УДК 539.3 DOI: 10.18698/1812-3368-2017-4-52-64

ОСОБЕННОСТИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛУПОЛОСЕ

М.Д. Коваленко kov08@inbox.ru
И.В. Меньшова menshovairina@yandex.ru

Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, Москва, Российская Федерация

Аннотация

На примере нечетно-симметричной краевой задачи теории упругости для полуполосы со свободными продольными сторонами рассмотрены особенности точных решений. Решения построены в виде разложений по функциям Фадля — Папковича, коэффициенты которых определены с помощью систем функций, биортогональных к функциям Фадля — Папковича. Решение задачи дано в трех постановках: 1) на торце полуполосы заданы напряжения; 2) на торце полуполосы заданы перемещения; 3) торец полуполосы рассмотрен как линия разрыва продольных или поперечных перемещений. Показано, что решение краевой задачи в полуполосе неединственное. Условия совместности деформаций для полученных решений не выполняются. Физически это означает, что стороны полуполосы, прямолинейные до деформации, искривляются после приложения нагрузки. Изучена связь между неединственностью, совместностью деформаций и решением эквивалентной неоднородной задачи

Ключевые слова

Полуполоса, функции Фадля — Папковича, точные решения, неединственность решения, несовместность деформаций, остаточные напряжения

Поступила в редакцию 19.09.2016

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-41-02644 р_поволжье_а

Введение. В виде разложений по функциям Фадля — Папковича (однородным решениям) дано решение краевой задачи теории упругости в полуполосе $\{\Pi^+ : x \geq 0, |y| \leq 1\}$ со свободными продольными сторонами в нечетно-симметричной постановке. Являясь собственными функциями краевой задачи, функции Фадля — Папковича точно удовлетворяют нулевым граничным условиям на длинных сторонах полуполосы. Удовлетворяя граничным условиям на ее торце, приходим к проблеме разложения двух заданных здесь граничных функций в ряды по двум системам функций Фадля — Папковича. Функции Фадля — Папковича комплекснозначны и не образуют базиса на отрезке — торце полуполосы. Поэтому найти неизвестные коэффициенты разложений по ним, опираясь на классические представления теории базиса функций, невозможно.

Основываясь на преобразовании Бореля в классе квазицелых функций экспоненциального типа [1], к функциям Фадля — Папковича удается построить биортогональные функции, затем найти явные выражения для коэффициентов искомых разложений. Рассмотрены случаи, когда на торце полуполосы заданы напряжения, на торце полуполосы заданы перемещения и торец полуполосы рассматривается как линия разрыва продольных или поперечных перемещений. Дана физическая интерпретация полученных решений и показана их взаимосвязь, проявляющаяся, в частности, как связь между коэффициентами Лагранжа, заданных на торце полуполосы или на разрыве раскладываемых функций. Точные решения краевых задач в полуполосе обладают свойствами, не присущими ни одному из известных аналитических решений теории упругости. Например, они не единственны (впервые внимание на это обратил Е.И. Шемякин [2]). Отсюда, как следствие, вытекает возможность описания этими решениями остаточных (начальных, собственных) напряжений. Рассмотрена связь между неединственностью, совместностью деформаций и решением эквивалентной неоднородной задачи. Наиболее полный обзор по бигармонической проблеме, примером которой является рассмотренная в работе задача, можно найти в работе [3].

Краевые задачи. Решение нечетно-симметричной краевой задачи для полуполосы Π^+ со свободными длинными сторонами $y=\pm 1$ ищется в виде следующих разложений в ряды по функциям Фадля — Папковича, в которых C_i $(i=1,\ldots,4)$ и a_k, $\overline{a_k}$ $(k=1,2,\ldots)$ — неизвестные коэффициенты разложений:

