

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ АЛЬФВЕНОВСКОЙ ВОЛНЫ ДИССИПАТИВНОЙ ПЛАЗМОЙ

М.Б. Гавриков^{1,2}А.А. Таюрский¹

nadya_p@cognitive.ru

tayurskiy2001@mail.ru

¹ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация² МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Предложенная математическая модель затухания альфвеновской волны позволяет, в частности, объяснить аномальный нагрев солнечной короны альфвеновскими волнами, генерируемыми в нижних, значительно более холодных солнечных слоях. Согласно проведенным расчетам, затухание альфвеновских волн происходит на длинах порядка скин-слоев, на которых классические уравнения магнитной гидродинамики заведомо неприменимы. Поэтому в основу исследования положены уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики с полным учетом инерции электронов. Исследование выявило ряд важных закономерностей, в частности, конечность глубины прогрева слоя, на которую альфвеновская волна проникает в плазму. Выполнена оценка глубины проникновения. Еще один эффект — установление параметров поглощаемой альфвеновской волны и выход их на квазистационарный режим

Ключевые слова

Классическая магнитная гидродинамика, электромагнитная гидродинамика, поглощение альфвеновской волны, тормозное излучение

Поступила в редакцию 23.06.2016
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №16-11-10278)

Введение. Магнитогидродинамическая плазма допускает поперечные синусоидальные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля, в которых термодинамические параметры и продольные компоненты векторных величин не возмущаются [1]. Такие волны впервые были обнаружены Х. Альфвеном (1942) и названы альфвеновскими. Принципиально важно, что альфвеновские волны конечной амплитуды являются точными решениями классических уравнений магнитной гидродинамики (МГД) [2], что позволяет детально изучить их трансформацию вследствие различных физических факторов — диссипаций, неоднородностей плазмы и т. д.

Одним из приложений альфвеновских волн, инициировавшее настоящее исследование, является предложенный в работе [3] механизм нагрева солнечной короны до температуры в несколько миллионов градусов и генерации солнечного ветра как результата затухания в плазме солнечной короны альфвеновских волн,

генерируемых в нижних значительно более холодных солнечных слоях. В связи с этим в настоящей работе изучен механизм нелинейного пространственного поглощения альфвеновских волн вследствие плазменных диссипаций (омическое сопротивление плазмы, гидродинамические вязкости и теплопроводности электронов и ионов, обмен энергией между плазменными компонентами) с учетом тормозного излучения плазмы на базе численного решения уравнений гидродинамики электронов и ионов — уравнений Брагинского [4, 5] — в предположении квазинейтральности плазмы. В этом случае уравнения Брагинского замыкаются усеченной системой уравнений электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля, а полученная система уравнений плазмодинамики редуцируется к одножидкостной форме [6, 7] — уравнениям электромагнитной гидродинамики (ЭМГД).

Задача о нелинейном пространственном поглощении плоской альфвеновской волны диссипативной плазмой без учета тормозного излучения была рассмотрена в работе [8]. В указанной работе было установлено следующее: альфвеновская волна распространяется в диссипативной плазме со скоростью $\sim 10v_A$, что для средних значений параметров солнечной короны ($\rho \approx 10^{-12} \dots 10^{-15}$ г/см³, $H \approx 1 \dots 100$ Гс, $T \approx 10^4 \dots 10^6$ К) дает огромное значение скорости $v_A = H / \sqrt{4\pi\rho} \sim 3 \cdot 10^8$ см/с. При исследовании нелинейного пространственного поглощения альфвеновской волны диссипативную плазму также можно полагать несжимаемой, что позволяет использовать более простые уравнения несжимаемой ЭМГД [8].

Альфвеновские волны в двухжидкостной плазме отличаются от классических альфвеновских волн в МГД, прежде всего, дисперсионным уравнением. В частности, частота альфвеновских волн, бегущих против магнитного поля, в отличие от теории МГД, по абсолютной величине не превосходит электронную циклотронную частоту $\omega_c^- = \omega_{e,c} = eH / (m_e c)$, а для волн, бегущих вдоль магнитного поля, — ионную циклотронную частоту $\omega_c^+ = \omega_{i,c} = ZeH / (m_i c)$. Для низких частот $\omega \ll \omega_{i,c}$ альфвеновские волны в ЭМГД и МГД практически совпадают. Математический интерес к альфвеновским волнам вызван тем обстоятельством, что эти волны, являясь произвольной суммой альфвеновских волн, бегущих вдоль и против магнитного поля, образуют четырехмерное вещественное линейное пространство, лежащее в бесконечномерном нелинейном многообразии решений уравнений ЭМГД.

В настоящей работе поставлена математическая задача о нелинейном пространственном поглощении плоской альфвеновской волны, набегающей на неподвижную границу диссипативной несжимаемой плазмы, заполняющей полупространство. Предложена одномерная неявная разностная схема для расчета процесса затухания волны, изложены и проанализированы результаты расчетов.

Анализ результатов расчетов показывает, что тормозное излучение кардинально меняет характер нелинейного поглощения. Во-первых, тормозное излуче-

ние «запирает» альфвеновскую волну, в результате она проникает в диссипативную плазму только на конечную глубину d . Во-вторых, параметры альфвеновской волны стабилизируются, выходя с течением времени на квазистационарный режим, параметры которого можно найти решением некоторой краевой задачи на полупрямой для специальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти уравнения существенно зависят от коэффициентов переноса, в особенности от электронной вязкости и теплопроводности. Вероятно, теоретическое значение электронной вязкости завышено на два-три порядка. Однако насильственное уменьшение электронной вязкости приводит к вычислительным проблемам, поскольку система дифференциальных уравнений ЭМГД становится «жесткой» и требует для численного решения разработки специальных вычислительных процедур, что выходило за рамки настоящей работы.

Уравнения электромагнитной газодинамики. Для исследования динамики двухжидкостной плазмы используем уравнения Брагинского [4], составленные из двух (для электронов и ионов) комплектов гидродинамических уравнений. Для квазинейтральной плазмы уравнения Брагинского замыкаются усеченной системой уравнений электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля. Весьма важно, что полученная замкнутая система уравнений динамики двухжидкостной плазмы с полным учетом инерции электронов может быть редуцирована [6–8] без потери математического и физического содержания к одножидкостной гидродинамической системе уравнений ЭМГД. Для несжимаемой плазмы система уравнений ЭМГД имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad \rho = \text{const}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \Pi = \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{P}; \\ \mathbf{E} + \frac{c^2 \lambda_+ \lambda_-}{4\pi\rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{1}{c} [\mathbf{U}, \mathbf{H}] + \frac{1}{\rho} \operatorname{Div} \mathbf{W}; \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где Π , \mathbf{P} , \mathbf{W} — тензоры плотности потока импульса, вязких напряжений и «холловских» слагаемых,

$$\begin{aligned} \Pi = \Pi^h + \Pi^p + \Pi^c, \quad \mathbf{P} = \Pi_*^{(c)} + \Pi^{(U)}; \\ W = (\lambda_- - \lambda_+) (\Pi^p + \Pi^c) + (\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-) I_3 + \lambda_+ \lambda_- (\mathbf{j} \mathbf{U} + \mathbf{U} \mathbf{j}) - \Pi_*^{(U)} - \Pi^{(c)}; \\ \Pi^h = \rho \mathbf{U} \mathbf{U} + p_\Sigma I_3, \quad \Pi^p = \frac{H^2}{8\pi} I_3 - \frac{\mathbf{H} \mathbf{H}}{4\pi}, \quad \Pi^c = \lambda_+ \lambda_- \frac{\mathbf{j} \mathbf{j}}{\rho}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее индексы « \pm » относятся к параметрам ионов и электронов; $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$, $\lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-$, $p_\Sigma = p_+ + p_-$, $m_\Sigma = m_+ + m_-$, $\rho = \rho_+ + \rho_-$, $\mathbf{U} = (\rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_-) / \rho$; I_3 — единичный трехмерный тензор; σ — проводимость плазмы. Тензоры вязких напряжений с учетом несжимаемости плазмы равны

$$\Pi^{(U)} = 2\mu_{\Sigma}D^U, \Pi_*^{(U)} = 2\mu_*D^U, \Pi^{(c)} = 2\mu^*D^c, \Pi_*^{(c)} = 2\mu_*D^c, \Pi_{\pm} = 2\mu_{\pm}D_{\pm}, \quad (3)$$

