

В. Г. П р о к о п е н к о

## ХАОТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В АВТОСТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ГЛАДКОЙ МНОГОСЕГМЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

*Рассмотрено изменение свойств хаотических колебаний в автономных автостохастических системах обыкновенных дифференциальных уравнений с многосегментной нелинейностью при плавном переходе от кусочно-линейных функций к аппроксимирующим их гладким зависимостям. Приведены три типа гладких функций, позволяющих аппроксимировать кусочно-линейные зависимости со сколь угодно высокой точностью. Отмечается отсутствие качественных изменений при переходе от кусочно-линейных нелинейных функций к их гладким аналогам в автономных автостохастических системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Изменение характеристик движения происходят постепенно, в соответствии с мерой отклонения гладкой аппроксимирующей функции от кусочно-линейного прототипа.*

**E-mail: vadipro@yandex.ru**

**Ключевые слова:** автономная автостохастическая система, хаотический аттрактор, композиционный мультиаттрактор, редуцирующий оператор, многосегментная нелинейность, аппроксимация кусочно-линейных функций.

В настоящее время исследовано большое число различных моделей автономных автостохастических систем [1–18]. Во многих из них (в частности, в тех, которые описывают физически реализуемые устройства, [1, 4, 6, 11–18]) нелинейность системы аппроксимируется кусочно-линейной функцией. Так как практическая реализация идеальных кусочно-линейных зависимостей невозможна, некоторые авторы также сравнивали поведение известных автостохастических систем при аппроксимации их нелинейностей кусочно-линейными и гладкими зависимостями [19], однако при этом использовали гладкие функции, которые повторяли кусочно-линейную функцию только в общих чертах. Задача исследования плавного перехода между ними не ставилась.

В связи с тем, что динамические системы с хаотическим поведением отличаются чрезвычайно высокой чувствительностью к любому изменению их параметров, представляет интерес исследование изменения свойств колебаний, генерируемых такими системами именно при постепенном, плавном переходе от идеализированных кусочно-линейных зависимостей к их сглаженным аналогам.

Поскольку последствия такого перехода наиболее заметны в системах со сложной нелинейностью, параметры которой непосредственно задают основные геометрические характеристики хаотических ат-

тракторов, рассмотрим данный вопрос на примере автономных автостохастических динамических систем с многосегментной нелинейностью [20–24].

**Аппроксимация кусочно-линейных зависимостей гладкими функциями.** Математическое описание кусочно-линейных многосегментных функций и их сглаженных аналогов может быть самым разным. Однако поскольку интерес представляют не сами функции, а их приложение к исследованию динамических систем, рассмотрим наиболее компактные способы представления однозначных функций такого типа.

Для описания регулярной многосегментной функции удобно использовать выражение [20, 21]

$$S(x) = bx + \frac{a - b}{2} \times \left[ -P(x) + \sum_{m=1}^M [P(x + mc) - 1] + \sum_{n=1}^N [P(x - nc) + 1] \right], \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  — коэффициенты, определяющие наклон линейных сегментов функции,  $a$  — наклон среднего, проходящего через начало координат, сегмента и всех параллельных ему сегментов,  $b$  — наклон остальных сегментов;  $c = 2 \frac{a - b}{1 - b}$ ;  $P(x) = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{2}$  (рис. 1, а).

Кусочно-линейную функцию общего вида с произвольно расположенными линейными сегментами, имеющими неодинаковый наклон (рис. 1, б), можно представить компактным выражением

$$f(x) = ax + \sum_{k=1}^M (b_k - b_{k-1}) Pb(x - \delta_k) + \sum_{k=1}^N (c_k - c_{k-1}) Pc(x - \gamma_k), \quad (2)$$

где  $a$ ,  $b_k$  и  $c_k$  — коэффициенты, определяющие наклон среднего, проходящего через начало координат, и боковых сегментов, причем  $b_0 = c_0 = a$ ;  $\delta_k$  и  $\gamma_k$  — коэффициенты, задающие положение границ между сегментами функции  $f(x)$ ;  $Pb(x) = \frac{x + |x|}{2}$ ;  $Pc(x) = \frac{x - |x|}{2}$  (см. рис. 1, а).

Функции (1) и (2) представляют собой суперпозицию одинаковых элементарных нелинейностей, суммируемых с разными весами. Поэтому для построения гладких аналогов данных функций достаточно заменить в выражениях (1), (2) кусочно-линейные зависимости  $P(x)$ ,  $Pb(x)$ ,  $Pc(x)$  аппроксимирующими их гладкими кривыми.

