sigma_+$. В частности, если существует $V'(\sigma_+ + 0) \neq 0$, т. е. $V(x) = A(x - \sigma_+) + o(x - \sigma_+)$ при $x \rightarrow \sigma_+ + 0$ с $A \neq 0$, то интеграл (15) расходится по признаку сравнения ($F'(x)/V(x) = C(x - \sigma_+)^{-1} + o((x - \sigma_+)^{-1})$ при $x \rightarrow \sigma_+ + 0$); это верно и в более общем случае, когда $V(x) = A(x - \sigma_+)^n + o((x - \sigma_+)^n)$, $n \geq 1$, при $x \rightarrow \sigma_+ + 0$. Сходимость (15) зависит только от скорости стремления к нулю МФ $V(x)$ при $x \rightarrow \sigma_+ + 0$.

Аналогично любая КР $\sigma(t; \bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0)$ с $\sigma_0 < \sigma_-$ возрастает по t (так как $g(x) < 0$ при $x < \sigma_-$), $\sigma(t) \leq \sigma_- < 0$, КР обладают при $t \rightarrow \infty$ горизонтальной

асимптотой $\sigma = \sigma_-$, если расходится интеграл от $1/V(x)$ по отрезку $[\sigma_0, \sigma_-]$, а в случае его сходимости $\sigma(t) \equiv \sigma_-$ на луче $t > t_-$ с $t_- = t_0 + \tau_r I(\sigma_0, \sigma_-) < \infty$.

Итак, в случае, когда $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+]$, $\sigma_+ > 0$, $\sigma_- > 0$, КР с произвольными $t_0 \geq 0$ и $\sigma_0 \notin [\sigma_-, \sigma_+]$ имеют при $t \rightarrow \infty$ ненулевой предел: $\sigma(t, \sigma_0) \rightarrow \sigma_+$ при $\sigma_0 > \sigma_+$ и $\sigma(t, \sigma_0) \rightarrow \sigma_-$ при $\sigma_0 < \sigma_-$. Таким образом, моделируемый материал (в отличие от рассмотренного выше) не принадлежит классу жидкостей, обычно характеризующему свойством полной релаксации $\sigma(\infty, \bar{\epsilon}) = 0$ для всех $\bar{\epsilon}$ [36], а ведет себя (при длительном деформировании) как твердое тело. В этом случае и кривые нагружения модели ведут себя иначе.

Дополнительные материальные параметры σ_+ и σ_- — важные характеристики модели и конкретного материала при растяжении и сжатии: это пределы упругости, пороги ползучести и равновесные значения напряжения при релаксации. Согласно экспериментальным данным, они должны зависеть от температуры (убывать по модулю с ростом T).

Пример. Пусть $V(x) \equiv 0$, $x \in [\sigma_-, \sigma_+]$, $V = A_+(x - \sigma_+)^n$ при $x > \sigma_+$, $V = -A_- |x - \sigma_-|^m$ при $x < \sigma_-$, $A_+, A_- > 0$, $m, n \geq 1$ и

$$F(x) = \alpha x + \gamma V(x), \quad \alpha, \gamma > 0 \tag{16}$$

(при $\alpha, \gamma > 0$ автоматически выполняются ограничения на МФ F , если они выполнены для V : $F'(x) > 0$ и $F(0) = 0$). Тогда при $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$ модель описывает линейно упругий материал с модулем упругости E/α (при растяжении и сжатии), а при $\sigma \notin [\sigma_-, \sigma_+]$ проявляются реономные свойства и разносопротивляемость (если $\sigma_- \neq -\sigma_+$ или $A_- \neq A_+$, или $m \neq n$). В уравнении КР (12) подынтегральная функция упрощается в силу (16): $F'(x)/V(x) = \alpha/V(x) + \gamma V'(x)/V(x)$, и интеграл вычисляется (для любого $\sigma_0 > \sigma_+$):

$$t - t_0 = \tau_r \alpha \int_{\sigma}^{\sigma_0} \frac{dx}{V(x)} + \tau_r \gamma \ln |V(x)| \Big|_{\sigma}^{\sigma_0} = \frac{\tau_r \alpha (\sigma_0 - \sigma_+)^{1-n}}{A_+ (n-1)} \left(\frac{(\sigma - \sigma_+)^{1-n}}{(\sigma_0 - \sigma_+)^{1-n}} - 1 \right) + \tau_r \gamma \ln |\sigma_0 / \sigma|, \tag{17}$$

где $t \geq t_0$, $\sigma = \sigma(t) \in (\sigma_+, \sigma_0]$, $n \neq 1$. При $n \geq 1$ интеграл (15) (т. е. (17)) расходится, и потому все КР с $\sigma_0 > \sigma_+$ определены на всем луче $[t_0; \infty)$, обладают при $t \rightarrow \infty$ горизонтальной асимптотой $\sigma = \sigma_+$ и $\sigma(t) > \sigma_+$. При $n \in (0; 1)$ интеграл (15) сходится, и значение времени релаксации до уровня $\sigma(t) = \sigma_+$ конечно (получается из (17) при $\sigma = \sigma_+$):

$$\tau_f = \tau_r I(\sigma_0, \sigma_+) = -\tau_r \alpha A_+^{-1} (n-1)^{-1} (\sigma_0 - \sigma_+)^{1-n} + \tau_r \gamma \ln |\sigma_0 / \sigma_+|.$$

Критерий выпуклости КР (11) для МФ, связанных зависимостью (16), превращается в $V'(x)[\alpha + \gamma V'(x)] - \gamma V(x)V''(x) > 0$; так как $V'(x) \geq 0$, для выполнения этого неравенства с любыми $\alpha, \gamma > 0$ достаточно $V'(x)^2 - V(x)V''(x) > 0$, т. е.