$$
\begin{gathered}
U(x,y)=\left(C_2+2C_3x+3C_4x^2\right)y-C_4\left(\left(2+\nu\right)y^3-3\nu y\right)+\\
+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\xi(\lambda_k,y)e^{\lambda_k x}+\overline{a_k}\xi\left(\overline{\lambda_k},y\right)e^{\overline{\lambda_k}x};\\
V(x,y)=-\left(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3\right)+\left(C_3+3C_4x\right)\left[(2+\nu)-\nu y^2\right]+\\
+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\chi(\lambda_k,y)e^{\lambda_k x}+\overline{a_k}\chi\left(\overline{\lambda_k},y\right)e^{\overline{\lambda_k}x};\\
\sigma_x(x,y)=4(1+\nu)\left(C_3+3C_4x\right)y+\sum_{k=1}^{\infty}a_k s_x(\lambda_k,y)e^{\lambda_k x}+\overline{a_k}s_x\left(\overline{\lambda_k},y\right)e^{\overline{\lambda_k}x};\qquad (1)\\
\sigma_y(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k s_y(\lambda_k,y)e^{\lambda_k x}+\overline{a_k}s_y\left(\overline{\lambda_k},y\right)e^{\overline{\lambda_k}x};\\
\tau_{xy}(x,y)=6(1+\nu)\left(1-y^2\right)C_4+\sum_{k=1}^{\infty}a_k t_{xy}(\lambda_k,y)e^{\lambda_k x}+\overline{a_k}t_{xy}\left(\overline{\lambda_k},y\right)e^{\overline{\lambda_k}x}.
\end{gathered}
$$

Здесь $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — перемещения вдоль осей x (продольное) и y (поперечное); G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; собственные числа $\left\{\pm\lambda_k, \pm\overline{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ — множество всех комплексных нулей целой функции экспоненциального типа $L(\lambda) = \lambda - \sin\lambda\cos\lambda$. Слагаемым, стоящим вне сумм, отвечает элементарное решение теории изгиба балки. Выражения для функций Фадля — Папковича $\xi(\lambda_k, y)$, $\chi(\lambda_k, y)$ и другие приведены в работе [4].

Граничные условия при $y = \pm 1$ выполняются автоматически, поскольку $t_{xy}(\lambda_k, \pm 1) = s_y(\lambda_k, \pm 1) = 0$. Удовлетворяя с помощью выражений (1) граничным условиям, заданным на торце полуполосы, приходим к задаче определения неизвестных коэффициентов из разложений по функциям Фадля — Папковича. В том случае, когда на торце полуполосы известны самоуравновешенное по моменту нормальное ($\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$) и самоуравновешенное (по силе) касательное ($\tau_{xy}(0, y) = \tau(y)$) напряжения, получаем

$$\sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} s_x\left(\overline{\lambda_k}, y\right);$$

$$\tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k} t_{xy}\left(\overline{\lambda_k}, y\right).$$

Коэффициенты a_k находятся в явном виде с помощью функций, биортогональных к функциям Фадля — Папковича. Уравнения для определения биортогональных функций формально совпадают с аналогичными уравнениями для четно-симметричной задачи [5]. Ниже выписаны используемые в работе финитные части функций, биортогональных к функциям Фадля — Папковича, соответственно к $\xi(\lambda_k, y)$, $\chi(\lambda_k, y)$, $s_x(\lambda_k, y)$, $t_{xy}(\lambda_k, y)$:

$$u_0(y) = \frac{3}{2(1+\nu)} y, \quad u_k(y) = \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\sin\lambda_k y}{\sin\lambda_k};$$

$$v_0(y) = \frac{3y^2}{4(1+\nu)}, \quad v_k(y) = \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\cos\lambda_k y}{\lambda_k \sin\lambda_k};$$

$$x_k(y) = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k^2}\left(\frac{\sin\lambda_k y}{\sin\lambda_k} - y\right), \quad t_k(y) = \frac{1}{2(1+\nu)\lambda_k} \frac{\cos\lambda_k y}{\sin\lambda_k}, \quad |y| \le 1, \ k \ge 1.$$

Приведем окончательные формулы для перемещений и напряжений в полуполосе. Они получаются по простой схеме, подробно рассмотренной, например, в работе [5] для четно-симметричной деформации полуполосы.