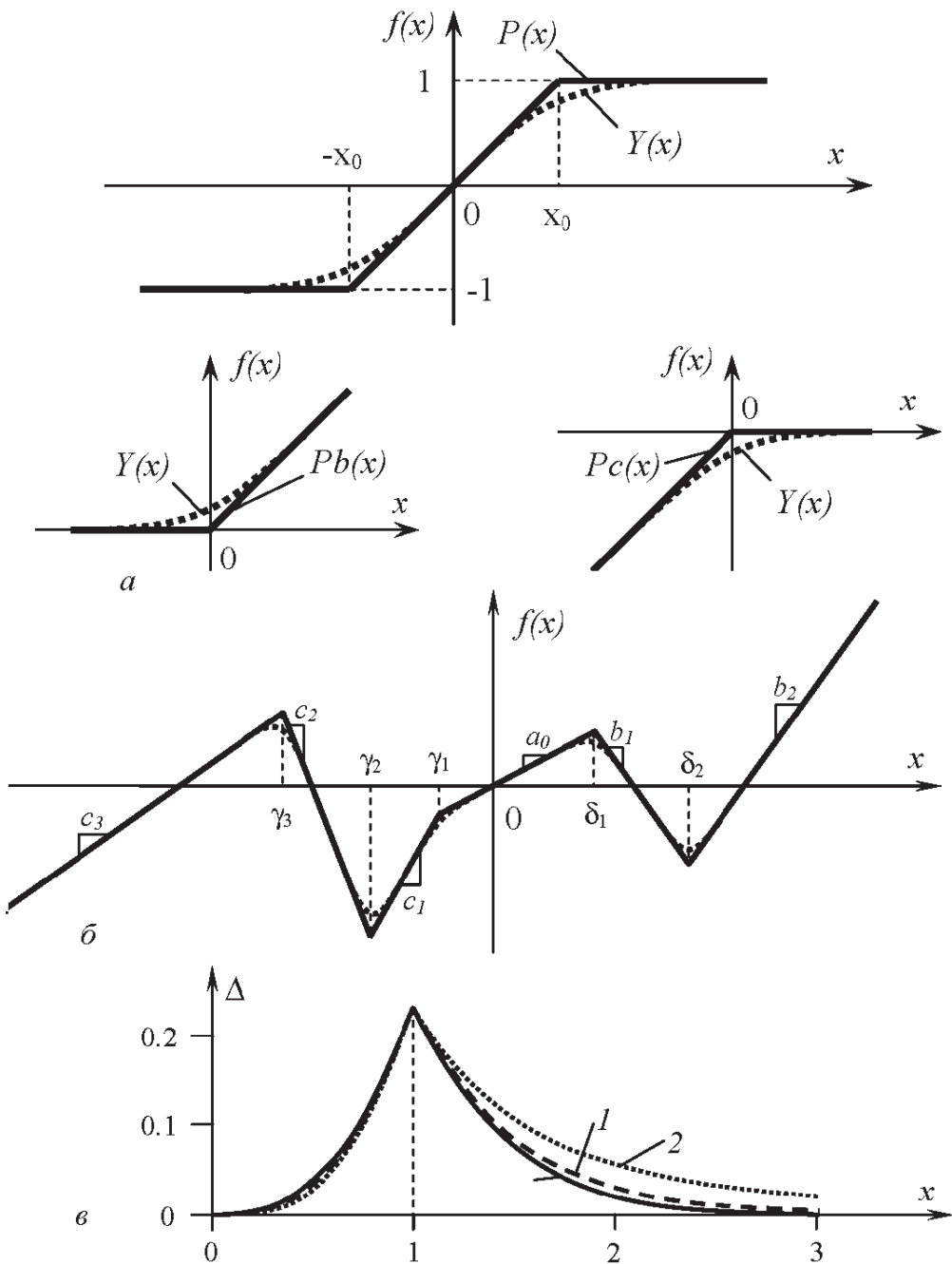


Рис. 1. Элементарные кусочно-линейные функции и их аппроксимация гладкими функциями (а); кусочно-линейная функция с произвольным расположением линейных сегментов, имеющих различный наклон, и ее аппроксимация гладкой функцией (б); зависимость  $\Delta(x)=Y(x) - P(x)$  в окрестности точки  $x=1$  при  $\Delta_{\max}=0,225$  (в)

Вначале запишем три простейшие зависимости, являющиеся гладкими аппроксимациями симметричной функции  $P(x)$ .

1. Сглаживающая зависимость на основе показательной функции:

$$Y(x) = \frac{2x_0}{n} \operatorname{Arth} \left[ C \operatorname{th} \frac{nx}{2Cx_0} \right], \quad (3)$$

где  $C = \operatorname{th} \frac{n}{2}$ ;  $n$  – вещественное число, задающее степень близости функций  $P(x)$  и  $Y(x)$ , при увеличении абсолютной величины  $n$  точность аппроксимации неограниченно растет (соответственно степень

“сглаженности” уменьшается);  $x_0$  — коэффициент, задающий положение границ между линейными сегментами функции  $P(x)$ , для уравнения (1)  $x_0 = 1$ .

2. Сглаживающая зависимость на основе степенной функции:

$$Y(x) = \frac{x}{[1 + (x/x_0)^{2n}]^{\frac{1}{2n}}}, \quad (4)$$

где  $n$  — целое положительное число, задающее степень близости функций  $P(x)$  и  $Y(x)$ . При увеличении  $n$  точность аппроксимации неограниченно увеличивается.