возрастания функции V/V' . Для $V = A_+(x - \sigma_+)^n$, $x > \sigma_+$, последнее неравенство эквивалентно $n^2 - n(n-1) > 0$, т. е. $n > 0$.

Кривые релаксации (17) модели (16) для $\sigma_+ = 1$, $n = 2$, $A_+ = 1$, $E = \eta = 1$, $\alpha = \gamma = 1$, $t_0 = 0$ и нескольких начальных напряжений $\sigma_0 = 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,5; 2; 2,5; 3$ приведены на рис. 2, а; соответствующие уровни деформации $\bar{\epsilon} = 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,75; 3; 4,75; 7$ ($\bar{\epsilon} = F(\sigma_0)/E = [\alpha\sigma_0 + \gamma V(\sigma_0)]/E$, в частности, $\bar{\epsilon} = [\alpha\sigma_0 + \gamma A_+(\sigma_0 - \sigma_+)^n]/E$ при $\sigma_0 > \sigma_+$). Напряжения $\sigma_0 \leq 1$ не превосходят предела упругости $\sigma_+ = 1$ и потому соответствующие КР — горизонтальные прямые (синего цвета). При $\sigma_0 > \sigma_+ = 1$ уравнение КР: $t = (\sigma - 1)^{-1} - (\sigma_0 - 1)^{-1} + \ln|\sigma_0/\sigma|$. Для сравнения на рис. 2, а также приведены КР (17) при $n = 1$ (когда МФ кусочно-линейны) для $\sigma_0 = 1,5; 2$:

$$t - t_0 = \tau_r \alpha A_+^{-1} \ln \frac{\sigma_0 - \sigma_+}{\sigma - \sigma_+} + \tau_r \gamma \ln |\sigma_0/\sigma|, \text{ т. е. } t = \ln \frac{(\sigma_0 - 1)\sigma_0}{(\sigma - 1)\sigma}$$

(КР голубого цвета). Тогда при $\sigma_0 > \sigma_+$ тем же значениям $\sigma_0 = 1,5; 2; 2,5; 3$ соответствуют другие $\bar{\epsilon} = 2; 3; 4; 5$; при $\sigma_0 < \sigma_+$ значения $\bar{\epsilon}$ и КР не зависят от n . Кривые красного цвета — КР модели с $n = 0,5 < 1$ (с конечным временем релаксации τ_f до уровня σ_+) для $\sigma_0 = 1,5; 2; 2,5; 3$.

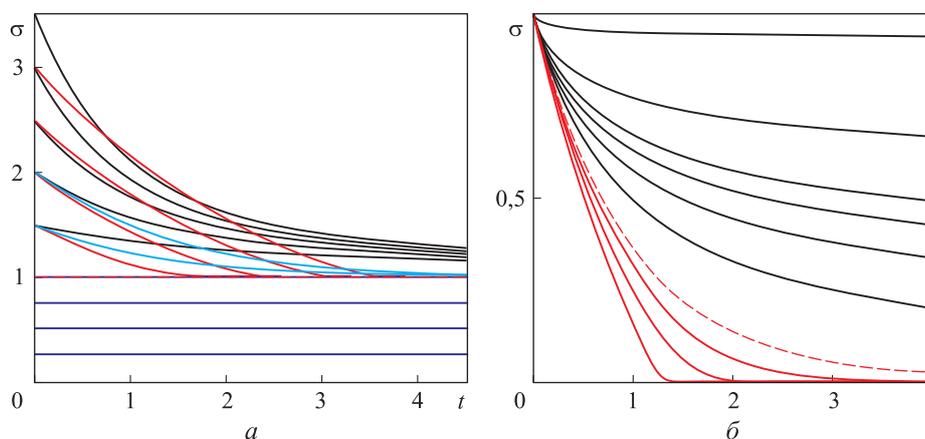


Рис. 2. Кривые релаксации (17) модели (16) для различных значений σ_0 и $\bar{\epsilon}$ (а) и КР (20) модели (5) с $n = 1; 2; 3; 4; 5; 10; 100$ и $n = 0,75; 0,5; 0,25$ (б)

Частные случаи модели, явные уравнения кривых релаксации. Возможность вычислить интегралы в (12) и (13) аналитически зависит от конкретного вида МФ или от наличия функциональной связи между ними (наложив такую связь, например, (16), получим соответствующую ей модель с одной МФ, предоставляющую столько же степеней свободы, сколько и ОС (4)).