где $D^U = \text{def } \mathbf{U}$, $D^c = \text{def } (\mathbf{j}/\rho)$, $D_{\pm} = \text{def } \mathbf{v}_{\pm}$ — тензоры деформаций; $\mu_{\Sigma} = \mu_+ + \mu_-$, $\mu_* = \lambda_- \mu_+ - \lambda_+ \mu_-$, $\mu^* = \lambda_-^2 \mu_+ + \lambda_+^2 \mu_-$, μ_{\pm} — гидродинамические вязкости электронов и ионов. При этом вторые вязкости электронов и ионов принимаются равными нулю.

Гидродинамические параметры электронов и ионов вычисляются по решению системы (1)–(3) через параметры ρ , \mathbf{U} , \mathbf{j} по формулам

$$\mathbf{v}_{\pm} = \mathbf{U} \pm \frac{\lambda_{\mp}}{\rho} \mathbf{j}, \quad \rho_{\pm} = \frac{\lambda_{\pm}}{\lambda_{\Sigma}} \rho. \quad (4)$$

Учитывая зависимость проводимости плазмы σ , гидродинамических вязкостей μ_{\pm} и других коэффициентов переноса от температуры электронов и температуры ионов T_{\pm} , систему (1)–(3) необходимо дополнить уравнениями для температуры [9]:

$$\rho_{\pm} c_p^{\pm} \left[\frac{\partial T_{\pm}}{\partial t} + \text{div} T_{\pm} \mathbf{v}_{\pm} \right] = \text{div} (\chi_{\pm} \nabla T_{\pm}) + \text{tr} (\Pi_{\pm} D_{\pm}) + \frac{m_{\mp} j^2}{m_{\Sigma} \sigma} \pm b(T_- - T_+) - p_T^{\pm}, \quad (5)$$

где $c_p = T(\partial S/\partial T)_p$ — теплоемкость при постоянном давлении; χ_{\pm} — теплопроводности электронов и ионов; $Q = \pm b(T_- - T_+)$ — теплота, передаваемая компонентами плазмы друг другу при упругих столкновениях; p_T^{\pm} — потери на тормозное излучение электронов и ионов. Для идеального политропного газа с общим показателем адиабаты γ имеем $c_p = \frac{k}{(\gamma-1)m} = \text{const}$, k — постоянная Больцмана; m — масса частицы газа. Именно этим случаем ограничимся в настоящей работе, полагая $c_p^{\pm} = k/((\gamma-1)m_{\pm})$.

С учетом зависимостей параметров σ , μ_{\pm} , χ_{\pm} , b , p_T^{\pm} от остальных параметров плазмы, прежде всего, температуры T_{\pm} , уравнения (1)–(5) позволяют получить замкнутую определенную систему уравнений относительно величин p_{\pm} , T_{\pm} , \mathbf{U} , \mathbf{H} , \mathbf{E} . При решении этой системы для $c_p^{\pm} = \text{const}$ выполняется закон сохранения полной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{U^2}{2} + \varepsilon + \frac{\lambda_+ \lambda_- j^2}{2\rho^2} \right) + \frac{H^2}{8\pi} \right] + \text{div} \left[\rho \mathbf{U} \left(\frac{U^2}{2} + \varepsilon + \frac{p_{\Sigma}}{\rho} + \frac{\lambda_+ \lambda_- j^2}{2\rho^2} \right) + \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] + \right. \\ \left. + A \mathbf{j} - \sum_{\pm} \chi_{\pm} \nabla T_{\pm} - (\Pi^{(U)} + \Pi_*^{(c)}) \mathbf{U} - (\Pi^{(c)} + \Pi_*^{(U)}) \mathbf{j} / \rho \right] = - (p_T^+ + p_T^-), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_{\pm} = c_p^{\pm} T_{\pm}$ — плотность внутренней энергии электронов и ионов; $\varepsilon = (\lambda_+ \varepsilon_+ + \lambda_- \varepsilon_-) / \lambda_{\Sigma}$;

$$A = \lambda_+ \lambda_- \frac{\langle \mathbf{U}, \mathbf{j} \rangle}{\rho} + \lambda_+ \lambda_- \frac{(\lambda_- - \lambda_+) j^2}{2\rho^2} + \frac{\lambda_+ \lambda_-}{\lambda_{\Sigma}} (\varepsilon_+ - \varepsilon_-) + \frac{\lambda_- p_+ - \lambda_+ p_-}{\rho}.$$

Отметим, что вследствие несжимаемости, параметры p_{\pm} не связаны с температурой T_{\pm} уравнениями состояния, которые теряют смысл, и являются независимыми неизвестными, подлежащими нахождению наравне с температурой T_{\pm} из системы (1)–(5).

Коэффициенты переноса μ_{\pm} , χ_{\pm} , σ , b получаются приближенным решением кинетических уравнений [4] и далее полагались равными [4, 10–12]:

$$\mu_+ = 0,96 \cdot \frac{3m_i^{1/2}T_+^{5/2}}{4\pi^{1/2}e^4Z^4L}, \quad \mu_- = 0,733 \cdot \frac{3m_e^{1/2}T_-^{5/2}}{4(2\pi)^{1/2}e^4ZL};$$

$$\sigma = \frac{3T_-^{3/2}}{4(2\pi m_e)^{1/2}e^2ZL \cdot 0,5129}, \quad b = \frac{5m_e^{1/2}e^4Z^3\rho^2L}{m_i^3k^{1/2}T_-^{3/2}};$$

$$\chi_+ = D(kT_+)^{5/2}, \quad \chi_- = A(kT_-)^{5/2},$$

где Z — кратность заряда ионов; $e_+ = Ze$, $e_- = e$, e — заряд электрона; $m_i = m_+$, $m_e = m_-$, L — кулоновский логарифм ($L = 15$), единица измерения температуры T_{\pm} — эрг. Коэффициенты D и A равны

$$A = 1,9 \cdot \frac{k}{m_e^{1/2}e^4L} f(Z), \quad D = A \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{g(Z)}{Z}, \quad f(Z) = \frac{1 + 0,59Z^{-1}}{1 + 0,25Z + 0,34Z^{-1}};$$

$$g(Z) = \frac{13,56 + 7,29Z^{-1} + 0,43Z^{-2} + 1,75Z^{-3} + 0,59Z^{-4}}{1 + 0,59Z^{-1}} - \frac{3,34 + 13,56Z^{-1} + 4,55Z^{-2}}{0,25 + Z^{-1} + 0,34Z^{-2}}.$$

Теплопроводность χ_- вычислялась и по альтернативной формуле

$$\chi_- = \frac{A(kT_-)^{5/2}}{1 + F \frac{H^2}{\rho^2} (kT_-^3)}, \quad F = 0,33 \cdot \frac{m_i^2}{m_e c^2 e^6 Z^4 L^2}.$$

Для основного случая $Z = 1$ имеем $f(1) = 1$, $g(1) = 1,76$.