3. Сглаживающая зависимость на основе функции ошибок:

$$Y(x) = \int_0^x e^{-\left(D \frac{x}{x_0}\right)^{2n}} dx, \quad (5)$$

где  $D = \int_0^\infty e^{-\xi^{2n}} d\xi = \frac{1}{2n} \Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)$ ;  $\Gamma(x)$  — гамма-функция [25];  $n$  — целое положительное число, задающее степень близости функций  $P(x)$  и  $Y(x)$ .

Асимметричные функции  $Pb(x)$  и  $Pc(x)$  аппроксимируются следующими гладкими зависимостями.

1. Сглаживающая функция на основе показательной функции:

$$Yb(x) = \frac{1}{n} \ln [1 + e^{xn}], \quad Yc(x) = -\frac{1}{n} \ln [1 + e^{-xn}]. \quad (6)$$

2. Сглаживающая функция на основе степенной функции:

$$Yb(x) = \frac{x - 1}{\left[1 + \left(\frac{x - 1 - |x - 1|}{2}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}}} + 1, \quad (7)$$

$$Yc(x) = \frac{x + 1}{\left[1 + \left(\frac{x + 1 + |x + 1|}{2}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2n}}} - 1.$$

3. Сглаживающая функция на основе функции ошибок:

$$Yb(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\left(\frac{D - \xi + |D - \xi|}{2}\right)^{2n}} d\xi, \quad (8)$$

$$Yc(x) = \int_{+\infty}^x e^{-\left(\frac{\xi + D + |\xi + D|}{2}\right)^{2n}} d\xi.$$

Степень сглаженности исходной кусочно-линейной зависимости в выражениях (6)–(8) также определяется значением коэффициента  $n$ .

Приведенные гладкие функции, аппроксимирующие кусочно-линейные функции  $P(x)$  и  $Pb(x)$ ,  $Pc(x)$ , определены на интервале  $[-\infty; +\infty]$  и всюду дифференцируемы на этом интервале. Всюду дифференцируемыми являются также первая и все старшие производные этих функций [25].

Особенности сглаживания описывает разность исходной и сглаженной зависимостей  $\Delta(x) = P(x) - Y(x)$ . Максимальное значение этой функции характеризует степень сглаживания. Симметричные функции  $P(x)$  и  $Y(x)$  максимально расходятся при  $x = \pm x_0$ , откуда  $\Delta_{\max} = P(x_0) - Y(x_0)$ . Наибольшее расхождение асимметричных функций  $Pb(x)$  и  $Yb(x)$ , а также  $Pc(x)$  и  $Yc(x)$ , имеет место при  $x = 0$ , поэтому  $\Delta_{b_{\max}} = Pb(0) - Yb(0)$ ,  $\Delta_{c_{\max}} = Pc(0) - Yc(0)$ .

Преимуществом сглаживающих выражений (3) и (6) на основе показательной функции является возможность непрерывного изменения коэффициента  $n$  на всей шкале рациональных чисел и инвариантность по отношению к знаку коэффициента  $n$ , а недостатком — незначительное изменение функции  $Y(x)$  в интервале значений  $n$  от 1 до 0, что не позволяет для функции  $P(x)$  получить  $\Delta_{\max}$  больше, чем  $\approx 0,24$ .

Главным недостатком компактных выражений (4), (5), (7) и (8) на основе степенной функции и функции ошибок является то, что в них коэффициент  $n$  может принимать лишь целые положительные значения. Однако при замене  $x^\xi$  на

$$g(x, \xi) = \begin{cases} x^\xi, & x > 0, \\ (-x)^\xi, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

они допускают непрерывное изменение положительных  $n$  и позволяют сглаживать функции  $P(x)$ ,  $Pb(x)$ ,  $Pc(x)$  вплоть до их вырождения в прямую (при  $n \rightarrow 0$ ).

Различия в характере сглаживания кусочно-линейных функций выражениями (3)–(5) хорошо видны на рис. 1, в, где показан ход зависимости  $\Delta(x)$  в окрестности стыка линейных сегментов функции  $P(x)$  при сильном сглаживании ( $\Delta_{\max} = 0,225$ ,  $n \approx 1$ ). На рис. 1, в видно, что лучше всего “сглаживает углы” аппроксимирующее выражение на основе функции ошибок: соответствующая ему зависимость  $\Delta(x)$  быстрее всего убывает при удалении от границы сегментов. От него незначительно отличается выражение на основе показательной функции 1. Наиболее широкую окрестность границы сегментов существенно изменяет аппроксимирующее выражение на основе степенной функции 2.

Использование этих сглаживающих функций позволяет исследовать изменение хаотических колебаний при переходе от исходной многосегментной кусочно-линейной функции к ее гладкому аналогу.