Пусть $V(x) = H(F(x))$, где $H(y)$ удовлетворяет тем же ограничениям, что и МФ F : $H(0) = 0$, $H'(y) > 0$ при $y \in (F(\omega_-); F(\omega_+))$ (тогда и композиция $H(F(x))$

удовлетворяет им при $x \in (0; \omega_+)$). Тогда $V(f(y)) = H(F(f(y))) = H(y)$ и (12), (13) обращаются в

$$t = t_0 + \tau_r \int_{F(\sigma)}^{F(\sigma_0)} \frac{dy}{H(y)}; \quad t = \tau_r \int_{F(\sigma)}^{E\bar{\varepsilon}} \frac{dy}{H(y)}.$$

Остается выбрать $H(y)$ так, чтобы интеграл вычислялся. Например, при $H(y) = cy^p$, $p, c > 0$, $p \neq 1$, т. е. $V(x) = cF(x)^p$ (полулинейная модель (5) получается из такого ОС при $F(x) \equiv x$) получим КР вида

$$\sigma(t) = f\left([\!(p-1)c(t-t_0)\tau_r^{-1} + F(\sigma_0)^{1-p}]^{1/(1-p)}\right). \quad (18)$$

Для $H(y) = \mu(e^{\lambda y} - 1)$ имеем $\mu(t-t_0) = \tau_r \left[y - \lambda^{-1} \ln |1 - e^{\lambda y}| \right] \Big|_{F(\sigma_0)}^{F(\sigma)}$.

Рассмотрим случай $F = V$ (это возможно, поскольку на МФ налагаются од- нотипные ограничения). Тогда (12) превращается в $t - t_0 = \tau_r \ln |F(\sigma_0)/F(\sigma)|$, $t > t_0$, и уравнение семейства КР с $t_0 = 0$ (тогда $F(\sigma_0) = E\bar{\varepsilon}$) представляется в явной форме:

$$\sigma = f(\bar{\varepsilon}E \exp(-t/\tau_r)), \quad t > 0. \quad (19)$$

Оно отличается от КР $\sigma = \bar{\varepsilon}E \exp(-t/\tau_r)$ линейной модели Максвелла (с $V(x) \equiv F(x) \equiv x$) наличием «искривляющей» МФ f , делающей зависимость КР от $\bar{\varepsilon}$ нелинейной и меняющей скорость релаксации. Для $V \equiv F = A(e^{\lambda x} - 1)$, $A, \lambda > 0$, будет $f(y) = \lambda^{-1} \ln(1 + xA^{-1})$ (см. рис. 1, б), для $V \equiv F = A \operatorname{tg} \lambda x$ будет $f(y) = \lambda^{-1} \operatorname{arctg}(y/A)$. Время релаксации в случае $F = V$: $\tau = \tau_r \ln[F(\sigma_0)/F(\sigma_0 e^{-1})]$. Если МФ $f(y)$ при $y \rightarrow 0$ имеет степенную асимптотику $f(y) = cy^p + o(y^p)$, $p, c > 0$ (в частности, $p = 1$, когда $F'(0) \neq 0; \infty$), то главная часть КР (19) при $t \rightarrow \infty$ убывает экспоненциально: $\sigma(t) \approx c(E\bar{\varepsilon})^p \exp(-pt/\tau_r)$. Критерий выпуклости КР (11) в случае $F = V$ имеет вид $F'(x)^2 - F(x)F''(x) > 0$, $x \in (\omega_-, \omega_+)$. Для МФ $V \equiv F = Ax^n$ (тогда $f = y^{1/n}$) он дает ограничение $n^2 - n(n-1) > 0$, т. е. $n > 0$.

Для полулинейной модели (5) вычисляется интеграл в (12) и уравнение КР упрощается: $(\sigma^{1-n} - \sigma_0^{1-n})/(1-n) = -(t-t_0)/\tau_r$ (для $n \neq 1$), или

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left(1 + \sigma_0^{n-1}(n-1)(t-t_0)\tau_r^{-1}\right)^{-1/(n-1)}. \quad (20)$$

При $n > 1$ КР (20) убывает по t как степенная функция с отрицательным показателем и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$: $\sigma(t) = rt^{-1/(n-1)} + o(t^{-1/(n-1)})$ при $t \rightarrow \infty$, $r := [(n-1)/\tau_r]^{1/(1-n)}$, главный член асимптотики КР не зависит от σ_0 , $\bar{\varepsilon}$ и начальной стадии деформирования,

$$\dot{\sigma}(t) = -\tau_r^{-1} \left((n-1)(t-t_0)\tau_r^{-1} + \sigma_0^{1-n} \right)^{-n/(n-1)} < 0, \quad \max|\dot{\sigma}(t)| = |\dot{\sigma}(t_0)| = \tau_r^{-1}\sigma_0^n, \quad \ddot{\sigma}(t) > 0.$$

Время релаксации находится из условия $\sigma_0/\sigma = e$ в (20): $t - t_0 = \tau_r \sigma_0^{1-n} (e^{n-1} - 1)(n-1)^{-1}$. Время релаксации — возрастающая функция аргументов $1/\sigma_0$, τ_r и n (при $\sigma_0 \leq 1$). Последнее свойство наблюдается при сверхпластическом деформировании (СПД) материалов: время релаксации убывает с ростом показателя скоростной чувствительности $1/n$ и в состоянии сверхпластичности существенно меньше, чем в обычном; это используют в методике определения оптимальной температуры для СПД по минимальному времени релаксации [24]. Если $t_0 = 0$, то $\sigma_0 = E\bar{\epsilon}$ в (20).

Кривые релаксации (20) с $\sigma_0 = 1$ для полулинейных моделей (5) с $\tau_r = 1$ при $n = 2; 3; 4; 5; 10; 100 > 1$ (КР черного цвета с асимптотой $\sigma = 0$) и $n = 0,75; 0,5; 0,25 < 1$ (КР красного цвета с конечным временем полной релаксации $\tau_f(\sigma_0, n)$ до уровня $\sigma = 0$) приведены на рис. 2, б. Штриховая линия красного цвета — КР линейной модели Максвелла с $n = 1$. С увеличением n КР смещаются вверх, но при $t \rightarrow +\infty$ имеют общую асимптоту $\sigma = 0$.