Если на торце полуполосы заданы самоуравновешенные по моменту нормальные напряжения $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$, а касательные равны нулю, то получим

$$U(x,y)=C_2y+\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left\{x_k\frac{\xi(\lambda_k,y)}{\lambda_kM_k}\lambda_k\overline{\lambda_k}\frac{\operatorname{Im}(-e^{\lambda_kx})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\};$$

$$V(x,y)=-(C_1+C_2x)+\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left\{x_k\frac{\chi(\lambda_k,y)}{M_k}\frac{\operatorname{Im}(-\overline{\lambda_k}e^{\lambda_kx})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\};$$

$$\sigma_x(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left\{x_k\frac{s_x(\lambda_k,y)}{M_k}\frac{\operatorname{Im}(-\overline{\lambda_k}e^{\lambda_kx})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\}; \tag{2}$$

$$\sigma_y(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left\{x_k\frac{s_y(\lambda_k,y)\lambda_k\overline{\lambda_k}}{M_k\lambda_k^2}\frac{\operatorname{Im}(-\lambda_ke^{\lambda_kx})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\};$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left\{x_k\frac{t_{xy}(\lambda_k,y)}{\lambda_kM_k}\lambda_k\overline{\lambda_k}\frac{\operatorname{Im}(-e^{\lambda_kx})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\}.$$

Если на торце полуполосы заданы самоуравновешенные касательные напряжения $\tau_{xy}(0,y)=\tau(y)$, а нормальные равны нулю, то

$$U(x,y)=C_2y+\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left\{t_k\frac{\xi(\lambda_k,y)}{\lambda_kM_k}\frac{\operatorname{Im}(\lambda_ke^{\lambda_kx})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\};$$

$$V(x,y)=-(C_1+C_2x)+\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left\{t_k\frac{\chi(\lambda_k,y)}{M_k}\frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_kx})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\};$$

$$\sigma_x(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left\{t_k\frac{s_x(\lambda_k,y)}{M_k}\frac{\operatorname{Im}(e^{\lambda_kx})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\}; \tag{3}$$

$$\sigma_y(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left\{t_k\frac{s_y(\lambda_k,y)}{\lambda_k^2M_k}\frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2e^{\lambda_kx})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\};$$

$$\tau_{xy}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}2\operatorname{Re}\left\{t_k\frac{t_{xy}(\lambda_k,y)}{\lambda_kM_k}\frac{\operatorname{Im}(\lambda_ke^{\lambda_kx})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\}.$$

Коэффициенты Лагранжа x_k, t_k, входящие в формулы (2), (3), зависят от того, как заданные на торце полуполосы функции $\sigma(y)$ и $\tau(y)$ продолжены вне отрезка $|y|\le 1$ на всю вещественную ось [5, 6]. Выбирая тот или иной способ продолжения, получаем разные числа x_k, t_k и, следовательно, различные решения краевой задачи в полуполосе Π^+. Выбор продолжения определяется физическим смыслом задачи. Например, можно подобрать продолжение, при котором в угловых точках полуполосы напряжения будут иметь интегрируемые особенности, характерные для развернутого клина (полуплоскости), одна грань которого жестко защемлена, а на другой — заданы нормальные и касательные напряжения. Периодическое продолжение граничных функций, при котором числа x_k, t_k находятся по формулам

$$x_k = \int_{-1}^{1} \sigma(y) x_k(y) dy, \ t_k = \int_{-1}^{1} \tau(y) t_k(y) dy,$$

занимает особое место, поскольку в этом случае решение целиком определяется поведением функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$, и никакая дополнительная информация, связанная с продолжениями торцевых функций (кроме условий периодичности), в решение не вносится. Далее при решении краевых задач рассмотрен только такой способ продолжения граничных функций, что вполне достаточно для целей работы.

Следовательно, решение краевой задачи оказывается неединственным. Разность любых двух решений приводит к нетривиальному решению в полуполосе Π^+ с нулевыми напряжениями на ее сторонах. Напряжения и деформации, отвечающие этому решению, называются остаточными (начальными), или собственными.

Моделью, поясняющей природу остаточных напряжений в прямоугольнике (полуполосе), обычно служит следующая [7]. Рассмотрим некоторый прямоугольник P. Разрежем его на бесконечно малые (элементарные) прямоугольники, которые заменим деформированными прямоугольниками с искривленными сторонами. Придадим деформированным прямоугольникам первоначальный вид, приложив к ним соответствующие напряжения, после чего склеим их. В результате получим исходный прямоугольник P, в котором есть поле остаточных напряжений. Остаточные напряжения будут удовлетворять уравнениям равновесия, но условия совместности деформаций выполняться не будут, так как перемещения в каждой точке прямоугольника P (по построению) разрывны. В формулах (2), (3) напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия, а уравнениям совместности — нет.