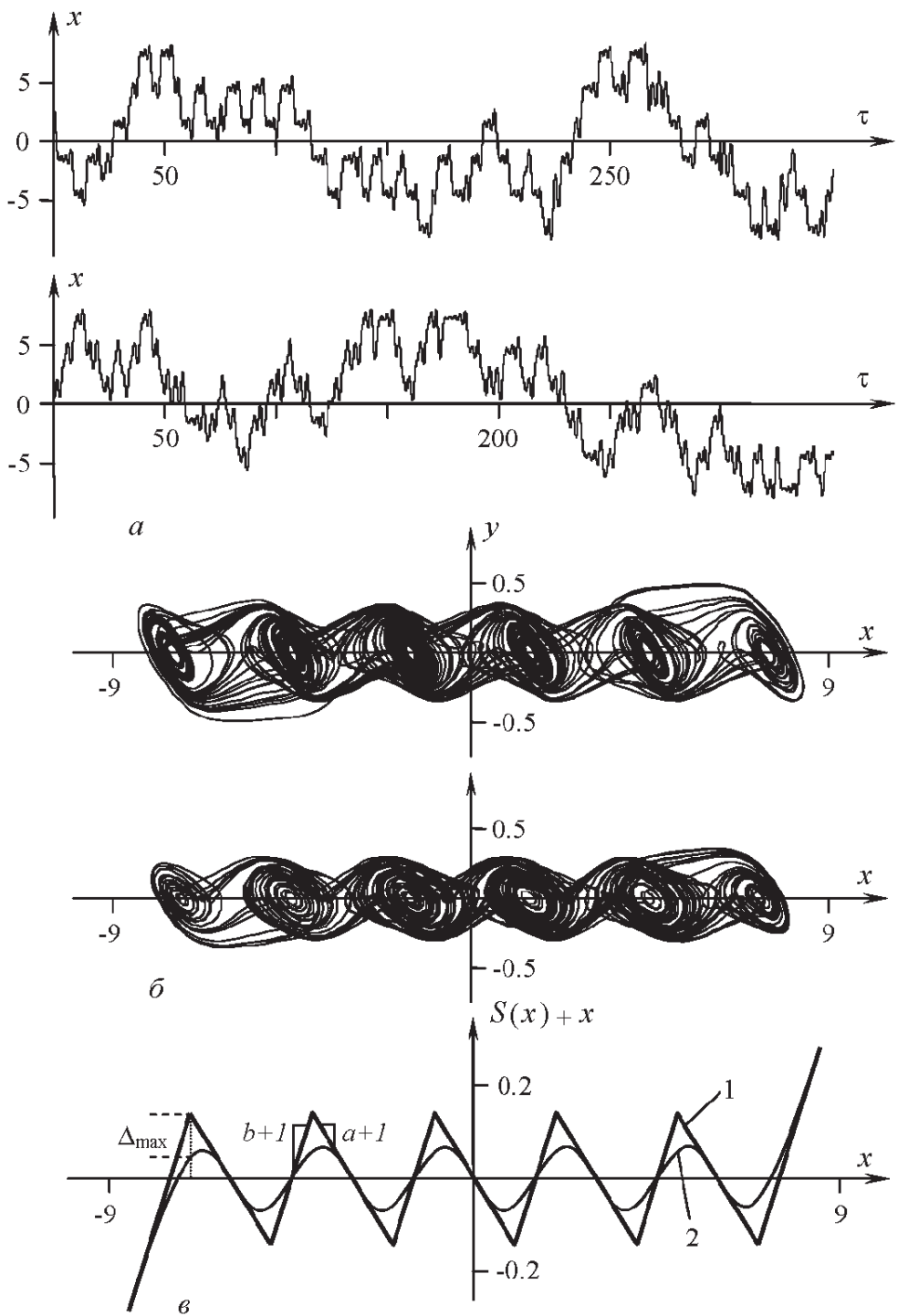
**Изменение свойств движения при постепенном переходе от кусочно-линейного представления нелинейной функции к ее сглаженному аналогу.** Проанализируем данные изменения на примере уравнений, описывающих динамику схемы Чуа и ее динамического аналога с многосегментной нелинейностью [20]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= A[y - x - S(x)]; \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - y + z; \\ \frac{dz}{d\tau} &= -By. \end{aligned} \quad (9)$$

На рис. 2 показаны примеры временной зависимости переменной  $x$  и проекции хаотического аттрактора на плоскость  $(x, y)$  в случае кусочно-линейной функции  $S(x)$  (1) при  $M = N = 2$  и ее аппроксимации выражением (3) при  $n = 1$  (рис. 2, в). Хорошо видно, что даже при таком значительном “скруглении углов” колебания и аттрактор внешне изменились мало.

Это впечатление подтверждает качественно рис. 3, на котором показано изменение области существования хаотического аттрактора, отвечающего многосегментной функции  $S(x)$  в целом, (заштрихована) в плоскости  $B = 100/7$ ,  $a = -8/7$ ,  $b = -5/7$ . Видно, что переход от кусочно-линейного представления функции  $S(x)$  к аппроксимирующей ее гладкой функции не сопровождается никакими качественными изменениями структуры этой области и состоит лишь в постепенном однонаправленном смещении ее границ по мере увеличения  $\Delta_{\max}$  (рис. 2, в). Причем пока  $\Delta_{\max}$  мало (меньше 0,1), это смещение остается весьма незначительным. Только при увеличении  $\Delta_{\max}$  до 0,35 наблюдается слияние верхней границы области существования хаотического аттрактора с верхней границей ближайшего к ней широкого периодического окна. Однако дальнейшее увеличение  $\Delta_{\max}$  вплоть до 0,53 не приводит к каким-либо новым изменениям структуры данной области.