Влияние температуры на теоретические кривые модели. Материальные параметры ОС (1), (2) зависят от температуры T : $E = E(T)$ и $\eta = \eta(T)$ (удобное описание зависимости от T — одна из причин выделения скалярных множителей E и η из МФ F и V). В испытаниях большинства стабильных материалов наблюдается смещение вниз КР и смещение вверх кривых ползучести с повышением температуры, т. е. увеличение скоростей ползучести и релаксации. Увеличение теоретической скорости ползучести $\dot{\epsilon}(t) = V(\bar{\sigma})/\eta$ и смещение вверх кривых ползучести с возрастанием температуры обеспечивается тем, что коэффициент вязкости $\eta(T)$ — убывающая функция [3].

В силу (9) модуль скорости релаксации пропорционален параметру $\tau_r^{-1} = E/\eta$. С ростом температуры теоретические кривые релаксации $\sigma(t; \bar{\epsilon})$ с фиксированным $\bar{\epsilon}$ (σ_0) должны быстрее сближаться с осью $\sigma = 0$ (как экспериментальные кривые), и потому функция $\tau_r(T) = \eta/E$ должна убывать, т. е. коэффициент вязкости должен убывать быстрее модуля упругости: $E(T)\eta'(T) - E'(T)\eta(T) < 0$, или $E'(T)/E(T) > \eta'(T)/\eta(T)$. Это свойство наблюдается в испытаниях большинства материалов, например, у полимеров в стекловидном и высокоэластичном состояниях.

В работе [3] доказано: для того чтобы теоретические кривые релаксации, ползучести и деформирования ОС (2) вели себя при изменении температуры так же, как и кривые изотермических испытаний большинства стабильных вязкоупругопластичных материалов (в которых не происходят химические, фазовые и структурные превращения), необходимо, чтобы E и η , а также $\tau_r = \eta/E$ были убывающими функциями T (или гомологической температуры, или отношения к температуре стеклования для полимеров). Тогда с возрастанием температуры T кривые ползучести ОС (2) с $\sigma > 0$ смещаются вверх, КР, диаграммы деформирования $\sigma = \sigma(\epsilon, a)$ и $\sigma(\epsilon, b)$, $\epsilon > 0$, при постоянных скоростях деформации $\dot{\epsilon} = a$ или нагружения $\dot{\sigma} = b$, — вниз, накопленная пластическая

(необратимая) деформация возрастает и рэтчетинг при циклических нагружениях ускоряется [4], т. е. ОС (2) обеспечивает возрастание податливости и скоростной чувствительности с увеличением температуры.

Для обеспечения убывания материальных функций $E(T)$, $\eta(T)$ и $\tau_r(T)$ можно, например, задать их в виде $E = E_0 \exp(u/T)$, $\eta = \eta_0 \exp(v/T)$ с $v > u > 0$. Тогда время релаксации и скорость ползучести выражаются формулами:

$$\tau_r(T) = \eta_0 E_0^{-1} \exp((w-u)/T), \quad w-u > 0, \quad \dot{\varepsilon}(t) = V(\bar{\sigma})/\eta = \eta_0^{-1} V(\bar{\sigma}) \exp(-w/T).$$

Именно в такой форме обычно принимают их зависимость от температуры в работах по ползучести и длительной прочности (по аналогии с законом Аррениуса для кинетических процессов).

Обнаруженный выше физический смысл материальных параметров σ_+ и σ_- в случае, когда $V(x) \equiv 0$ на $[\sigma_-, \sigma_+]$ (пределы упругости, пороги ползучести и равновесные значения напряжения при релаксации для растяжения и сжатия), и данные испытаний материалов диктуют необходимость учета зависимости σ_+ и σ_- от температуры: $\sigma_+(T)$ и $|\sigma_-(T)|$ должны убывать (и обращаться в нуль при температуре плавления для металлических материалов и температуре стеклования для полимеров).

Заключение. Аналитически исследовано нелинейное определяющее соотношение типа Максвелла для вязкоупругопластичных разнсопротивляющихся материалов с двумя произвольными материальными функциями одного аргумента в одноосном случае. Первая материальная функция управляет (нелинейно) упругими свойствами, вторая — вязкопластическими: регулирует наследственные свойства, вязкость, скорость диссипации, чувствительность напряжения к скорости деформации, зависимость скорости ползучести и релаксации от величины и знака напряжения, величину и скорость накопления необратимой деформации.

Выведены дифференциальное уравнение (9) КР, порожденных ОС (1) (как при мгновенном нагружении, так и с начальной стадией деформирования), и их представление в неявной форме $t = r(\sigma; \bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0)$ в виде интеграла (12). При минимальных первичных ограничениях на материальные функции аналитически изучены общие качественные свойства семейства КР $\sigma = \sigma(t; \bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0)$ (хотя общее представление КР (12) не приводится к явному виду $\sigma = \sigma(t; \bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0)$): условия монотонности и выпуклости КР, асимптотика КР при $t \rightarrow +\infty$ и их зависимость от характеристик обеих МФ и параметров программ деформирования.