Тормозное излучение, Вт/см³, определено по формулам [14, 15]:

$$p_T^+ = 0;$$

$$p_T^- = p_T = \frac{32\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} (\alpha a_0)^3 \frac{m_e e^4}{\hbar^3} E_H \left(\frac{kT_e}{E_H} \right)^{1/2} Z^2 n_i n_e,$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$; $a_0 = r_0/\alpha^2$; $r_0 = e^2/(m_e c^2)$ — классический электронный радиус; $E_H = e^2/(2a_0)$, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг · с — постоянная Планка; $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/К — постоянная Больцмана. В результате имеем

$$p_T = \frac{32\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} \cdot 10^7 \cdot \frac{e^6}{c^3 m_e^{3/2} \hbar} \sqrt{kT_e} Z^2 n_i n_e, \quad \text{эрг} / (\text{с} \cdot \text{см}^3),$$

где T_e — температура, К; n_i , n_e , см⁻³.

В системе (1)–(5) для простоты не учтены термосила и анизотропия замагниченной плазмы [4]. Кроме того, выражения для коэффициентов переноса имеют теоретический характер и периодически корректируются. Наиболее проблемным является значение для электронной вязкости μ_- , которое должно быть, вероятно, на два-три порядка меньше теоретического, приведенного выше.

Альфвеновские волны в электромагнитной газодинамике. В бездиссипативном случае в плоской геометрии плоские альфвеновские волны являются точными решениями уравнений ЭМГД. В таком случае уравнения ЭМГД имеют точные решения вида [8]

$$U_{\perp} = u(t)e^{ikx}, \quad H_{\perp} = h(t)e^{ikx}, \quad E_{\perp} = e(t)e^{ikx}, \quad T_{\pm} = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad U_x = 0, \quad (6)$$

где $k > 0$ — произвольный параметр; использованы комплексные обозначения $U_{\perp} = U_y + iU_z$, $H_{\perp} = H_y + iH_z$, $E_{\perp} = E_y + iE_z$. При этом $H_x = \text{const}$, а $e(t)$ выражается в явном виде через функции $u(t)$ и $h(t)$:

$$e(t) = \frac{\frac{iH_x}{c}u(t) + \frac{ik\Lambda v_A}{\omega_p}h(t)}{1+r^2}, \quad r = \frac{\kappa c}{\omega_p}, \quad \Lambda = \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} - \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}}, \quad v_A = \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}. \quad (7)$$

Функции $u(t)$, $h(t)$ имеют вид

$$u(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + C_2 e^{i\omega_- t}, \quad h(t) = \frac{(4\pi\rho)^{1/2}}{\kappa v_A} \{C_1 \omega_+ e^{i\omega_+ t} + C_2 \omega_- e^{i\omega_- t}\}. \quad (8)$$

Здесь $\omega_p = (4\pi\rho)^{1/2} (\lambda_+ \lambda_-)^{-1/2}$ — плазменная частота; C_1 , C_2 — произвольные комплексные константы. Поперечная компонента плотности тока $j_{\perp} = j_y + ij_z$

также изменяется по закону $j_{\perp} = j(t)e^{ikx}$, а $j_x = 0$, где $j(t) = -\frac{\kappa c}{4\pi} h(t)$. Наконец,

$$\omega_{\pm} = \omega_{\pm}(\kappa) = \frac{\kappa v_A}{2} \left\{ \frac{r\Lambda}{1+r^2} \pm \left[\frac{r^2 \Lambda^2}{(1+r^2)^2} + \frac{4}{1+r^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (9)$$

Функции (6)–(9) доставляют решение уравнений как сжимаемой, так и несжимаемой ЭМГД. Различие заключается в вычислении давлений p_{\pm} и поля E_x . В сжимаемой ЭМГД давления находят из уравнений состояния и поэтому при решении (6)–(9) имеем $p_{\pm} = \text{const}$, а поле E_x равно

$$E_x = -\frac{1}{c} \text{Im}(\bar{U}_{\perp} H_{\perp}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda_- - \lambda_+) \frac{H^2}{8\pi} + \lambda_- p_+ - \lambda_+ p_- \right],$$

отсюда поле $E_x = -\text{Im}(\bar{U}_{\perp} H_{\perp})/c$ зависит только от t , в частности, $\text{div} \mathbf{E} = 0$. Для несжимаемой ЭМГД поле E_x должно быть задано как произвольная функция t , а давление p_{\pm} определяют однозначно с точностью до константы из линейной системы

$$\frac{\lambda_-}{\rho} \frac{\partial p_+}{\partial x} - \frac{\lambda_+}{\rho} \frac{\partial p_-}{\partial x} = E_x + \frac{1}{c} \text{Im}(\bar{U}_\perp H_\perp), \quad \frac{\partial p_+}{\partial x} + \frac{\partial p_-}{\partial x} = 0.$$

Если компонента E_x электрического поля в системе отсчета движущейся плазмы равна нулю, то давление p_\pm не зависит от компоненты x , в противном случае давление p_\pm линейно зависит от компоненты x .

Формулы (6)–(9) показывают, что альфвеновская волна является суммой волн, бегущих вдоль магнитного поля с фазовой скоростью $-\omega_-(\kappa)/\kappa$ и против магнитного поля с фазовой скоростью $-\omega_+(\kappa)/\kappa$, причем фазовые скорости, в отличие от теории МГД, зависят от длины волны $\ell = 2\pi/\kappa$. Из (9) следует, что волна, бегущая против магнитного поля, имеет большую по абсолютной величине фазовую скорость, чем волна, бегущая вдоль магнитного поля. Когда κ меняется от 0 до $+\infty$ частота $\omega_\pm(\kappa)$ изменяется в диапазоне $-(\text{sgn } H_x)\omega_c^+ \dots (\text{sgn } H_x)\omega_c^-$, $\omega_c^\pm = |H_x|/(\lambda_\pm c)$ — циклотронные частоты электронов и ионов. Удобно преобразовать формулу (9) к виду

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{\omega_p}{c} \frac{|\omega|}{\left(\frac{v_A^2 \omega_p^2}{c^2} + \frac{\omega_p v_A}{c} \Lambda \omega - \omega^2 \right)^{1/2}}, \quad (10)$$

где $-\omega_c^+ < \omega < \omega_c^-$ для $H_x > 0$ и $-\omega_c^- < \omega < \omega_c^+$ для $H_x < 0$.

В длинноволновом пределе $r \ll 1$ имеем $\omega_\pm(\kappa) \sim \pm \kappa v_A$ и полученное решение переходит в классическую альфвеновскую волну.

Постановка задачи о пространственном поглощении. Пусть плоская альфвеновская волна, бегущая слева направо в области $x < 0$, набегаем на границу $x = 0$ диссипативной плазмы, заполняющей полупространство $x > 0$. Дальнейшее распространение альфвеновской волны в области $x > 0$ сопряжено с ее поглощением, которое и является предметом изучения. Из результатов полученных выше следует, что если продольное магнитное поле $H_x < 0$, то частота набегающей альфвеновской волны ω изменяется в диапазоне значений $-\omega_c^- = H_x/\lambda_- c < \omega < 0$, а если $H_x > 0$ — то в диапазоне значений $-\omega_c^+ = -H_x/\lambda_+ c < \omega < 0$. Рассмотрим первый случай, поскольку для него диапазон частот ω в $m_+/(Zm_-)$ раз больше, чем для второго случая. Плазма в области $x > 0$ полагается замагниченной, покоящейся, однородной и изотермической. Таким образом, в начальный момент времени в области $x > 0$ имеем

$$U_\perp|_{t=0} = 0, \quad U_x|_{t=0} = 0, \quad T_\pm|_{t=0} = T^0, \quad \rho|_{t=0} = \text{const}, \quad H_\perp|_{t=0} = 0, \quad (11)$$

где константа ρ и продольное магнитное поле $H_x = \text{const}$ такие же, как и в области $x < 0$, откуда набегаем альфвеновская волна. Далее станет ясно, что поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой в области $x > 0$ происходит за время, значительно меньшее времени релаксации температуры, поэтому в (11) можно было принять температуру T_\pm различной.