Отсутствие качественных изменений параметров движения при переходе к гладкой нелинейной функции подтверждается также идентичностью структуры частотных спектров колебаний системы (9) при  $\Delta_{\max} = 0$  и  $\Delta_{\max} \approx 0,53$ . Основными различиями спектров является ослабление дискретных составляющих в случае гладкой нелинейности по сравнению с кусочно-линейной, что обусловлено главным образом снижением мощности колебаний вследствие уменьшения их размаха

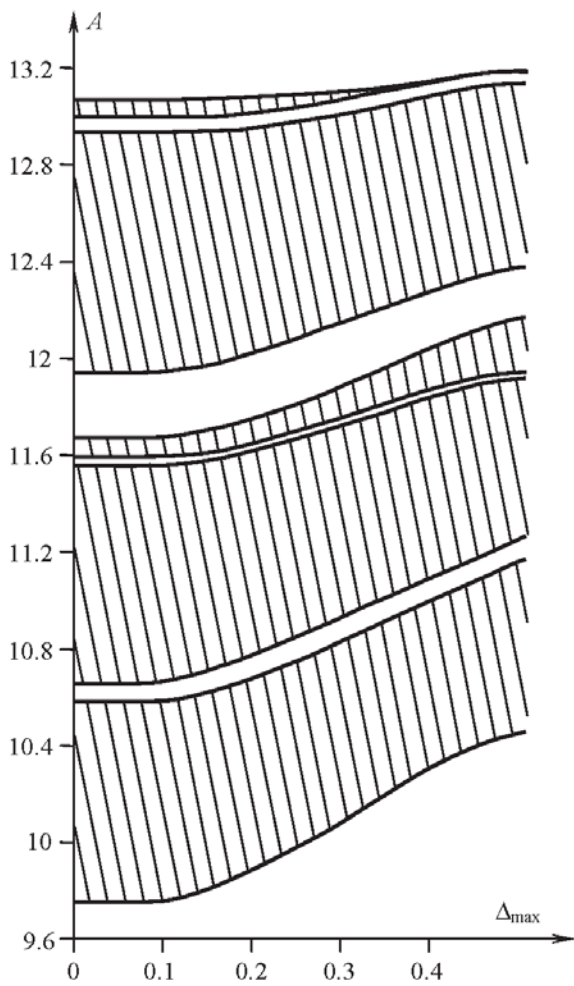


**Рис. 2.** Хаотические колебания (а) и соответствующий им аттрактор (б) в системе (9) с 7-сегментной кусочно-линейной функцией  $S(x)$  (1) и с ее гладким аналогом (2) (в):

$$A = 11, B = 100/7, a = -8/7, b = -5/7, M = N = 2, n = 1$$

при “скруглении углов” (рис. 2, в). Кроме этого, при повышении степени сглаживания наблюдается снижение спектральной плотности на частотах, превышающих основную частоту колебаний в окрестности положений равновесия, в результате уменьшения максимальных значений производных по времени переменных  $x, y, z$ .

Таким образом, наблюдающиеся отличия носят преимущественно количественный (а при малых  $\Delta_{\max}$  — только количественный)



**Рис. 3.** Изменение области параметров системы (9), в которой наблюдается устойчивый хаотический аттрактор, соответствующий многосегментной нелинейной функции  $S(x)$ , при переходе от кусочно-линейного варианта этой функции к ее гладкому аналогу и увеличению степени ее сглаживания:

$$B = 100/7, a = -8/7, b = -5/7, \\ M = N = 2, n = 1$$

хаотического аттрактора [22–24], сглаживание редуплицирующих операторов также дает постепенное (по мере увеличения сглаживания) изменение характеристик генерируемых колебаний при сохранении основных параметров и структуры объединенного аттрактора.

Рассмотрим влияние сглаживания на примере мультиаттрактора, образованного объединением хаотического аттрактора системы (9), наблюдающегося при  $A = 9,4$ ,  $B = 15$ ,  $a = -2,6$ ,  $b = -0,4$ ,  $M = 1$ ,  $N = 0$ , с его копиями, полученными редупликацией этого аттрактора по координате  $y$ , т.е. при замене в этих уравнениях переменной  $y$  редуплицирующей функцией (оператором)  $H(y)$  [22] (рис. 4, а):

характер и сводятся в основном к смещению границ области значений констант уравнений (9), соответствующих устойчивому существованию хаотических колебаний.

Отметим, что показанные на рис. 2, 3 результаты воспроизводятся при использовании всех трех приведенных здесь вариантов аппроксимации кусочно-линейных функций.

Аналогичная картина при переходе от кусочно-линейных многосегментных нелинейностей к гладким наблюдается также в случае других автономных автостохастических систем, в том числе существенно отличающихся от системы (9) по механизму возникновения хаотического движения и его основным характеристикам, например, в уравнениях, описывающих многосегментные варианты схем с отрицательной емкостью и отрицательной индуктивностью [26, 27] (см. рис. 3), а также в случае генераторов гиперхаотических колебаний [28].

