

## ВЛИЯНИЕ СКАЧКООБРАЗНОГО ИЗМЕНЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТЕЧЕНИЕ БИНГАМОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ МГД-КАНАЛЕ

В.И. Вишняков

С.М. Вишнякова

П.В. Дружинин

sofvish@mail.ru

druzhinine@mail.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

---

### Аннотация

Предложен метод расчета нестационарных течений проводящих бингамовских жидкостей в МГД-канале. Метод основан на возможности раздельного описания течений в вязкой и пластической зонах. Течение такой жидкости рассмотрено в плоском МГД-канале в поперечном однородном магнитном поле. Получено точное уравнение, описывающее зависимость положения границы зоны пластического течения от времени при скачкообразном изменении внешнего магнитного поля. Для некоторых значений параметров выполнено численное интегрирование уравнения. Результаты представлены в виде графиков

### Ключевые слова

*Реология, бингамовская проводящая жидкость, плоский канал, магнитное поле*

Поступила в редакцию 20.06.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

---

В настоящее время все большее внимание уделяется изучению течения жидких сред, описываемых реологическим законом, более сложным по сравнению с законом, описывающим обычную «классическую» вязкую жидкость [1–3]. Для применения новых магнитореологических жидкостей при создании различных устройств важно знать влияние магнитного поля на характер движения таких жидкостей. Например, учет магнитных свойств жидкости при ее движении необходим при проектировании и расчете бетонных отделочных машин с магнитным активатором, магнитных амортизаторов, магнитореологических дросселей и т. д. [4, 5].

В настоящей работе при изучении движения жидкости за основу теоретических построений и расчетов принята реологическая модель, в одномерном случае описываемая законом

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign} \frac{du}{dz} + \eta \frac{du}{dz}, \quad (1)$$

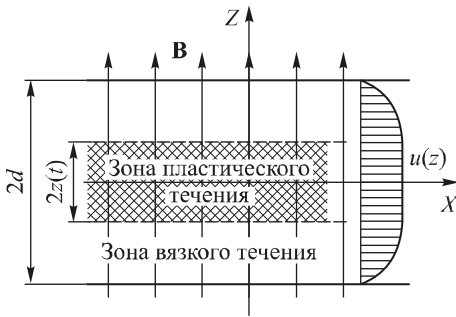
где  $\tau$  — касательное напряжение сдвига;  $\tau_0$  — его предельное значение (касательное напряжение сдвига «в покое»);  $\frac{du}{dz}$  — проекция градиента скорости на

направление, перпендикулярное движению жидкости;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости. Жидкости, описываемые законом (1), называются бингамовскими, или вязкопластическими. Эта модель успешно применяется как в классической, так и в магнитной гидродинамике [6–8]. При течении таких жидкостей в каналах возможно образование двух зон течения: 1) зоны вязкого течения, когда  $\tau > \tau_0$ ; 2) зоны пластического течения, когда  $\tau < \tau_0$ .

Общая картина течения получается из решений уравнений движения жидкости в указанных зонах с учетом соответствующих условий на границе раздела зон [6], что позволяет рассматривать движение в каждой зоне отдельно.

Далее рассмотрена задача о влиянии скачкообразного изменения внешнего магнитного поля на ширину зоны пластического течения в бесконечном плоском канале. Необходимость решения подобной задачи связана с тем, что при резком возрастании магнитного поля зона пластического течения может заполнить большую часть канала (или весь канал), создав тем самым пробку.

Постановка задачи о движении магнитопроводящей жидкости в плоском канале аналогична постановке известной задачи Гартмана [9].



**Рис. 1.** Схема течения магнитопроводящей жидкости в плоском канале при наличии поперечного магнитного поля

Схема течения жидкости приведена на рис. 1, где направление течения совпадает с осью  $X$ , координата  $z$  отсчитывается от середины канала шириной  $2d$ . Граница, положение которой задается функцией  $z(t)$ , разделяет зону вязкого течения и зону пластического течения. Вектор индукции внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$  направлен вдоль оси  $Z$ .

Нестационарное уравнение движения, записанное ранее для зоны пластического течения [8], в таком случае имеет вид

$$\rho \frac{du}{dt} = P - \frac{\tau_0}{z} - \sigma B^2 u. \quad (2)$$

Здесь  $z = z(t)$  — уравнение границы раздела зон;  $\rho$  — плотность жидкости, предполагаемая постоянной;  $u = u(t)$  — скорость жидкости в канале;  $P$  — постоянный градиент давления;  $\sigma$  — проводимость жидкости.