Известно [8, 9], что однородная краевая задача с разрывами перемещений эквивалентна некоторой неоднородной задаче (теорема об эквивалентности силы-дислокации [8]). Соответствующие массовые нагрузки можно найти, используя уравнения равновесия в перемещениях, подставив в них перемещения (2) или (3). Физическая интерпретация эквивалентности состоит в том, что кроме описанной модели остаточных напряжений в прямоугольнике P есть и другая модель. Приложим к каждому деформированному прямоугольнику соответствующие массовые нагрузки так, что они опять станут элементарными прямоугольниками, а затем вновь склеим их и снимем нагрузку. В результате в прямоугольнике P возникнет такое же поле остаточных напряжений, как и в первом случае. Здесь для иллюстрации решений краевых задач привлекаются две рассмотренные модели. Поскольку условия совместности деформаций не выполняются, то перемещения не определяются однозначно. Однако, если из физических соображений понятно, как создается поле остаточных напряжений, то перемещения находятся единственным образом. В связи с этим приведем решения четырех задач.

Задача 1 (симметричное продолжение решения в левую полуполосу). Рассмотрим правую полуполосу Π^+ с антисимметрично искривленными относительно оси x продольными сторонами, но с прямолинейным торцом, и обозначим ее $\widetilde{\Pi}^{+}$. Вместе с правой рассмотрим левую полуполосу $\{\Pi^{-}: x \leq 0,\ |y| \leq 1\}$ и соответствующую ей искривленную полуполосу $\widetilde{\Pi}^{-}$, являющуюся зеркальным отображением полуполосы $\widetilde{\Pi}^{+}$. Следуя второй модели остаточных напряжений в прямоугольнике P, приложим к полуполосам $\widetilde{\Pi}^{\pm}$ массовые силы такие, что в результате получим две полуполосы $\Pi^{\pm}$. Склеив их по торцам и сняв массовую нагрузку, придем к бесконечной полосе $\{\Pi: |x| < \infty,\ |y| \leq 1\}$ со свободными сторонами, в которой имеется симметричное относительно оси y и антисимметричное относительно оси x поле остаточных напряжений такое, что $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$, а $\tau_{xy}(0, y) = 0$. Если полосу разрезать вдоль оси y, то она распадется на две полуполосы $\widetilde{\Pi}^{\pm}$. Остаточные напряжения сбрасываются, при этом возникают перемещения (2).

Пусть в результате разрыва известны перемещения $V(0, y) = v(y)$ точек торцов правой и левой полуполос, образовавшихся после разделения полосы Π. Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{gathered} v(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi\left(\lambda_k, y\right) + \overline{a_k} \chi\left(\overline{\lambda_k}, y\right); \\ 0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi\left(\lambda_k, y\right) + \overline{a_k} \xi\left(\overline{\lambda_k}, y\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Окончательные выражения для перемещений и напряжений, отвечающие задаче (4), даются формулами (2), в которых необходимо числа x_k заменить коэффициентами Лагранжа $(k = 0, 1, \ldots)$:

$$v_k = \int_{-1}^{1} v\left(y\right) v_k(y) dy.$$

Таким образом, если при $x = 0$ известны значения сбрасываемых (самоуравновешенных по моменту) остаточных напряжений $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$ или возникающих при этом перемещений $V(0, y) = v(y)$, то можно полностью восстановить поле остаточных напряжений (2) в полосе Π и соответствующих им сбрасываемых перемещений. Горизонтальные перемещения по условию равны нулю, поэтому постоянная $C_2 = 0$. Можно показать (аналогичные выкладки можно найти в работе [10]), что если функция $v(y)$ самоуравновешена и ортогональна на отрезке $[-1, 1]$ к функции $v_0(y)$, то $C_1 = 0$. Если это не так, то постоянная C_1 находится по формуле

$$C_1 = \int_{-1}^{1} \left[v(y) - V_0 \right] v_0(y) dy, \quad V_0 = \int_{-1}^{1} v(y) dy. \tag{5}$$