При построении композиционных мультиаттракторов, объединяющих несколько копий исходного



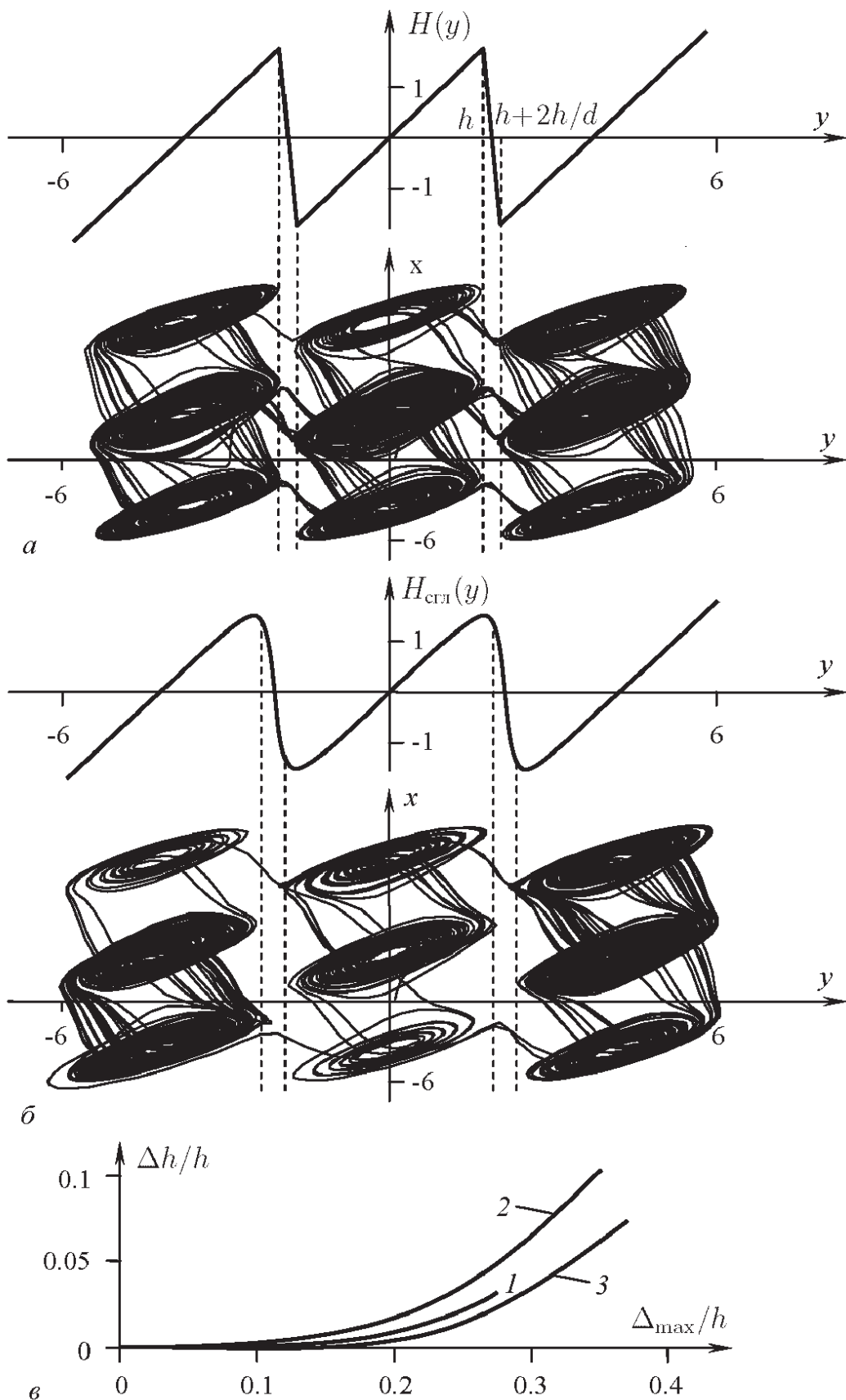


Рис. 4. Композиционный хаотический мультиаттрактор в системе (11) с 5-сегментной сглаженной функцией  $S(x)$  в случае кусочно-линейной (а) и гладкой (б) редуцирующих функций; зависимость приращения максимального значения коэффициента  $h$  от степени сглаживания функции  $H(y)$  (в)

$$H(y) = y + (d + 1) \left\{ P \left( y + s + h + \frac{h}{d} \right) + P \left( y + s - h - \frac{h}{d} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{M1} \left\{ P \left[ y + s - (2m - 1) \left( h + \frac{h}{d} \right) \right] + \frac{h}{d} \right\} - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{N1} \left\{ P \left[ y + s + (2n - 1) \left( h + \frac{h}{d} \right) \right] - \frac{h}{d} \right\} \right\}, \quad (10)$$