Значения параметров диссипативной плазмы на границе $x = 0$ совпадают со значениями параметров альфвеновской волны на границе $x = 0$, которые согласно формулам (6)–(10) равны

$$\begin{aligned}
 U_{\perp}|_{x=0} &= U_0 e^{i\omega t}, \quad H_{\perp}|_{x=0} = U_0 \frac{\sqrt{4\pi\rho}}{\kappa\nu_A} \omega e^{i\omega t}; \\
 E_{\perp}|_{x=0} &= \frac{iU_0}{1 + (\kappa c / \omega_p)^2} \left(\frac{H_x}{c} + \Lambda \sqrt{\lambda_+ \lambda_-} \omega \right); \\
 j_{\perp}|_{x=0} &= -U_0 \frac{\omega c \rho}{H_x} e^{i\omega t}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

На бесконечности параметры диссипативной плазмы совпадают с параметрами невозмущенной плазмы:

$$U_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad H_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0, \quad E_{\perp}|_{x=+\infty} = 0, \quad j_{\perp}|_{x=+\infty} = 0. \tag{13}$$

Запишем систему (1)–(5) в безразмерном виде в случае плоской симметрии ($\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$), используя обозначения $U = U_{\perp} = U_y + iU_z$, $H = H_{\perp} = H_y + iH_z$, $E = E_{\perp} = E_y + iE_z$, $j = j_{\perp} = j_y + ij_z$:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(H_x H - \mu_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu^* \frac{\partial j}{\partial x \rho} \right) &= 0; \\
 \frac{\partial H}{\partial t} + i \frac{\partial E}{\partial x} &= 0, \quad j = i \frac{\partial H}{\partial x}; \\
 E - \frac{\xi^2}{\rho} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \xi \zeta \frac{j}{\sigma} + i H_x U + \frac{\xi}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Lambda H_x H - \mu^* \frac{\partial U}{\partial x} - \xi \mu^* \frac{\partial j}{\partial x \rho} \right]; \\
 \frac{\partial T_+}{\partial t} &= \frac{2Z(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_+ \frac{\partial T_+}{\partial x} \right) + \frac{m_- \xi \zeta}{m_{\Sigma} \sigma} |j|^2 + \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_- - T_+}{T_-^{3/2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T_+^{5/2}}{R_+} \left[\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_- \xi^2}{\lambda_+ \rho^2} \left| \frac{\partial j}{\partial x} \right|^2 + 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{\lambda_-}{\lambda_+}} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial j}{\partial x} \right) \right] \right\}; \\
 \frac{\partial T_-}{\partial t} &= \frac{2(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_- \frac{\partial T_-}{\partial x} \right) + \frac{m_+ \xi \zeta}{m_{\Sigma} \sigma} |j|^2 + \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_+ - T_-}{T_-^{3/2}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{T_-^{5/2}}{R_-} \left[\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right|^2 + \frac{\lambda_+ \xi^2}{\lambda_- \rho^2} \left| \frac{\partial j}{\partial x} \right|^2 - 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{\lambda_+}{\lambda_-}} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial j}{\partial x} \right) \right] \right\} - \frac{\xi T}{\xi} (\gamma-1) Z^2 \rho T^{1/2},
 \end{aligned} \tag{14}$$

где $\mu_{\Sigma} = \mu_+ + \mu_-$; $\mu^* = (\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} \mu_+ - (\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} \mu_-$; $\mu^* = (\lambda_- / \lambda_+) \mu_+ + (\lambda_+ / \lambda_-) \mu_-$; $\mu_{\pm} = T_{\pm}^{5/2} / R_{\pm}$; $\sigma = \sigma_0 T^{3/2}$; $\chi_{\pm} = C_{\pm} (\xi / \zeta) T_{\pm}^{5/2}$; $\sigma_0, C_0, R_{\pm}, C_{\pm}$ — значения, определяемые по формулам

$$\sigma_0 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4 \cdot 0,5129}, \quad C_0 = \frac{m_e}{m_i} \left(1 + Z \frac{m_e}{m_i} \right) \frac{5}{2\sqrt{2\pi}};$$

$$R_+ = \frac{\zeta}{\xi} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} \frac{Z^3}{1 + Z \frac{m_e}{m_i}} \frac{2^{5/2}}{3\sqrt{\pi} \cdot 0,96}, \quad R_- = \frac{\zeta}{\xi} \frac{8}{1 + Z \frac{m_e}{m_i}} \left(3\sqrt{\pi} \cdot 0,733 \right)^{-1};$$

$$C_+ = \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \left(1 + Z \frac{m_e}{m_i} \right)^2 \frac{1,9\pi}{2\sqrt{2}} \frac{f(Z)g(Z)}{Z}, \quad C_- = \frac{m_i}{m_e} \left(1 + Z \frac{m_e}{m_i} \right) \frac{1,9\pi}{2\sqrt{2}} f(Z).$$

Если χ_- вычисляется по альтернативной формуле, то

$$\chi_- = \frac{\xi}{\zeta} C_- T_-^{5/2} \left(1 + \frac{0,66\pi^2}{Z\zeta^2} \frac{m_i}{m_e} \frac{|H|^2 + H_x^2}{\rho^2} T_-^3 \right)^{-1}.$$

Наконец, ξ , ζ , ξ_T — числа подобия, равные

$$\xi = \frac{\ell_c}{L_0} = \frac{c\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}}{\sqrt{4\pi\rho_0} L_0}, \quad \zeta = \frac{(4\pi\rho_0)^{5/2}}{H_0^4} \frac{ce^3}{m_i^2} LZ^3 \left(1 + Z \frac{m_e}{m_i} \right)^{-3/2};$$

$$\xi_T = \frac{\rho_0^{3/2}}{H_0^2} \frac{10^7 e^5}{c^2 \hbar m_i m_e} \frac{64\sqrt{\pi}}{3^{3/2}} \left(1 + Z \frac{m_e}{m_i} \right)^{-3/2}.$$

Здесь $\ell_c = c/\omega_p$ — скин-длина; L_0 , ρ_0 , H_0 — характерные масштабы длины плотности, напряженности магнитного поля и т. д. При обезразмеривании приняли $t_0 = L_0/v_0$, $v_0 = v_A = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$, $E_0 = v_0 H_0/c$, $j_0 = cH_0/(4\pi L_0)$, $T_0 = v_A^2 \lambda_{\Sigma} e/(2k)$.

Требуется решить начально-краевую задачу для системы (14) на полупрямой $x \geq 0$: найти функции $H(t, x)$, $E(t, x)$, $U(t, x)$, $T_{\pm}(t, x)$, удовлетворяющие для $x \geq 0$, $t \geq 0$ уравнениям системы (14), при $t = 0$ безразмерным начальным условиям

$$U|_{t=0} = 0, \quad H|_{t=0} = 0, \quad E|_{t=0} = 0, \quad T_{\pm}|_{t=0} = T^0, \quad x \geq 0, \quad (15)$$

а при $x = 0$ и $x = +\infty$ — безразмерным краевым условиям

$$U|_{x=0} = U_0 e^{i\omega t}, \quad H|_{x=0} = \frac{\rho U_0 \omega}{\kappa H_x} e^{i\omega t}, \quad j|_{x=0} = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t};$$

$$E|_{x=0} = \frac{iU_0}{1 + \kappa^2 \xi^2} (H_x + \xi \Lambda \omega) e^{i\omega t} = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2) e^{i\omega t}; \quad (16)$$

$$U|_{x=+\infty} = 0, \quad H|_{x=+\infty} = 0, \quad E|_{x=+\infty} = 0, \quad j|_{x=+\infty} = 0, \quad T_{\pm}|_{x=+\infty} = T^0,$$