Задача 2 (симметричное продолжение решения в левую полуполосу). Пусть в полосе Π имеется симметричное относительно оси y и антисимметричное относительно оси x поле остаточных напряжений такое, что при $x = 0$ самоуравновешенные по моменту напряжения $\sigma_x(0, y) = \sigma(y)$, а касательные равны нулю. Предположим, что вследствие поперечного разрыва продольных перемещений вдоль оси y

$$U^+(0, y) - U^-(0, y) = 2u(y)$$

напряжения сбрасываются. Здесь через $U^{\pm}(0, y)$ обозначены равные $u(y)$ перемещения справа и слева на разрыве. Решение задачи (в четно-симметричной постановке аналогичное решение приведено в работе [5]) дается формулами (2), если в них принять

$$x_k = -u_k / \overline{\lambda_k}, \quad u_k = \int_{-1}^{1} u(y) u_k(y) dy, \tag{6}$$

кроме формулы для продольных перемещений, которая теперь имеет вид

$$U(x, y) = C_2 y + \sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\left\{ u_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)} \right\}. \tag{7}$$

Формулы (2), (7) описывают остаточные напряжения в бесконечной полосе Π и перемещения, которые возникают при их сбросе. Неизвестная постоянная $C_1 = 0$, так как остаточные напряжения в бесконечной полосе создаются только за счет поворота точек криволинейных торцов полуполос $\widetilde{\Pi}^{\pm}$ относительно начала координат. Постоянной

$$C_2 = \int_{-1}^{1} u(y) u_0(y) dy$$

соответствуют взаимно противоположные повороты полуполос $\widetilde{\Pi}^{\pm}$, как абсолютно жестких, на угол $\alpha = \operatorname{arctg} C_2$.

Задача 3 (нечетно-симметричное продолжение решения в левую полуполосу). Рассмотрим нечетно-симметричное продолжение решения из правой полуполосы $\widetilde{\Pi}^{+}$ с антисимметрично искривленными относительно оси x продольными сторонами и торцом в левую. Приложим к полуполосам $\widetilde{\Pi}^{\pm}$ требуемые массовые силы. Получившиеся полуполосы $\Pi^{\pm}$ склеим по торцам. Снимая массовую нагрузку, получаем бесконечную полосу Π, в которой имеется нечетно-симметричное относительно осей x и y поле остаточных напряжений такое, что $\sigma_x(0, y) = 0$, а $\tau_{xy}(0, y) = \tau(y)$, где $\tau(y)$ — четная, самоуравновешенная функция. Если полосу Π разрезать по оси y, то она распадется на две первоначальные полуполосы $\widetilde{\Pi}^{\pm}$. Остаточные напряжения сбрасываются, при этом возникают перемещения (3).

Пусть в результате разрыва известны горизонтальные перемещения $U(0,y)=u(y)$ точек торцов правой и левой полуполос, образовавшихся после разделения полосы Π. Математическая формулировка задачи выглядит так:

$$u(y)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y)+\overline{a_k}\xi\left(\overline{\lambda_k}, y\right);$$

$$0=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y)+\overline{a_k}\chi\left(\overline{\lambda_k}, y\right).$$

Ее решение дается формулами (3), в которых необходимо числа t_k заменить u_k (6). По симметрии задачи, поперечные перемещения при $x=0$ будут равны нулю, поэтому $C_1=0$. Постоянной C_2 соответствует поворот полуполос относительно начала координат, как абсолютно жестких. Угол поворота определяется так же, как и в задаче 2: $\alpha=\operatorname{arctg} C_2$. Только в этом случае обе полуполосы поворачиваются, в силу обратной симметрии, в одном направлении. Формулы (3) для $U(x,y)$, $V(x,y)$ описывают те перемещения, которые возникают в полуполосе Π^+ в результате сброса соответствующих остаточных напряжений.

Задача 4 (нечетно-симметричное продолжение решения в левую полуполосу). Пусть в полосе Π имеется антисимметричное относительно осей x и y поле остаточных напряжений такое, что при $x=0$ касательные самоуравновешенные напряжения $\tau_{xy}(0,y)=\tau(y)$, а нормальные равны нулю. Предположим, что вследствие разрыва вдоль оси y

$$V^+(0,y)-V^-(0,y)=2v(y)$$

напряжения сбрасываются. Через $V^{\pm}(0,y)$ обозначены равные $v(y)$ перемещения справа и слева на разрыве. Решение задачи (в четно-симметричной постановке аналогичное решение построено в работе [5]) дается формулами (3), если в них принять $v_k=t_k/\lambda_k$, кроме формулы для перемещений $V(x,y)$, которая принимает вид

$$V(x,y)=-C_1+\sum_{k=1}^{\infty} 2\operatorname{Re}\left\{v_k \frac{\chi(\lambda_k,y)}{M_k}\frac{\operatorname{Im}(\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im}(\lambda_k)}\right\}.$$

Постоянная $C_2=0$, так как $U(0,y)=0$. Постоянная C_1 отвечает взаимно противоположным жестким смещениям полуполос $\widetilde{\Pi}^{\pm}$ вдоль оси y, возникающим в результате разрыва, и определяется по формуле (5).