Приняв в качестве характерных параметров безразмерные комбинации ранее рассмотренных физических величин  $\tilde{z} = \frac{z}{d}$ ,  $V = u \frac{\eta}{Pd^2}$ ,  $\tilde{t} = \frac{\eta}{\rho d^2} t$ ,  $S = \frac{\tau_0}{Pd}$  (параметр Сен-Венана),  $H = Bd \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$  (критерий Гартмана), запишем уравнение (2) в безразмерной форме:

$$\frac{dV}{d\tilde{t}} = 1 - \frac{S}{\tilde{z}} - H^2 V. \quad (3)$$

Уравнение (3) содержит две неизвестные функции  $V(\tilde{t})$  и  $\tilde{z}(\tilde{t})$ , которые не являются полностью независимыми [8]. В качестве зависимости, связывающей функции  $\tilde{z}(\tilde{t})$  и  $V(\tilde{t})$ , возьмем выражение для скорости движения зоны пластического течения, приведенное в работе [9]:

$$V = \frac{1}{H^2} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(H(1-\tilde{z}))} \right). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем уравнение

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} = \frac{H}{\operatorname{th}(H(1-\tilde{z}))} \left( \frac{S}{\tilde{z}} \operatorname{ch}(H(1-\tilde{z})) - 1 \right), \quad (5)$$

определяющее зависимость положения границы зоны пластического течения  $\tilde{z}(\tilde{t})$  от времени при заданном начальном условии (начальном положении границы)  $\tilde{z}(0) = \tilde{z}_0$ . С помощью уравнения (5) можно исследовать процесс изменения границы зоны пластического течения  $\tilde{z}(\tilde{t})$  в результате воздействия скачкообразно (внезапно) изменившегося магнитного поля, при котором параметр Гартмана скачкообразно увеличивается от  $H_0$  до  $H$ .

Исходное положение границы зоны пластического течения  $\tilde{z}(0) = \tilde{z}_0$  в начальный момент времени, соответствующее предшествующему стационарному состоянию при  $H = H_0$ , можно найти из (2), если приравнять нулю правую часть — сумму действующих сил — и перейти к указанным выше безразмерным параметрам.

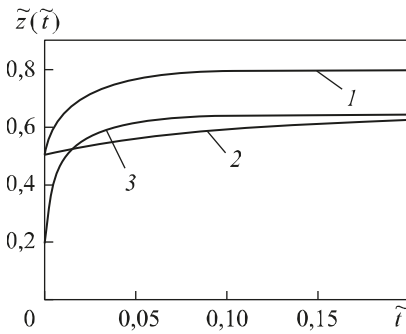
В результате получим уравнение

$$\tilde{z}_0 = S \operatorname{ch}(H_0(1-\tilde{z}_0)),$$

решение которого находилось графическим способом. Например, при  $H_0 = 0,4$  и  $S = 0,2$   $\tilde{z}_0 = 0,54$ .

Для определения характера зависимости  $\tilde{z}(\tilde{t})$  было выполнено численное решение уравнения (5) методом Рунге — Кутты четвертого порядка и методом «прогноз-коррекция» (прогноз по Адамсу — Башфорту, коррекция по Адамсу — Мултону, значение первых шести точек вычисляются методом Рунге — Кутты четвертого порядка) [10] при начальном условии  $\tilde{z}(0) = \tilde{z}_0$ . При этом шаг интегрирования одношаговых методов  $\Delta\tilde{t}$ , зависящий от значений правой части, выбран из условия  $\left| \frac{f(0, y_0)\Delta\tilde{t}}{y_0} \right| < 1\%$  и принят равным 0,001.

Результаты расчетов зависимости  $\tilde{z}(\tilde{t})$  для некоторых значений параметров  $S$  и  $H$  представлены на рис. 2 в виде графиков, по которым можно судить о характере изменения границы зон с течением времени.