причем при $H_x > 0$ имеем $-H_x(\lambda_- / \lambda_+)^{1/2} < \omega\xi < 0$, при $H_x < 0$ имеем $H_x(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega\xi < 0$. Здесь $\omega, \rho, H_x \in R$, $U_0 \in C$ — безразмерные параметры задачи и в безразмерном виде

$$\kappa = \kappa(\omega) = \frac{|\omega|\sqrt{\rho}}{\sqrt{H_x^2 + H_x\Lambda\xi\omega - \xi^2\omega^2}}.$$

Численный метод решения задачи о пространственном поглощении. Рассмотрим неявную разностную схему численного решения задачи (14)–(16). Расчетная область — отрезок $[0, L]$ достаточно большой длины L , в котором выбраны две сетки узлов $x_\kappa = \kappa h$, $0 \leq \kappa \leq N$, $x_{\kappa+1/2} = (\kappa+1/2)h$, $0 \leq \kappa < N$, $h = L/N$. В целых узлах аппроксимируются величины j , U , E , в дробных — H , T_\pm . Переход с нижнего на верхний временной слой T_\pm^0 , U^0 , $H^0 \rightarrow T_\pm^1$, U^1 , H^1 за время τ , $t \rightarrow t + \tau$, реализуется неявной разностной схемой, где для простоты примем $Z = 1$:

$$1) \quad \rho \frac{U_\kappa^1 - U_\kappa^0}{\tau} - \frac{1}{h} \left[\mu_{\Sigma, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} - \mu_{\Sigma, \kappa-1/2}^0 \frac{U_\kappa^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] - H_x \frac{H_{\kappa+1/2}^0 - H_{\kappa-1/2}^0}{h} - \frac{\xi}{\rho h} \left(\mu_{*, \kappa+1/2}^0 \frac{j_{\kappa+1}^0 - j_\kappa^0}{h} - \mu_{*, \kappa-1/2}^0 \frac{j_\kappa^0 - j_{\kappa-1}^0}{h} \right) = 0, \quad 0 < \kappa < N;$$

$$U_N^1 = 0, \quad U_0^1 = U_0 e^{i\omega(t+\tau)}, \quad j_N^0 = 0, \quad j_0^0 = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega t},$$

$$j_k^0 = i \frac{H_{k+1/2}^0 - H_{k-1/2}^0}{h}, \quad 0 < k < N;$$

$$2) \quad \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa+1/2}^0}{\tau} + i \frac{E_{\kappa+1} - E_\kappa}{h} = 0, \quad 0 \leq \kappa < N;$$

$$E_\kappa - \frac{\xi^2}{\rho} \frac{E_{\kappa+1} - 2E_\kappa + E_{\kappa-1}}{h^2} = \frac{i\xi\zeta}{\sigma_0 (T_{-, \kappa}^0)^{3/2}} \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} + iH_x U_\kappa^1 + \frac{\xi\Lambda H_x}{\rho} \frac{H_{\kappa+1/2}^1 - H_{\kappa-1/2}^1}{h} - \frac{\xi}{\rho h} \left[\mu_{*, \kappa+1/2}^0 \frac{U_{\kappa+1}^1 - U_\kappa^1}{h} - \mu_{*, \kappa-1/2}^0 \frac{U_\kappa^1 - U_{\kappa-1}^1}{h} \right] - \frac{\xi^2}{\rho^2 h} \left[\mu_{\kappa+1/2}^{*0} \frac{j_{\kappa+1}^0 - j_\kappa^0}{h} - \mu_{\kappa-1/2}^{*0} \frac{j_\kappa^0 - j_{\kappa-1}^0}{h} \right], \quad 0 < \kappa < N, \quad E_N = 0,$$

$$E_0 = \frac{iU_0}{H_x} (H_x^2 + H_x\Lambda\xi\omega - \xi^2\omega^2) e^{i\omega(t+\tau/2)};$$

$$3) \quad \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^0}{\tau} = \frac{2(\gamma-1)}{\rho} \left\{ \frac{1}{h} \left[\chi_{\kappa+1}^\pm \frac{T_{\pm, \kappa+3/2}^1 - T_{\pm, \kappa+1/2}^1}{h} - \chi_\kappa^\pm \frac{T_{\pm, \kappa+1/2}^1 - T_{\pm, \kappa-1/2}^1}{h} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\xi \zeta}{\sigma_0 \left(T_{-,k+1/2}^0\right)^{3/2}} \left| \frac{j_k^1 + j_{k+1}^1}{2} \right|^2 \pm \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_{-,k+1/2}^0 - T_{+,k+1/2}^0}{\left(T_{-,k+1/2}^0\right)^{3/2}} + \frac{\left(T_{\pm,k+1/2}^0\right)^{5/2}}{R_{\pm}} \times \\
 & \times \left[\left| \frac{U_{k+1}^1 - U_k^1}{h} \right|^2 + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \frac{\xi^2}{\rho^2} \left| \frac{j_{k+1}^1 - j_k^1}{h} \right|^2 \pm 2 \frac{\xi}{\rho} \sqrt{\frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}}} \operatorname{Re} \left(\frac{U_{k+1}^1 - U_k^1}{h} \cdot \frac{j_{k+1}^1 - j_k^1}{h} \right) \right] \Bigg\} - p_{T,k+1/2}^{\pm}, \\
 & p_{T,k+1/2}^+ = 0, \quad p_{T,k+1/2}^- = \frac{\xi_T}{\xi} (\gamma - 1) \rho \left(T_{-,k+1/2}^0\right)^{1/2}, \\
 & 0 \leq k < N, \quad T_{\pm,1/2}^1 = T^0, \quad T_{\pm,N+1/2}^1 = T^0.
 \end{aligned}$$

Шаг τ выбирается из условия устойчивости

$$\tau = \frac{kh}{U_{\text{эфф}}}, \quad U_{\text{эфф}} = \max_{0 \leq k < N} \left(\frac{|H_{k+1/2}^0|^2}{\rho} + T_{+,k+1/2}^0 + T_{-,k+1/2}^0 \right)^{1/2},$$

где $0 < k < 1$ — коэффициент запаса, подбираемый экспериментально. Порядок вычислений по приведенной выше схеме следующий. Сначала по формулам, данным в п. 1, прогонкой определяют величину U_k^1 , $0 \leq k \leq N$. Затем по формулам, приведенным в п. 2, находят значения $H_{k+1/2}^1$, $0 \leq k < N$, E_k , $0 \leq k \leq N$. Для этого с помощью первого равенства из п. 2 исключают из числа неизвестных

$$H_{k+1/2}^1 = H_{k+1/2}^0 - \frac{i\tau}{h} (E_{k+1} - E_k), \quad 0 \leq k < N,$$

и полученные выражения подставляют во второе равенство п. 2, после чего величины E_k , $0 \leq k \leq N$, находят прогонкой и по полученным значениям восстанавливают $H_{k+1/2}^1$, $0 \leq k < N$. На завершающем этапе прогонками определяют величины $T_{\mp,k+1/2}^1$, $0 \leq k < N$. При этом j_k^1 вычисляют по формулам $j_k^1 = i(H_{k+1/2}^1 - H_{k-1/2}^1)/h$, $0 < k < N$, $j_N^1 = 0$, $j_0^1 = -\frac{\rho U_0 \omega}{H_x} e^{i\omega(t+\tau)}$. Значения χ_k^{\pm} получают интерполяцией $\chi_k^{\pm} = \frac{1}{2}(\chi_{k+1/2}^{\pm} + \chi_{k-1/2}^{\pm})$, $0 < k < N$, $\chi_0^{\pm} = \chi_{1/2}^{\pm}$, $\chi_N^{\pm} = \chi_{N-1/2}^{\pm}$, при этом $\chi_{k+1/2}^{\pm}$, $0 \leq k < N$, берутся на нулевом слое.