Выводы. Показано, что решение краевой задачи в полуполосе неединственное. Неединственность связана с необходимостью продолжения заданных на торце полуполосы граничных функций с отрезка (торца полуполосы) на всю вещественную ось. От того, как выполнено это продолжение, будет зависеть вид решения. Способ того или иного продолжения определяется из физических соображений. Например, можно выбрать такое продолжение граничных функций вне отрезка, что в угловой точке полуполосы будет особенность в напряжениях, характерная для полуплоскости, одна часть прямолинейной границы которой жестко защемлена, а на другой части приложены внешние нагрузки.

Подробнее остановимся на физической стороне полученных точных решений. Для большей простоты и наглядности лучше рассмотреть краевую задачу для полуполосы в четно-симметричной постановке.

Примем, что заданные на торце правой полуполосы граничные функции периодически продолжены вне торца. Возьмем правую полуполосу с симметрично искривленными продольными сторонами и торцом и аналогичную ей левую, являющуюся зеркальным отображением правой. Замостим такими полуполосами всю плоскость и будем стягивать их стороны на несоприкасающихся участках границы, следуя первой модели остаточных напряжений. В результате получим бесконечную плоскость с периодическим полем остаточных напряжений, симметричным относительного оси y. Решив соответствующую краевую задачу для бесконечной полосы со свободными сторонами и заданным поперечным разрывом продольных перемещений (решение приведено в работе [5]), можно найти такую отвечающую этому разрыву форму продольных сторон склеиваемых полуполос, при которой нормальные и касательные напряжения на горизонтальных линиях склеивания станут равными нулю. В результате плоскость можно разделить на отдельные полосы, в каждой из которых есть поле остаточных напряжений и отвечающих ему перемещений, возникающих при сбросе напряжений, т. е. при разрыве полосы по оси y. Условия совместности деформаций для построенного таким способом решения во всей плоскости выполняться не будут, вследствие того, что оно разрывно.

Обратим внимание на то, что построение точных решений связано с продолжениями из правой полуполосы в левую (четно- или нечетно-симметричным способом) с теми же граничными условиями на длинных сторонах, что и справа. Однако решение может быть продолжено в левую полуполосу и с другими граничными условиями, например, в полуполосу с жестко защемленными длинными сторонами. В этом случае получим другое решение в правой полуполосе. В частности, напряжения в точке смены типа граничных условий при таком продолжении будут иметь степенную особенность. Таким образом, в решениях краевых задач, полученных в работе, угловые точки полуполосы являются точками пересечения двух взаимно перпендикулярных направлений, вдоль которых осуществляется продолжение решений. Следовательно, в их окрестностях граничные функции должны быть заданы вместе со всеми своими производными.

Особенностью решений, описывающих остаточные напряжения, является то, что граничные условия в них ставятся строго на прямолинейных границах полуполосы. На примере четно-симметричной задачи для правой полуполосы со свободными длинными сторонами и заданными на ее торце нормальными напряжениями (см. работы [11, 12]), напомним, как ставятся граничные условия в классическом случае. Бесконечную плоскость разделим на одинаковые, горизонтальные полосы. Вдоль границ полос проведем разрезы и сделаем на них одинаковые вкладки, симметричные относительно их осей и симметрично расположенные относительно вертикальной оси y. Выполним также вкладки вдоль вертикальной оси, полагая, что все они одинаковы и симметричны относительно горизонтальных осей полос и относительно оси y. Формы горизонтальных и вертикальных вкладок подобраны так, чтобы когда на оси y нормальные напряжения $\sigma_x(0, y)$ в пределах каждой полосы были равны заданным (касательные напряжения здесь равны нулю из условий симметрии), на осях горизонтальных вкладок касательные и нормальные напряжения будут равны нулю. Вкладки выполняются из того же материала, что и плоскость и неразрывно скрепляются с полосами. Создание вкладки подразумевает добавление недостающего материала или удаление лишнего (во избежание наползания сторон). Ввиду этого, в плоскости, замощенной бесконечными полосами, разрывов перемещений не будет и, следовательно, будут выполняться условия совместности деформаций. Однако граничные условия в этом случае ставятся не на строго прямолинейных сторонах полуполос, а на осях вкладок.