**Рис. 2.** Графики функции  $\tilde{z}(\tilde{t})$  при начальном условии  $H_0 = 0,2$  и различных значениях параметров  $H$  и  $S$ :

1 —  $\tilde{z}_0 = 0,5, H = 5, S = 0,5$ ; 2 —  $\tilde{z}_0 = 0,5, H = 2, S = 0,5$ ; 3 —  $\tilde{z}_0 = 0,2, H = 5, S = 0,2$

**Заключение.** Возможность независимого рассмотрения течения бингамовских жидкостей в вязкой и пластической зонах в плоском МГД-канале позволила определить положение границы между зонами при скачкообразно изменившемся внешнем магнитном поле. Получено точное уравнение, определяющее зависимость ширины зоны пластического течения от времени при различных значениях индукции внешнего магнитного поля. Для выявления характера искомой зависимости было выполнено численное интегрирование уравнения для некоторых значений параметров. Результаты представлены в виде графиков. Исследования показывают, что при внезапном возрастании магнитного поля происходит резкое увеличение ширины зоны пластического течения за достаточно короткий промежуток времени, но переходный процесс к новому стационарному состоянию завершается за бесконечное время. Аналогичные процессы наблюдаются при скачкообразном изменении градиента давления при отсутствии магнитного поля (см. работы [6–8]). Предложенный метод может быть применен для определения положения границы зоны пластического течения в случае скачкообразного уменьшения индукции внешнего магнитного поля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Борзенко Е.Н., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Течение неньютоновской жидкости со свободной поверхностью при заполнении круглой трубы // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 2. С. 53–60.  
URL: <http://www.sibran.ru/upload/iblock/978/97892fed684fa44e39791195f5bb3767.pdf>
2. Булгаков В.К., Липатов А.М., Чехонин К.А., Иванов О.Н. Моделирование течений неньютоновских жидкостей, имеющих предел текучести // Механика композиционных материалов. 1988. № 6. С. 1112–1116.
3. Бегун А.С., Буренин А.А., Жилин С.Г., Ковтанюк Л.В. Об учете упругих свойств вязкопластической смазки между соосными вращающимися цилиндрами // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 2. С. 146–158.  
DOI: 10.15372/PMTF20150215  
URL: [http://sibran.ru/journals/issue.php?ID=164296&ARTICLE\\_ID=164311](http://sibran.ru/journals/issue.php?ID=164296&ARTICLE_ID=164311)
4. Борин Д.Ю., Михайлов В.П., Базиненков А.М. Моделирование магнитореологического дросселя модуля линейных сверхточных перемещений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2007. № 4. С. 58–71.

5. Генин Л.Г., Свиридов В.Г. Гидродинамика и теплообмен МГД-течений в каналах. М.: Изд-во МЭИ, 2001. 200 с.
6. Гноевой А.В., Климов Д.М., Чесноков В.М. Основы теории течений бингамовских сред. М.: Физматлит, 2014. 272 с.
7. Кирко И.М., Кирко Г.Е. Магнитная гидродинамика. Современное видение проблем. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», ИКИ, 2009. 632 с.
8. Вишняков В.И., Покровский Л.Д. К теории нестационарных течений вязкопластических сред // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 8.  
DOI: 10.18698/2308-6033-2013-8-876  
URL: <http://engjournal.ru/catalog/fundamentals/physics/876.html>
9. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 668 с.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / пер. с англ.; под общей ред. И.Г. Арамановича. М.: Наука, 2003. 832 с.

**Вишняков Виктор Ильич** — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Вишнякова Софья Михайловна** — старший преподаватель кафедры «Физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Дружинин Павел Владимирович** — старший преподаватель кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

#### **Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Вишняков В.И., Вишнякова С.М., Дружинин П.В. Влияние скачкообразного изменения магнитного поля на течение бингамовской жидкости в плоском МГД-канале // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 3. С. 17–23.  
DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-17-23

## **THE EFFECT OF AN ABRUPT CHANGE IN THE MAGNETIC FIELD ON BINGHAM FLUID FLOW IN A FLAT MHD CHANNEL**

**V.I. Vishnyakov**

**S.M. Vishnyakova**

**P.V. Druzhinin**

[sofvish@mail.ru](mailto:sofvish@mail.ru)

[druzhinine@mail.ru](mailto:druzhinine@mail.ru)

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

---

#### **Abstract**

The study suggests a method for calculating the unsteady flow of conducting Bingham fluid in a MHD channel. The method is based on the possibility for separate descriptions of the flows in the viscous and plastic zones. The indepen-

#### **Keywords**

*Rheology, conducting Bingham fluid, flat channel, magnetic field*

dent consideration of flows in viscous and plastic zones in a flat MHD channel enables studying the behavior of the boundary between the zones when an external magnetic field is abruptly changed. We obtained the exact equation that determines the dependence of the zone width of plastic flow on the time and on magnetic field. Moreover, we performed a numerical integration of the equation for some values of parameters to identify the nature of the searched dependence and gave the results in graphs. Theoretical analysis and numerical calculations show that the sudden magnetic field increase causes a sharp increase in the zone width of plastic flow in a short time period, but the transition to the new steady state is complete in infinite time. The proposed method allows determining the position of the boundary of the plastic flow zone as a function of time in the case of an abrupt decrease in the external magnetic field induction