Анализ результатов расчетов. Рассмотрим результаты расчетов процесса нелинейного поглощения альфвеновской волны применительно к параметрам солнечной короны $\rho_0 = 10^{-12}$ г/см³, $H_0 = 1$ Гс, $Z = 1$, тогда $\zeta = 3 \cdot 10^3$, $\xi_T = 3$, $\ell_c = c/\omega_p \approx 1$ см. Чтобы учесть мелкомасштабные ($\sim \ell_c$) процессы при поглощении альфвеновской волны, примем $L_0 = \ell_c$, следовательно, $\xi = 1$. С учетом оценки толщины плазменной части солнечной короны около 300..400 км, тем самым действительно учитывается мелкомасштабная динамика плазмы. Для указанных значений параметров фоновой диссипативной плазмы получим $v_A = H_0/\sqrt{4\pi\rho_0} = 2,8 \cdot 10^5$ см/с, $t_0 = L_0/v_A = c\sqrt{\lambda_+ \lambda_-}/H_0 = 3,45 \cdot 10^{-6}$ с, $T_0 \approx 10^3$ К. Дебаевский радиус составляет $r_D = (kT_0)^{1/2}/(2\pi^{1/2}\rho_0 n_0^{1/2}) \approx 2 \cdot 10^{-4}$ см $\ll L_0$ и много

меньше шагов использованной разностной сетки, поэтому условие квазинейтральности выполнено с высокой точностью. Здесь и далее $n_0 = \rho_0/m_i$, $m_i = 2m_p$.

Будем полагать, что фоновая диссипативная плазма, в которой затухает альфвеновская волна, не излучает, иначе за некоторое время t_* температура фона снизилась бы до нуля. Время t_* вычисляется решением задачи Коши для электронной температуры $T_e = T_-$ фона:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(2T_e + \frac{\beta}{\alpha} T_e^2 + \frac{T_e^{3/2}}{\alpha} \frac{dT_e}{dt} \right) + \beta T_e^{1/2} &= 0, \\ T_e(0) = T_0, \quad \frac{dT_e}{dt}(0) &= -\beta T_0^{1/2}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $\alpha = 2(\gamma - 1)C_0\rho\xi/\xi$, $\beta = \xi_T(\gamma - 1)\rho/\xi$. Тогда время t_* находят как решение уравнения $T_e(t) = 0$, при этом ионная температура равна

$$T_i = T_e + \frac{\beta}{\alpha} T_e^2 + \frac{T_e^{3/2}}{\alpha} \frac{dT_e}{dt}.$$

Фактически процесс поглощения рассматривается при $t \ll t_*$. Здесь не оценивается время t_* , поскольку при достаточно слабом излучении β время t_* достаточно велико. Действительно, при $\xi_T = 0$ и $\beta = 0$ получим, решая (17), $t_* = +\infty$, но из непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (17) от параметра β следует, что при $\beta \rightarrow 0$ справедливо $t_* \rightarrow +\infty$. В частности, формулу для тормозного излучения p_T применяют только при $T_- > T_0$.

Рассмотрим результаты расчетов для двух значений амплитуды U_0 поперечной скорости падающей альфвеновской волны, $|U_0| = 0,1$ и $|U_0| = 1$, при этом $\omega = -30$, $H_x = -1$. Частота ω выбрана в середине интервала возможных частот $-(\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} < \omega < 0$. Результаты расчетов для $|U_0| = 1$ представлены на диаграммах и демонстрируют два эффекта. Во-первых, с течением времени альфвеновская волна проникает в диссипативную плазму не сколь угодно далеко, а только на конечную глубину d . Для $|U_0| = 1$ имеем $d \cong 164$. При этом факт конечности глубины проникания d обусловлен двухжидкостной механикой плазмы и тесно связанной с ней возможностью учета мелкомасштабной ($\sim \ell_c$) динамики. Действительно, в размерных величинах $d \cong 164$ соответствует $d \approx 1,5$ м, что по сравнению с толщиной солнечной короны около 300 является ничтожно малой величиной. Однако величина d может существенно возрасти при увеличении амплитуды альфвеновской волны $|U_0|$ и (или) ослаблении тормозного излучения, что происходит при уменьшении плотности ρ_0 и увеличении напряженности H_0 магнитного поля солнечной короны. Так, из представленных диаграмм при $|U_0| = 0,1$ глубина d уменьшается по сравнению с глубиной d для случая $|U_0| = 1$ примерно на порядок. Ниже будет показано, что конечность глубины проника-

ния альфвеновской волны обусловлена наличием тормозного излучения и следует из закона сохранения полной энергии плазмы.

Во-вторых, параметры поглощаемой альфвеновской волны с течением времени выходят на установившийся квазистационарный режим, что означает стабилизацию со временем профилей температуры T_{\pm} электронов и ионов, а также амплитуд электромагнитного поля и поперечной скорости. Временная стабилизация температуры T_{\pm} показана на рис. 1, а электромагнитного поля и поперечной ско-

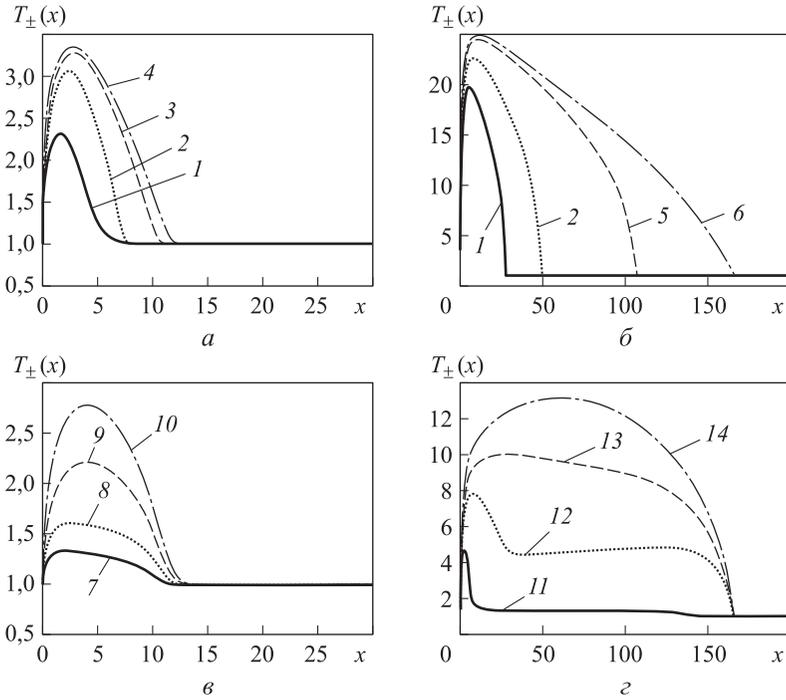


Рис. 1. Распределение температуры электронов (а, б) и распределение температуры ионов (в, г) в различные моменты времени для амплитуд $|U_0|=0,1$ (а, в) и $|U_0|=1$ (б, г):

- 1 — $t=0,2$; 2 — $t=0,4$; 3 — $t=1,0$; 4 — $t=30$; 5 — $t=1,4$; 6 — $t=270$; 7 — $t=1,5$; 8 — $t=3$; 9 — $t=7,5$; 10 — $t=30$; 11 — $t=3$; 12 — $t=30$; 13 — $t=82,5$; 14 — $t=270$

рости — на рис. 2. В частности, нагрев плазмы происходит на глубину примерно в 4 раза большую, чем глубина проникания электромагнитного поля и поперечной скорости, что объясняется высокой теплопроводностью электронов и ионов. Первоначальный нагрев электронов обусловлен джоулевой теплотой $\sim |j|^2/\sigma$ и происходит, как следует из диаграммы для скорости j (рис. 2, в, г), вблизи левой границы плазмы $x=0$. Выделившаяся в электронах джоулева теплота проникает вследствие теплопроводности вглубь диссипативной плазмы и частично отдается ионам в результате релаксации температуры. В рассматриваемых случаях полагают $\mu_- = 0$. Вклад в температуру ионов работы вязких напряжений тоже локализован у левой границы плазмы $x=0$. Наличие квазистационарного режима объясняется суще-