Обнаружены два основных случая, в которых ОС (1) (моделируемый материал) ведет себя по-разному: 1) $|V(x)| > 0$ при $x \neq 0$; 2) $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+] \subset (\omega_-, \omega_+)$, $\sigma_- \leq 0$, $\sigma_+ \geq 0$, $\sigma_+ \neq \sigma_-$. Во втором случае при $\sigma \in [\sigma_-, \sigma_+]$ ОС (1) моделирует (нелинейно) упругое поведение материала: $\varepsilon(t) = E^{-1}F(\sigma(t))$, диссипации нет, релаксация и ползучесть отсутствуют (пределы упругости на сжа-

тие и растяжение σ_-, σ_+ совпадают с порогами ползучести), остаточная деформация после разгрузки отсутствует. При $\sigma > \sigma_+$ (или $\sigma < \sigma_-$) начинают проявляться вязкопластические свойства: модель описывает релаксацию, (установившуюся) ползучесть, скоростную чувствительность диаграмм деформирования, гистерезис, накопление пластической деформации, рэтчетинг и т. п.

Доказаны следующие свойства КР ОС (1) в случае $|V(x)| > 0$ при $x \neq 0$.

Теорема. Пусть $\omega_- < 0, \omega_+ > 0, F(x)$ — непрерывная кусочно-гладкая функция на (ω_-, ω_+) , $F'(x) > 0$ и $F(0) = 0$, а $V(x), x \in (\omega_-, \omega_+)$ — непрерывная (нестрого) возрастающая функция, такая, что $V(0) = 0$ и $|V(x)| > 0$ при $x \neq 0$.

Тогда:

1) семейство кривых релаксации ОС (1) с произвольной длительностью начальной стадии $t_0 \geq 0$ выхода деформации $\varepsilon(t)$ на постоянный уровень $\bar{\varepsilon} \neq 0$ (и начальным условием $\sigma(t_0) = \sigma_0$) задается интегралом (12) в неявной форме $t = r(\sigma; \bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0)$;

2) с ростом уровня деформации $\bar{\varepsilon}$ (или σ_0) КР $\sigma = \sigma(t; \bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0), t \geq t_0$, смещаются вверх;

3) все КР $\sigma = \sigma(t; \bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0)$ с $\bar{\varepsilon} > 0$ (как при мгновенном нагружении, так и с начальной стадией деформирования) строго убывают по t на $(t_0; +\infty)$;

4) если несобственный интеграл (14) (с особенностью в точке $\sigma = 0$) расходится, то все КР с произвольными $\bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0$ определены на всем луче $[t_0; \infty)$ и стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$; для этого достаточно, чтобы $F'(x)/V(x) = Cx^{-m} + o(x^{-m}), m \geq 1$, при $x \rightarrow 0+0$;

5) если интеграл (14) сходится, то любая КР $\sigma = \sigma(t; \bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0)$ достигает асимптоты $\sigma = 0$ за конечное время $t_* - t_0 = \tau_r I(\sigma_0)$ и $\sigma(t) \equiv 0$ при $t \geq t_*(\sigma_0)$;

6) для того чтобы все КР $\sigma(t; \bar{\varepsilon}, t_0, \sigma_0)$ с фиксированными $\bar{\varepsilon}, \sigma_0 > 0$ были выпуклы вниз при $t \geq t_0$, а все КР с $\bar{\varepsilon}, \sigma_0 < 0$ были выпуклы вверх, необходимо и достаточно наложить на МФ дополнительное ограничение (11): $|V'(x)/V(x)| > |F''(x)/F'(x)|, x \in (\omega_-, \omega_+)$.

В случае, когда $V(x) \equiv 0$ на некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+]$, пункты 1, 2 теоремы сохраняются, п. 3 выполняется лишь для $\sigma_0 \notin [\sigma_-, \sigma_+]$, т. е. $\bar{\varepsilon} \notin [F(\sigma_-)/E, F(\sigma_+)/E]$ (все КР с начальным значением $\sigma_0 \in [\sigma_-, \sigma_+]$ постоянны при $t \geq t_0$), п. 6 соблюдается в случае $\sigma_0 \notin [\sigma_-, \sigma_+]$. Модифицируются пп. 4 и 5: 4') если $\sigma_0 > \sigma_+$ и несобственный интеграл (15) расходится (расходится интеграл от $1/V(x)$ по отрезку $[\sigma_+, \sigma_0]$), то все КР с $\sigma_0 > \sigma_+$ ($\bar{\varepsilon} > F(\sigma_+)/E$) определены на всем луче $[t_0; \infty)$, $\sigma(t) > \sigma_+$ и $\sigma(+\infty) = \sigma_+$; для расходимости (15) достаточно, чтобы $V'(\sigma_+ + 0) \neq 0$; 5') если интеграл (15) сходится, то КР с произвольными t_0 и $\sigma_0 > \sigma_+$ достигает равновесного уровня $\sigma = \sigma_+$ за конечное время $\tau_f = t_+ - t_0 = \tau_r I(\sigma_0, \sigma_+)$, а в дальнейшем $\sigma(t) \equiv \sigma_+ = \text{const}$. Основные изменения по сравнению с пп. 4 и 5 теоремы: при $\sigma_0 > \sigma_+$ интеграл (14) заменяется интегралом (15), особенность у подынтегральной функции в точке $\sigma = \sigma_+$, а не $\sigma = 0$, сходимость (15) зависит только от

скорости стремления к нулю МФ $V(x)$ при $x \rightarrow \sigma_+ + 0$, асимптота КР при $t \rightarrow \infty$ имеет вид $\sigma = \sigma_+$, а не $\sigma = 0$.