## REFERENCES

- [1] Borzenko E.N., Shrager G.R., Yakutenok V.A. Free-surface non-Newtonian fluid flow in a round pipe. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 190–197. DOI: 10.1134/S002189441202006X  
Available at: <http://link.springer.com/article/10.1134/S002189441202006X>
- [2] Bulgakov V.K., Lipatov A.M., Chekhonin K.A., Ivanov O.N. Simulation of non-Newtonian flow with yield limit. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov*, 1988, no. 6, pp. 1112–1116 (in Russ.).
- [3] Begun A.S., Burenin A.A., Zhilin S.G., Kovtanyuk L.V. Flow of an elastoviscoplastic material between rotating cylindrical surfaces with nonrigid cohesion. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 2, pp. 293–303. DOI: 10.1134/S0021894415020157  
Available at: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS0021894415020157>
- [4] Borin D.Yu., Mikhaylov V.P., Bazinenkov A.M. Modeling of magnetorheological actuator for module of linear super-accurate displacements. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mechan. Eng.], 2007, no. 4, pp. 58–71 (in Russ.).
- [5] Genin L.G., Sviridov V.G. *Gidrodinamika i teploobmen MGD-techeniy v kanalakh* [Hydrodynamics and heat exchange of MHD flows in channels]. Moscow, MEI Publ., 2001. 200 p.
- [6] Gnoevoy A.V., Klimov D.M., Chesnokov V.M. *Osnovy teorii techeniy bingamovskikh sred* [Fundamentals of Bingham medium flows]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 272 p.
- [7] Kirko I.M., Kirko G.E. *Magnitnaya gidrodinamika. Sovremennoe videnie problem* [Magnetic hydrodynamics. Up-to-date problem view]. Moscow–Izhevsk, NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika” Publ., IKI Publ., 2009. 632 p.
- [8] Vishnyakov V.I., Pokrovskiy L.D. On the theory of nonstationary visco-plastic media flow. *Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering Journal: Science and Innovation], 2013, no. 8 (in Russ.). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-8-876  
Available at: <http://engjournal.ru/eng/catalog/fundamentals/physics/876.html>

[9] Vatazhin A.B., Lyubimov G.A., Regirer S.A. *Magnitogidrodinamicheskie techeniya v kanalakakh* [Magnetohydrodynamic flows in channels]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 668 p.

[10] Korn G., Korn T. *Mathematical handbook for scientists and engineers*. New York, McGraw Hill Book Company, 1961. 943 p.

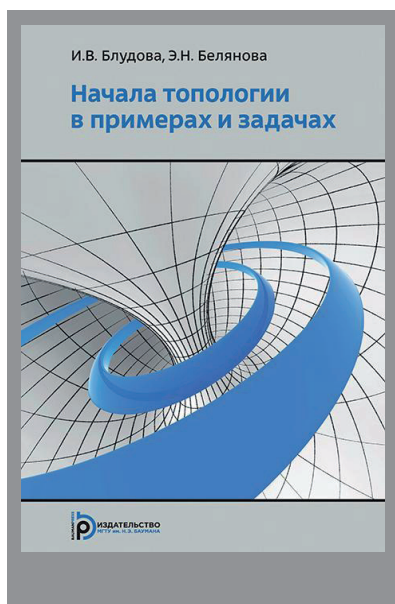
**Vishnyakov V.I.** — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Vishnyakova S.M.** — Assist. Professor of Physics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Druzhinin P.V.** — Assist. Professor of Applied Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Vishnyakov V.I., Vishnyakova S.M., Druzhinin P.V. The Effect of an Abrupt Change in the Magnetic Field on Bingham Fluid Flow in a Flat MHD Channel. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 3, pp. 17–23. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-17-23



В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана  
вышло в свет учебное пособие авторов  
**И.В. Блудовой, Э.Н. Беляновой**

**«Начала топологии в примерах  
и задачах»**

Рассмотрены различные классические примеры топологических и метрических пространств и непрерывных отображений, сформулированы все необходимые топологические определения и утверждения. Читателям предложено самостоятельно доказать некоторые свойства указанных выше топологических и метрических пространств, а в случае недостаточной успешности попыток получить эти доказательства — узнать подробные решения предложенных задач.

**По вопросам приобретения обращайтесь:**

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1  
+7 (499) 263-60-45  
press@bmstu.ru  
www.baumanpress.ru