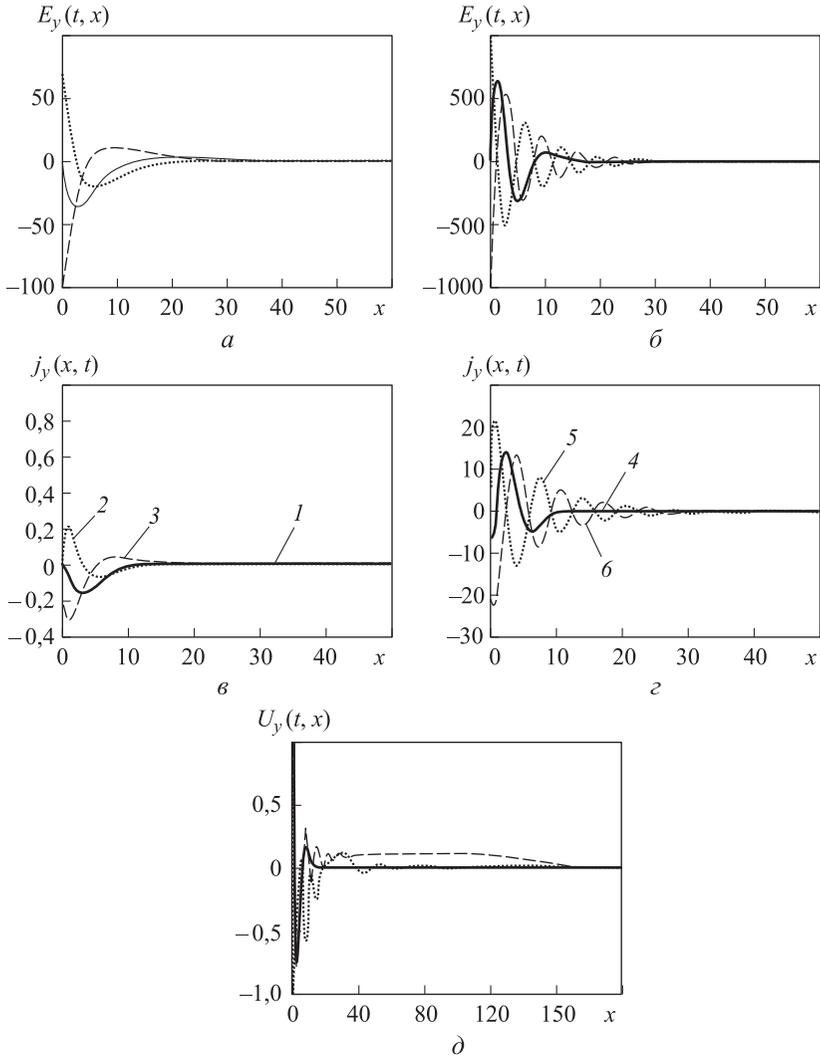


Рис. 2. Распределение напряженности электрического поля (а–г) и поперечной скорости (д) в различные моменты времени для амплитуд $|U_0| = 0,1$ (а, в) и $|U_0| = 1$ (б, г, д):

1 – $t = 4,5$; 2 – $t = 15$; 3 – $t = 30$; 4 – $t = 0,2$; 5 – $t = 1,4$; 6 – $t = 270$

ствованием у системы (14) квазистационарных решений вида $T_{\pm} = T_{\pm}(x)$, $U = e^{i\omega t}U(x)$, $H = e^{i\omega t}H(x)$, $E = e^{i\omega t}E(x)$, $j = e^{i\omega t}j(x)$, где ω — частота падающей альфвеновской волны. Подставляя указанные функции в систему (14) и сокращая на $e^{i\omega t}$, получаем систему ОДУ на функции $T_{\pm}(x)$, $U(x)$, $E(x)$ вида

$$i\rho\omega U + \frac{H_x}{\omega} \frac{d^2 E}{dx^2} - \frac{d}{dx} \left(\mu_{\Sigma} \frac{dU}{dx} \right) + \frac{i\xi}{\rho\omega} \frac{d}{dx} \left(\mu_* \frac{d^3 E}{dx^3} \right) = 0;$$

$$E - \left(\frac{\xi^2}{\rho} - \frac{i\xi\xi}{\omega\sigma} - \frac{\xi\Lambda H_x}{\omega\rho} \right) \frac{d^2 E}{dx^2} - iH_x U + \frac{\xi}{\rho} \frac{d}{dx} \left(\mu_* \frac{dU}{dx} \right) - \frac{i\xi^2}{\omega\rho^2} \left(\mu_* \frac{d^3 E}{dx^3} \right) = 0; \tag{18}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\chi_{\pm} \frac{dT_{\pm}}{dx} \right) + \frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}} \frac{\zeta \xi}{\omega^2 \sigma_0 T_{\pm}^{3/2}} \left| \frac{d^2 E}{dx^2} \right| \pm \frac{\zeta}{\xi} C_0 \rho^2 \frac{T_{-} - T_{+}}{T_{\pm}^{3/2}} + \\ & + \frac{T_{\pm}^{5/2}}{R_{\pm}} \left[\left| \frac{dU}{dx} \right|^2 + \frac{\lambda_{\mp}}{\lambda_{\pm}} \frac{\xi^2}{\omega^2 \rho^2} \left| \frac{d^3 E}{dx^3} \right|^2 \pm \frac{\xi}{\rho \omega} \sqrt{\lambda_{\mp}} \operatorname{Re} \left(i \frac{dU}{dx} \frac{d^3 E}{dx^3} \right) \right] - \frac{(1 \mp 1)}{4} \frac{\xi_T}{\xi} Z^2 \rho T_{\pm}^{1/2} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

с граничными условиями в точках $x = 0$ и $x = +\infty$:

$$\begin{aligned} T_{\pm}(0) = T^0, \quad U(0) = U_0, \quad H(0) = \frac{\rho U_0 \omega}{\kappa H_x}, \quad E(0) = \frac{i U_0}{1 + \kappa^2 \xi^2} (H_x + \xi \Lambda \omega); \\ T_{\pm}(+\infty) = T^0, \quad U(+\infty) = 0, \quad H(+\infty) = 0, \quad E(+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом $H = -(dE/dx)/\omega$. Квазистационарные решения, получаемые установлением по времени, вероятно, можно получить решением краевой задачи (18), (19) на интервале $(0, +\infty)$.