Доказано, что только во втором случае (когда $V(x) \equiv 0$ на $[\sigma_-, \sigma_+]$) кривые релаксации ОС (1) с произвольными $t_0 \geq 0$ и $\sigma_0 \notin [\sigma_-, \sigma_+]$ имеют при $t \rightarrow \infty$ ненулевое равновесное значение напряжения: $\sigma(t, \sigma_0) \rightarrow \sigma_+$ при $\sigma_0 > \sigma_+$ и $\sigma(t, \sigma_0) \rightarrow \sigma_-$ при $\sigma_0 < \sigma_-$ (при сжатии), т. е. ОС описывает поведение, характерное для твердых тел при длительном деформировании. В первом случае (см. теорему) КР всегда имеет нулевой предел и моделируемый материал принадлежит классу жидкостей, обычно характеризующему свойством полной релаксации $\sigma(\infty, \bar{\varepsilon}) = 0$ для всех $\bar{\varepsilon}$ [31, 36].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хохлов А.В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2016. № 6. С. 36–41.
2. Хохлов А.В. Свойства семейства кривых нагружения с постоянной скоростью, порождаемых нелинейной моделью вязкоупругопластичности типа Максвелла // Машиностроение и инженерное образование. 2017. № 1. С. 57–71.
3. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: моделирование влияния температуры на кривые деформирования, релаксации и ползучести // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21. № 1. С. 160–179.
DOI: 10.14498/vsgtu1524
4. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: скорость накопления пластической деформации при циклических нагружениях // Деформация и разрушение материалов. 2017. № 7. С. 7–19.
5. Хохлов А.В. Идентификация нелинейной модели упруговязкопластичности типа Максвелла по кривым ползучести с начальной стадией нагружения. Ч. 1. Математический фундамент // Деформация и разрушение материалов. 2017. № 9. С. 2–9.
6. Никитенко А.Ф., Соснин О.В., Торшенин Н.Г., Шокало И.К. О ползучести упрочняющихся материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // Прикладная механика и техническая физика. 1971. № 2. С. 118–122.
7. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
8. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. № 2. С. 140–160.
9. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатых нагружениях, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 3. С. 93–123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123
10. Хохлов А.В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // Наука и образование: научное издание. 2016. № 5. С. 187–245. DOI: 10.7463/0516.0840650
URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/840650.html>

11. *Городцов В.А., Леонов А.И.* О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости // Прикладная математика и механика. 1968. Т. 32. № 1. С. 70–94.
12. *Leonov A.I., Lipkina E.Ch., Pashkin E.D., Prokunin A.N.* Theoretical and experimental investigations of shearing in elastic polymer liquids // Rheol. Acta. 1976. Vol. 15. No. 7/8. P. 411–426. DOI: 10.1007/BF01574496
13. *Пальмов В.А.* Реологические модели в нелинейной механике деформируемых тел // Успехи механики. 1980. Т. 3. № 3. С. 75–115.
14. *Прокунин А.Н.* О нелинейных определяющих соотношениях максвелловского типа для описания движения полимерных жидкостей // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. № 6. С. 957–965.
15. *Leonov A.I.* Analysis of simple constitutive equations for viscoelastic liquids // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1992. Vol. 42. Iss. 3. P. 323–350. DOI: 10.1016/0377-0257(92)87017-6
16. *Leonov A.I., Prokunin A.N.* Non-linear phenomena in flows of viscoelastic polymer fluids. London: Chapman and Hall, 1994. 475 p.
17. *Leonov A.I.* Constitutive equations for viscoelastic liquids: Formulation, analysis and comparison with data // Rheology Series. 1999. Vol. 8. P. 519–575. DOI: 10.1016/S0169-3107(99)80040-9
18. *Krempfle E., Ho K.* Inelastic compressible and incompressible, isotropic, small strain viscoplasticity theory based on overstress (VBO) // Handbook of Materials Behavior Models. Vol. 1. New York: Academic Press, 2001. P. 336–348.
19. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
20. *Малинин Н.Н.* Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981. 221 с.
21. *Betten J.* Creep mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 367 p.
22. *Takagi H., Dao M., Fujiwara M.* Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling // Materials Transactions. 2014. Vol. 55. No. 2. P. 275–284. DOI: 10.2320/matertrans.M2013370
URL: https://www.jstage.jst.go.jp/article/matertrans/55/2/55_M2013370/_article
23. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 310 с.
24. *Васин Р.А., Еникеев Ф.У.* Введение в механику сверхпластичности. Уфа: Гилем, 1998. 280 с.
25. *Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D.* Superplasticity in metals and ceramics. Cambridge University Press, 1997. 287 p.
26. *Fundamentals and engineering of severe plastic deformation / V.M. Segal, I.J. Beyerlein, C.N. Tome, V.N. Chuvil'deev, V.I. Kopylov.* New York: Nova Science Publ., 2010. 542 p.
27. *Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y.* Creep analysis with a stress range dependent constitutive model // Arch. Appl. Mech. 2009. Vol. 79. No. 6-7. P. 619–630. DOI: 10.1007/s00419-008-0287-5
28. *Caο Y.* Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests // Mech. Time-Depend. Mater. 2007. Vol. 11. No. 2. P. 159–172. DOI: 10.1007/s11043-007-9033-6
29. *Радченко В.П., Шапиевский Д.В.* Анализ нелинейной обобщенной модели Максвелла // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2005. № 38. С. 55–64. DOI: 10.14498/vsgtu372