где  $P(\xi) = \frac{1}{2} \left( \left| \xi + \frac{h}{d} \right| - \left| \xi - \frac{h}{d} \right| \right)$ ;  $d, h$  и  $s$  — вещественные коэффициенты, причем  $d \gg 1$ ;  $M1, N1$  — целые неотрицательные числа. После этого система (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= A [H(y) - x - S(x)]; \\ \frac{dy}{d\tau} &= x - H(y) + z; \\ \frac{dz}{d\tau} &= -BH(y). \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы получить сглаженный аналог функции  $H(y)$  необходимо в уравнении (10) заменить кусочно-линейную функцию  $P(y)$  гладкой функцией  $Y(y)$  в соответствии с одним из уравнений (3)–(5), заменив переменную  $x$  переменной  $y$  и положив  $x_0 = \frac{h}{d}$ . Например, при использовании аппроксимирующего выражения (3) гладкий аналог функции (10) имеет вид

$$H_{\text{сгл}}(y) = y + (d + 1) \left\{ Y \left( y + s + h + \frac{h}{d} \right) + Y \left( y + s - h - \frac{h}{d} \right) - \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{M1} \left\{ Y \left[ y + s - (2m - 1) \left( h + \frac{h}{d} \right) \right] + \frac{h}{d} \right\} - \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{N1} \left\{ Y \left[ y + s + (2n - 1) \left( h + \frac{h}{d} \right) \right] - \frac{h}{d} \right\} \right\}, \quad (12)$$

где  $Y(\xi) = \frac{2(h/d)}{n} \text{Arth} \left[ C \text{th} \frac{n\xi}{2Ch/d} \right]$ .

На рис. 4, *a* и *б* показаны мультиаттракторы, соответствующие кусочно-линейной ( $H(y)$ ) и сглаженной ( $H_{\text{сгл}}(y)$ ) функциям при  $M1 = N1 = 1, d = 10, s = 0$ . Функция  $S(x)$  в обоих случаях сглаженная ( $n = 1$ ). Для сглаживания функций  $S(x)$  и  $H(y)$  использованы аппроксимирующие выражения на основе показательной функции.

В случае применения кусочно-линейных редуцирующих операторов фазовое пространство внутри ячеек, содержащих локальные

аттракторы, остается линейным. Поэтому все локальные хаотические аттракторы являются практически точными копиями аттрактора исходной динамической системы. При сглаживании редуплицирующей функции вблизи границ ячеек фазового пространства появляются зоны сильной нелинейности, причем границы перехода фазовых траекторий из одной ячейки в другую располагаются внутри этих зон. В результате периферийные области всех локальных аттракторов оказываются расположенными в зонах существенной нелинейности по переменной редупликации (в данном случае по  $y$ ), что изменяет динамику исходной системы и, соответственно, параметры аттракторов внутри ячеек, в частности их протяженность по данной переменной.

Вследствие этого появляется зависимость максимального значения константы  $h$  (она задает необходимый размер ячеек фазового пространства по переменной редупликации) от степени сглаживания редуплицирующей функции (рис. 4, в). Эта зависимость наиболее заметна при использовании аппроксимирующего выражения на основе степенной функции и минимальна в случае сглаживания оператора  $H(y)$  выражением на основе функции ошибок, что объясняется различной протяженностью зон сильной нелинейности в окрестностях границ ячеек фазового пространства. Для функции ошибок она минимальна, для степенной функции — наиболее велика (см. рис. 1, в).

Из рис. 4, в следует, что даже при весьма существенном сглаживании редуплицирующей функции, соответствующем  $\Delta_{\max}/h = 0,1$ , относительное увеличение размеров ячеек фазового пространства составляет около 0,5 % для степенной функции, а для показательной функции и функции ошибок оно менее 0,1 %. Изменение конфигурации области существования хаотических колебаний аналогично ее изменению при сглаживании функции  $S(x)$ . Относительное смещение границ этой области имеет порядок  $\Delta h/h$ . Структура мультиаттрактора полностью сохраняется. Из рис. 4, в также следует, что объединенный хаотический мультиаттрактор, соответствующий уравнениям (9), (10), сохраняет устойчивость при очень сильном сглаживании редуплицирующей функции (по крайней мере до  $\Delta_{\max}/h = 0,35$ ), когда относительное увеличение размеров ячеек фазового пространства, содержащих локальные аттракторы, превышает 10 %.

**Заключение.** Выражения (3)–(8) при подстановке в уравнения кусочно-линейных функций (1), (2), (7) позволяют осуществлять плавный переход к их гладким аналогам. Степень сглаживания можно точно задавать выбором значения коэффициента  $n$ . Эти свойства аппроксимирующих выражений (3)–(8) дают возможность исследовать изменение характеристик различных динамических систем при постепенном переходе от кусочно-линейных аппроксимаций нелинейных членов уравнений к гладким.

Исследование такого перехода на примере рассмотренной автономной автостохастической системы обыкновенных дифференциальных уравнений с многосегментной нелинейностью показывает, что изменение характеристик движения происходит постепенно, без качественных скачков, в соответствии с мерой отклонения гладкой аппроксимирующей функции от кусочно-линейного прототипа.