Обычно отбрасываемые при решении краевых задач теории упругости для полуполосы постоянные C_1 и C_2, отвечающие жестким смещениям, приобретают вполне определенный смысл в задаче о сбросе имеющихся в бесконечной полосе остаточных напряжений в результате ее разрыва по вертикальной оси симметрии. Они описывают возникающие в результате разрыва полосы с остаточными напряжениями жесткие перемещения и вращения относительно начала координат правой и левой полуполос $\widetilde{\Pi}^{\pm}$.

Ввиду важности остаточных напряжений при изучении горных ударов, механики очага землетрясений и т. д., отметим вытекающие из полученных результатов несколько признаков, свидетельствующих о наличии остаточных напряжений в образце: а) знакопеременность напряжений, являющаяся следствием их самоуравновешенности; б) значительные, а иногда необъяснимо большие значения напряжений (например, субгоризонтальных напряжений в земной коре); в) значительные остаточные деформации свободных поверхностей, особенно вблизи поверхностей разрыва; г) фрагменты образца, образовавшиеся вследствие его разделения и сброса остаточных напряжений, перемещаются и поворачиваются, как абсолютно жесткие; д) их невозможно сложить вновь по поверхностям разрыва без зазоров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коваленко М.Д.* О преобразовании Бореля в классе W квазицелых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 2001. Т. 7. Вып. 3. С. 761–774.

2. *Шемякин Е.И.* О краевых задачах теории упругости для областей с угловыми точками (плоская деформация) // Доклады РАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 342–345.

3. *Meleshko V.V.* Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. 2003. Vol. 56. No. 1. P. 33–85. DOI: 10.1115/1.1521166
URL: http://appliedmechanicsreviews.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1397470

4. *Себряков Г.Г., Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Семенова И.А.* Нечетно-симметричная краевая задача теории упругости для полуполосы. Точное решение // Доклады РАН. 2015. Т. 462. № 6. С. 662–665.

5. *Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д.* Разложения по функциям Фадля — Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 136–158.

6. *Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д.* Разложения по функциям Фадля — Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 5. С. 78–98.

7. *Гольденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. М.: Наука, 1969. 336 с.

8. *Касахара К.* Механика землетрясений / пер. с англ. М.Э. Шаскольской; под ред. В.Н. Николаевского. М.: Мир, 1985. 265 с.

9. *Слепян Л.И.* Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.

10. *Себряков Г.Г., Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д.* Нечетно-симметричная краевая задача для полуполосы с продольными ребрами жесткости. Биортогональные системы функций и разложения Лагранжа // Доклады РАН. 2016. Т. 468. № 3. С. 280–284.

11. *Шерман Д.И.* Об одной задаче теории упругости // Доклады АН СССР. 1940. Т. 27. № 9. С. 907–913.

12. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

Коваленко Михаил Денисович — д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник лаборатории геодинамики Института теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН (ИТПЗ РАН) (Российская Федерация, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32).

Меньшова Ирина Владимировна — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории геодинамики Института теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН (ИТПЗ РАН) (Российская Федерация, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Коваленко М.Д., Меньшова И.В. Особенности точных решений краевых задач теории упругости в полуполосе // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 4. С. 52–64. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-4-52-64

ON FEATURES OF EXACT SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY IN THE SEMI-STRIP

M.D. Kovalenko kov08@inbox.ru
I.V. Men'shova menshovairina@yandex.ru

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences (IEPT RAS), Moscow, Russian Federation