30. Lu L.Y., Lin G.L., Shih M.H. An experimental study on a generalized Maxwell model for non-linear viscoelastic dampers used in seismic isolation // *Engineering Structures*. 2012. Vol. 34. P. 111–123. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.09.012
31. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 440 с.
32. Rohn C.L. Analytical polymer rheology. Munich: Hanser Publishers, 1995. 314 p.
33. Brinson H.F., Brinson L.C. Polymer engineering science and viscoelasticity. Springer Science & Business Media, 2008. 446 p.
34. Christensen R.M. Mechanics of composite materials. New York: Dover Publications, 2012. 384 p.
35. Bergstrom J.S. Mechanics of solid polymers. Theory and computational modeling. William Andrew, 2015. 520 p.
36. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

Хохлов Андрей Владимирович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник лаборатории упругости и пластичности Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова (Российская Федерация, 119192, Москва, Мичуринский пр-т, д. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: общие свойства семейства кривых релаксации и ограничения на материальные функции // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2017. № 6. С. 31–55. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-31-55

**NONLINEAR MAXWELL-TYPE ELASTOVISCOPLASTIC MODEL:
GENERAL PROPERTIES OF STRESS RELAXATION CURVES
AND RESTRICTIONS ON THE MATERIAL FUNCTIONS**

A. V. Khokhlov

andrey-khokhlov@ya.ru

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The study analytically examines a nonlinear Maxwell-type constitutive relation with two arbitrary material functions in order to find out qualitative properties of the basic quasi-static curves generated by the model and to reveal its capabilities and applicability scope. The constitutive relation is targeted at adequate modeling of the main rheological phenomena set which is typical for non-ageing rheonomic materials exhibiting non-linear hereditary properties, strong positive strain rate sensitivity, secondary creep, yielding at constant stress and tension compression asymmetry. It is applicable for simulation of mechanical behavior of various polymers, their solutions and melts, solid propellants, sand-asphalt

Keywords

Viscoelasticity, viscoplasticity, restrictions on the material functions, tension compression asymmetry, stress relaxation curves, equilibrium stress value, rate sensitivity, superplasticity, polymers

concretes, composite materials, ices, titanium and aluminum alloys, ceramics at high temperature, etc. General qualitative properties of the stress relaxation curves generated by the model in uni-axial isothermal case are studied analytically under minimal primary restrictions on both material functions. We examined the relaxation rate evolution, conditions for monotonicity and convexity of relaxation curves, their asymptotics and stress limit value at infinity, their dependences on the material functions, a given strain level and initial loading stage characteristics. As a result, we revealed the additional necessary restrictions which should be imposed on the material functions to provide an adequate description of basic rheological phenomena related to stress relaxation and typical test curves properties of a wide class of elastoviscoplastic materials. Finally, we discovered two different cases in the model behavior depending on qualitative properties of the material functions, namely, in the first case the equilibrium (limit) stress value is nonzero and the model simulates solid behavior, and in the second case the equilibrium value of stress is zero and the model simulates liquid behavior

Received 16.08.2016
© BMSTU, 2017

REFERENCES

- [1] Khokhlov A.V. Properties of a nonlinear viscoelastoplastic model of Maxwell type with two material functions. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2016, vol. 71, iss. 6, pp. 132–136. DOI: 10.3103/S0027133016060029
- [2] Khokhlov A.V. Properties of stress-strain curves generated by the nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model at constant stress rates. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2017, no. 1, pp. 57–71 (in Russ.).
- [3] Khokhlov A.V. The nonlinear Maxwell-type model for viscoelastoplastic materials: Simulation of temperature influence on creep, relaxation and strain-stress curves. *Vestnik SamGTU. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2017, vol. 21, no. 1, pp. 160–179 (in Russ.). DOI: 10.14498/vsgtu1524
- [4] Khokhlov A.V. Nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model: Rate of plastic strain accumulation under cyclic loadings. *Deformatsiya i razrushenie materialov*, 2017, no. 7, pp. 7–19 (in Russ.).
- [5] Khokhlov A.V. The nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model identification techniques using creep curves under ramp loadings. P. 1. Mathematical base. *Deformatsiya i razrushenie materialov*, 2017, no. 9, pp. 2–9 (in Russ.).
- [6] Nikitenko A.F., Sosnin O.V., Torshenov N.G., Shokalo I.K. Creep of hardening materials with different properties in tension and compression. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1971, vol. 12, no. 2, pp. 277–281. DOI: 10.1007/BF00850702
- [7] Lokoshchenko A.M. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov [Materials creep and long-term strength]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2016. 504 p.
- [8] Khokhlov A.V. Constitutive relation for rheological processes with known loading history. Creep and long-term strength curves. *Mechanics of Solids*, 2008, vol. 43, iss. 2, pp. 283–299. DOI: 10.3103/S0025654408020155