При этом способ математического представления сглаживающих выражений не оказывает сколько-нибудь существенного влияния на характер изменения свойств колебаний при переходе от кусочно-линейного представления нелинейной функции к ее гладкому аналогу. Это показывает принципиальную возможность распространения большинства результатов исследований автостохастических систем рассмотренного типа, выполненных с использованием моделей, содержащих нелинейные функции в форме кусочно-линейных зависимостей с разрывными производными, на случай систем с гладкими всюду дифференцируемыми нелинейными функциями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П и к о в с к и й А. С., Р а б и н о в и ч М. И. Простой генератор со стохастическим поведением // Докл. АН. – 1978. – Т. 239. – № 2. – С. 301–304.
2. Ш а х т а р и н Б. И., К о б ы л к и н а П. И. и др. Генераторы хаотических колебаний. – М.: Гелиос АРВ, 2007. – 247 с.
3. К а п р а н о в М. В., Т о м а ш е в с к и й А. И. Регулярная и хаотическая динамика нелинейных систем с дискретным временем. – М.: Изд-во МЭИ, 2010. – 256 с.
4. К и я ш к о С. В., П и к о в с к и й А. С., Р а б и н о в и ч С. В. Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // Радиотехника и электроника. – 1980. – № 2. – С. 336–343.
5. Д м и т р и е в А. С., К и с л о в В. Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. – М.: Наука, 1989. – 280 с.
6. Д м и т р и е в А. С., П а н а с А. И. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. – Физматлит АНО, 2002. – 252 с.
7. А н и щ е н к о В. С. Сложные колебания в простых системах. – М: Наука, 1990. – 312 с.
8. А н и щ е н к о В. С., В л а д и в а с о в а Т. Е., А с т а х о в В. В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999. – 368 с.
9. А н и щ е н к о В. С., А с т а х о в В. В., В л а д и в а с о в а Т. Е. Регулярные и хаотические колебания. – Интеллект, 2009. – 312 с.
10. Н е й м а р к Ю. И., Л а н д а П. С. Стохастические и хаотические колебания. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
11. C h u a ' s Circuit: A paradigm for chaos // World Scientific, 1993. – Series B. – Vol. 1. – 1085 с.
12. C h u a L. O., G u i - N i a n L i n. Canonical realization of Chua's circuit family // IEEE Transactions on circuits and systems. – July 1990. – Vol. 37, no. 7. – P. 885–902.
13. М а ц у м о т о Т. Хаос в электронных схемах // ТИИЭР. – Август 1987. – Т. 75. – № 8. – С. 66–87.

14. Андрушкевич А. В. и др. Путь к хаосу в кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 1993. – Т. 1. – № 1, 2. – С. 93.
15. Кипчатов А. А., Короновский А. А. Тонкие эффекты самоподобного поведения кусочно-линейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 1997. – Т. 5. – № 2. – С. 17.
16. Кузьмин Л. В., Максимов Н. А., Панас А. И. Прецизионный генератор хаотических колебаний с кусочно-линейной характеристикой нелинейного элемента // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 1999. – Т. 7. – № 2, 3. – С. 81–94.
17. Namajunas A., Tamasevicius A. Modified wien-bridge oscillator for chaos // Electronics Letters. – March 1995. – V. 31, no. 5. – P. 335–337.
18. Волковский А. Р. Хаотический релаксационный генератор // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 1994. – Т. 2. – № 2. – С. 49–56.
19. Егоров Е. Н., Короновский А. А. Сравнение динамики радиофизической системы “Токус” в случае гладкой и кусочно-линейной вольт-амперной характеристики // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 2002. – Т. 10. – № 1–2. – С. 104–112.
20. Прокопенко В. Г. Динамический аналог схемы Чуа с многосегментной нелинейностью // Докл. акад. наук. – 2004. – Т. 396. – № 3. – С. 317–323.
21. Прокопенко В. Г. Спектр Фурье хаотических колебаний в автономных автостохастических системах с многосегментной нелинейностью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2010. – № 1. – С. 47–56.
22. Прокопенко В. Г. Статистические характеристики хаотических колебаний в автостохастических системах с многосегментной нелинейностью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2010. – № 4. – С. 106–119.
23. Пат. РФ 2403672. Генератор хаотических колебаний / Прокопенко В.Г. Опубл. 2010, БИПМ № 31.
24. Пат. РФ 2421877. Генератор хаотических колебаний / Прокопенко В.Г. Опубл. 2011, БИПМ № 10.
25. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
26. Пат. РФ 2208898. Генератор хаотических колебаний / Прокопенко В.Г. Опубл. 2003, БИПМ № 20.
27. Пат. РФ 2209503. Генератор хаотических колебаний / Прокопенко В.Г. Опубл. 2003, БИПМ № 21.
28. Пат. РФ 2207708. Генератор гиперхаотических колебаний / Прокопенко В.Г. Опубл. 2003, БИПМ № 18.

Статья поступила в редакцию 3.06.2010

Вадим Георгиевич Прокопенко — ведущий конструктор НКБ “Миус” Южного Федерального Университета, канд. техн. наук. Автор более 100 научных работ в области теории автономных автостохастических систем, полупроводниковой электроники, высокостабильных источников опорной частоты.

V.G. Prokopenko — Ph. D. (Eng.), leading designer of the design bureau “Mius” of the Taganrog State Radio Engineering University. Author of more than 100 publications in the field of the theory of independent auto stochastic systems, semiconductor electronics, highly-stable sources of basic frequency.