Abstract

The purpose of this work was to examine the features of the exact solutions of an odd-symmetric boundary-value problem of elasticity theory for the semi-strip with the free longitudinal sides, as an example. First, we constructed solutions in the form of expansions on Fadle — Papkovich functions and determined the coefficients by biorthogonal systems of functions. Then, we found the solution for the problem and showed it in three statements: a) the stresses were given at the end face of the semi-strip; b) the displacements were given at the end face of the semi-strip; c) the end face of the semi-strip was the line of displacement's discontinuity. The research showed that the solution for the boundary value problem in the semi-strip is not unique, and this results in residual stresses. The deformation compatibility requirement for the solutions obtained failed to be met. In physical terms it means that semi-strip's sides, which are rectilinear before deformation, curve after deformation. Next, we discussed the connection between non-uniqueness, compatibility conditions and solution for the equivalent inhomogeneous problem. Finally, we identified the residual stresses attributes resulting from the results obtained: 1) reversed stresses, as a consequence of its self-balanced nature; 2) serious, sometimes inexplicably big stresses, e. g., sub-horizontal stresses in the earth's crust; 3) serious residual stress of free surfaces; 4) fragments of coupon, which arises after its fragmentation and residual stress dropping, moves and turns as a perfectly rigid body; 5) it is impossible to put down the fragments along rupture faces without interlayer gaps

Keywords

Semi-strip, Fadle — Papkovich functions, exact solutions, non-uniqueness of the solution, incompatibility of deformations, residual stresses

REFERENCES

[1] Kovalenko M.D. About Borel transformation in the class W of quasi-integral functions. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2001, vol. 7, no. 3, pp. 761–774 (in Russ.).

[2] Shemyakin E.I. On boundary problem in elasticity theory for regions with angular points (plane deformation). *Doklady RAN*, 1996, vol. 347, no. 3, pp. 342–345 (in Russ.).

[3] Meleshko V.V. Selected topics in the history of two-dimensional biharmonic problem. *Appl. Mech. Rev.*, 2003, vol. 56, no. 1, pp. 33–85. DOI: 10.1115/1.1521166
Available at: http://appliedmechanicsreviews.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1397470

[4] Sebryakov G.G., Kovalenko M.D., Men'shova I.V., Semenova I.A. An odd-symmetric boundary value problem of elasticity theory for a semi-strip: Exact solution. *Doklady Physics*, 2015, vol. 60, no. 6, pp. 274–277. DOI: 10.1134/S1028335815060105
Available at: http://link.springer.com/article/10.1134/S1028335815060105

[5] Kovalenko M.D., Men'shova I.V., Shulyakovskaya T.D. Expansions in Fadle — Papkovich functions: Examples of solutions in a half-strip. *Mechanics of Solids*, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 584–602. DOI: 10.3103/S0025654413050154
Available at: http://link.springer.com/article/10.3103/S0025654413050154

[6] Kovalenko M.D., Shulyakovskaya T.D. Expansion in Fadle — Papkovich functions in a strip. Theory foundations. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 721–738.
DOI: 10.3103/S0025654411050074
Available at: http://link.springer.com/article/10.3103/S0025654411050074

[7] Gol'denblat I.I. Nelineynye problemy teorii uprugosti [Nonlinear problems of elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 336 p.

[8] Kasahara K. Earthquake mechanics. Cambridge Univ. Press, 1981. 265 p.

[9] Slepyan L.I. Mekhanika treshchin [Cracks mechanics]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1990. 296 p.

[10] Sebryakov G.G., Kovalenko M.D., Men'shova I.V., Shulyakovskaya T.D. An odd-symmetric boundary-value problem for a semistrip with longitudinal rigidity ribs. Biorthogonal sets of functions and Lagrange expansions. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61, no. 5, pp. 247–251.
DOI: 10.1134/S1028335816050116
Available at: http://link.springer.com/article/10.1134/S1028335816050116

[11] Sherman D.I. On one problem of elasticity theory. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1940, vol. 27, no. 9, pp. 907–913 (in Russ.).

[12] Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti [Some basic problems of mathematical elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 635 p.

Kovalenko M.D. — Dr. Sc. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Laboratory of Geodynamics, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences (IEPT RAS) (Profsoyuznaya ul. 84/32, Moscow, 117997 Russian Federation).

Men'shova I.V. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Laboratory of Geodynamics, Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences (IEPT RAS) (Profsoyuznaya ul. 84/32, Moscow, 117997 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Kovalenko M.D., Men'shova I.V. On Features of Exact Solutions of Boundary Value Problems of Elasticity Theory in the Semi-Strip. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 4, pp. 52–64. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-4-52-64