- [9] Khokhlov A.V. Analysis of creep curves general properties under step loading generated by the Rabotnov nonlinear relation for viscoelastic plastic materials. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 3, pp. 93–123 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123
- [10] Khokhlov A.V. The qualitative analysis of theoretic curves generated by linear viscoelasticity constitutive equation. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie* [Science and Education: Scientific Publication], 2016, no. 5, pp. 187–245 (in Russ.). DOI: 10.7463/0516.0840650 Available at: <http://technomag.bmstu.ru/doc/840650.html>
- [11] Gorodtsov V.A., Leonov A.I. On kinematics, non-equilibrium thermodynamics and rheologic relation in viscoelasticity nonlinear theory. *PMM*, 1968, vol. 32, no. 1, pp. 70–94 (in Russ.).
- [12] Leonov A.I., Lipkina E.Ch., Paskhin E.D., Prokunin A.N. Theoretical and experimental investigations of shearing in elastic polymer liquids. *Rheol. Acta*, 1976, vol. 15, no. 7/8, pp. 411–426. DOI: 10.1007/BF01574496
- [13] Pal'mov V.A. Rheologic models in nonlinear mechanics of deformable bodies. *Uspekhi mekhaniki*, 1980, vol. 3, no. 3, pp. 75–115 (in Russ.).
- [14] Prokunin A.N. On the non-linear Maxwell-type defining equations for describing the motions of polymer liquids. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1984, vol. 48, iss. 6, pp. 699–706. DOI: 10.1016/0021-8928(84)90037-6
- [15] Leonov A.I. Analysis of simple constitutive equations for viscoelastic liquids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1992, vol. 42, iss. 3, pp. 323–350. DOI: 10.1016/0377-0257(92)87017-6
- [16] Leonov A.I., Prokunin A.N. Non-linear phenomena in flows of viscoelastic polymer fluids. London, Chapman and Hall, 1994. 475 p.
- [17] Leonov A.I. Constitutive equations for viscoelastic liquids: Formulation, analysis and comparison with data. *Rheology Series*, 1999, vol. 8, pp. 519–575. DOI: 10.1016/S0169-3107(99)80040-9
- [18] Kremple E., Ho K. Inelastic compressible and incompressible, isotropic, small strain viscoplasticity theory based on overstress (VBO). In: *Handbook of Materials Behavior Models*. Vol. 1. New York, Academic Press, 2001, pp. 336–348.
- [19] Rabotnov Yu.N. Polzuchest' elementov konstruksiy [Construction elements creep]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 752 p.
- [20] Malinin N.N. Raschety na polzuchest' elementov mashinostroitel'nykh konstruksiy [Creep design of mechanical-engineering construction parts]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981. 221 p.
- [21] Betten J. Creep mechanics. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2008. 367 p.
- [22] Takagi H., Dao M., Fujiwara M. Prediction of the constitutive equation for uniaxial creep of a power-law material through instrumented microindentation testing and modeling. *Materials Transactions*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 275–284. DOI: 10.2320/matertrans.M2013370 Available at: https://www.jstage.jst.go.jp/article/matertrans/55/2/55_M2013370/_article
- [23] Astarita G., Marrucci G. Principles of non-Newtonian fluid mechanics. McGraw-Hill, 1974. 304 p.
- [24] Vasin R.A., Enikeev F.U. Vvedenie v mekhaniku sverkhplastichnosti [Introduction to superplasticity mechanics]. Ufa, Gilem Publ., 1998. 280 p.

- [25] Nieh T.G., Wadsworth J., Sherby O.D. Superplasticity in metals and ceramics. Cambridge University Press, 1997. 287 p.
- [26] Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. Fundamentals and engineering of severe plastic deformation. New York, Nova Science Publ., 2010. 542 p.
- [27] Naumenko K., Altenbach H., Gorash Y. Creep analysis with a stress range dependent constitutive model. *Arch. Appl. Mech.*, 2009, vol. 79, no. 6-7, pp. 619–630.
DOI: 10.1007/s00419-008-0287-5
- [28] Cao Y. Determination of the creep exponent of a power-law creep solid using indentation tests. *Mech. Time-Depend. Mater.*, 2007, vol. 11, no. 2, pp. 159–172.
DOI: 10.1007/s11043-007-9033-6
- [29] Radchenko V.P., Shapievskiy D.V. Analysis of a nonlinear generalized Maxwell model. *Vestnik SamGTU. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2005, no. 38, pp. 55–64 (in Russ.).
DOI: 10.14498/vsgtu372
- [30] Lu L.Y., Lin G.L., Shih M.H. An experimental study on a generalized Maxwell model for nonlinear viscoelastic dampers used in seismic isolation. *Engineering Structures*, 2012, vol. 34, pp. 111–123. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.09.012
- [31] Vinogradov G.V., Malkin A.Ya. Reologiya polimerov [Polymer rheology]. Moscow, Khimiya Publ., 1977. 440 p.
- [32] Rohn C.L. Analytical polymer rheology. Munich, Hanser Publishers, 1995. 314 p.
- [33] Brinson H.F., Brinson L.C. Polymer engineering science and viscoelasticity. Springer Science & Business Media, 2008. 446 p.
- [34] Christensen R.M. Mechanics of composite materials. New York, Dover Publications, 2012. 384 p.
- [35] Bergstrom J.S. Mechanics of solid polymers. Theory and computational modeling. William Andrew, 2015. 520 p.
- [36] Truesdell C. A first course in rational continuum mechanics. Academic Press, 1972. 304 p.

Khokhlov A.V. — Cand. Sc. (Eng.), Researcher Scientist of the Laboratory of Elasticity and Plasticity, Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University (Michurinskiy prospekt 1, Moscow, 119192 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Khokhlov A.V. Nonlinear Maxwell-Type Elastoviscoplastic Model: General Properties of Stress Relaxation Curves and Restrictions on the Material Functions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 6, pp. 31–55 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2017-6-31-55