Однако проверка этой гипотезы и обсуждение результатов расчетов выходит за рамки настоящей работы, поскольку система (18), (19) вследствие малости параметра μ_{-} является «жесткой» и ее численное решение требует особого внимания. Принимая указанную гипотезу, можно получить оценку глубины проникания альфвеновской волны d . Закон сохранения полной энергии с учетом $U_x = 0$, $j_x = 0$, $H^2 = |H|^2 + H_x^2$ позволяет записать

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \left[\rho \left(\frac{|U|^2}{2} + \frac{\lambda_{+} \lambda_{-}}{2 \rho^2} |j|^2 + \frac{\lambda_{+} c_p^{+} T_{+} + \lambda_{-} c_p^{-} T_{-}}{\lambda_{\Sigma}} \right) + \frac{|H|^2}{8 \pi} \right] dx = \\ & = - \frac{c}{4 \pi} (E_y H_z - E_z H_y) \Big|_0^{+\infty} + \sum_{\pm} \chi_{\pm} \frac{dT_{\pm}}{dx} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} p_T dx. \end{aligned}$$

Для квазистационарного решения левая часть последнего равенства равна нулю и с учетом граничных условий на бесконечности получим

$$0 = \frac{c}{4 \pi} (E_y H_z - E_z H_y) \Big|_{x=0} + \sum_{\pm} \chi_{\pm} \frac{dT_{\pm}}{dx} \Big|_{x=0} - \int_0^{+\infty} p_T dx,$$

что в безразмерном виде дает

$$\frac{|\omega| \rho |U_0|^2}{\kappa H_x^2} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega) = \sum_{\pm} \chi_{\pm} \frac{dT_{\pm}}{dx} (0) + \frac{\xi_T}{2 \xi} (\gamma - 1) Z^2 \rho \int_0^d \sqrt{T_{-}} dx. \quad (20)$$

Поскольку $dT_{\pm}/dx(0) > 0$, а $T_{-}(x)$ выпукло вверх (см. рис. 1, а, б), это же верно и для $\sqrt{T_{-}}$, таким образом, область под кривой $\sqrt{T_{-}}$ содержит треугольник высотой $\sqrt{T_m}$ и основанием d . Поэтому интеграл в законе сохранения (20) мажорирует площадь указанного треугольника, что позволяет определить оценку

$$\frac{\xi_T}{4 \xi} (\gamma - 1) Z^2 \rho \sqrt{T_m} d \leq \frac{\xi_T}{2 \xi} (\gamma - 1) Z^2 \rho \int_0^d \sqrt{T_{-}} dx \leq \frac{|\omega|^2 \rho |U_0|^2}{\kappa H_x^2} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2),$$

где T_m — максимальная электронная температура. Окончательно получим

$$d \leq \frac{4\xi}{\xi_T} \frac{|\omega| |U_0|^2}{\kappa(\gamma-1)Z^2 H_x^2 \sqrt{T_m}} (H_x^2 + H_x \Lambda \xi \omega - \xi^2 \omega^2). \quad (21)$$

Как показывают численные расчеты, оценка (21) для глубины d завышена в несколько раз, тем не менее она дает представление о порядке величины глубины проникания альфвеновских волн в диссипативную плазму с учетом тормозного излучения. Недостаток оценки (21) в том, что температура T_m не является независимой величиной.

Сопоставим полученные результаты с результатами теории МГД. Формальный переход к МГД получается при $\xi \rightarrow 0$. Согласно (14), при $\xi \rightarrow 0$ диссипации исчезают, в случае излучающего фона $T_+ = T_- = 0$, а электродинамика сводится к уравнениям идеальной несжимаемой МГД

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{H_x}{\rho} \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} - H_x \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad E = iH_x U, \quad (22)$$

которые несложно решить аналитически [15]. Согласно (22), падающая на границу $x = 0$ классическая альфвеновская волна с дисперсионным соотношением $\kappa = |\omega| \sqrt{\rho} / |H_x|$ без искажений проходит в полупространство $x > 0$. Если фон не излучает, то $T_+ = T_- = T^0$. Однако для конечных, но малых величин ξ (например, если в качестве характерного масштаба длины L_0 взять толщину солнечной короны $\cong 300$ км, то $\xi = 1/3 \cdot 10^{-7}$) эта картина немного меняется и в соответствии с расчетами $T_+ \cong T_- \cong T^0$, величины H , U , E слабо затухают. Основной вывод заключается в том, что в рамках классической теории МГД невозможно исследовать нагрев диссипативной плазмы вследствие поглощения альфвеновских волн, поскольку исчезающие диссипации малы и их роль сводится к слабому затуханию электромагнитного поля классической альфвеновской волны, падающей на границу плазмы.

Подведем некоторый итог. Согласно полученным результатам, диссипативную плазму солнечной короны в принципе можно нагреть за счет поглощения альфвеновских волн, падающих на ее границу. Величина нагрева зависит от амплитуды падающей волны и параметров солнечной короны. При возрастании амплитуды $|U_0|$ в 10 раз (с 0,1 до 1,0) температура нагрева короны также увеличилась примерно в 10 раз. Чтобы достичь значение температуры короны 10^6 К амплитуда волны должна быть около $|U_0| \approx 50$, что в размерных единицах дает $|U_0| \approx 50 H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0}$, где H_0 , ρ_0 — параметры невозмущенной короны. Температура нагрева короны зависит от параметров H_0 и ρ_0 в комбинациях $\rho_0^{5/2} / H_0^4$ и $\rho_0^{3/2} / H_0^2$, входящих в числа подобия ζ и ξ_T соответственно. При уменьшении числа ζ увеличиваются тепловыделения вследствие вязких напряжений и возрастает роль теплопроводности, но уменьшается джоулева теплота и замедляется релаксация температуры. При уменьшении числа ξ_T снижаются потери на тормозное излучение, следовательно, увеличивается электронная температура. Нагрев

солнечной короны происходит в слое конечной толщины d , которая зависит от амплитуды падающей альфвеновской волны $|U_0|$ и мощности тормозного излучения. При увеличении амплитуды $|U_0|$ или ослаблении тормозного излучения, т. е. уменьшении комбинации $\rho_0^{3/2}/H_0^2$, глубина d возрастает (например, при увеличении $|U_0|$ с 0,1 до 1,0 глубина d возросла примерно в 10 раз). Однако численное исследование поглощения с большой глубиной d сопряжено с вычислительными проблемами, связанными с необходимостью резкого увеличения расчетной области и времени расчета. Так, вариант с $|U_0|=1$ потребовал непрерывного расчета в течение четырех суток до выхода на установление. Кроме того, при сильном нагреве ужесточается условие устойчивости, что также увеличивает объем вычислений.

Заключение. Оценим толщину плазменной части солнечной короны, исходя из модели плоской атмосферы в поле силы тяжести. Под плазменной частью солнечной короны понимается та ее часть, где параметры короны находятся в указанных в начале настоящей работы пределах [16] и где еще справедливо гидродинамическое приближение для плазмы. Допустим, плазма короны находится в равновесном состоянии, все параметры которого зависят только от высоты z , тогда

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (23)$$

Полагая равновесное состояние изоэнтропическим, получаем

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = S = \text{const.}$$

Откуда, решая дифференциальное уравнение (23), имеем

$$\frac{\rho^{\gamma-1}}{\gamma-1} = -\frac{zg}{\gamma S} + \text{const.}$$

Пусть при $z = 0$, $\rho = \rho_0$, $p = p_0 = k\rho_0 T_0/m$, тогда $S = p_0/\rho_0^\gamma = kT_0/(m\rho_0^{\gamma-1})$ и

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{gmz}{kT_0} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (24)$$

Пусть D — толщина плазменной части солнечной короны. При $z = 0$ температура короны совпадает с температурой фотосферы $T_0 = 5,8 \cdot 10^3$ К, $\rho_0 = 10^{-12}$ г/см³. При $z = D$ имеем $\rho(D) = 10^{-15}$ г/см³. Подставляя эти выражения в (24) и используя данные, приведенные в работах [16, 17] $m = 1,2m_p$, $g = 2,74 \cdot 10^4$ см/с², $\gamma = 5/3$,

получаем уравнение для толщины D : $\rho(D) = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{gm}{kT_0} D \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$, откуда

$$D = 3,64 \cdot 10^7 \text{ см} = 364 \text{ км.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Альфвен Х. Космическая электродинамика. М.: ИЛ, 1952. 290 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 652 с.
3. *Alfvenic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind* / S.W. McIntosh, B. Pe Pontien, M. Carlsson, V. Hansteen, P. Boerner, M. Goossens // *Nature*. 2011. Vol. 475. P. 478–480. DOI: 10.1038/nature10235 URL: <http://www.nature.com/nature/journal/v475/n7357/full/nature10235.html>
4. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // *Вопросы теории плазмы*. Вып. 1 / под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. С. 183–272.
5. Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1993. 336 с.
6. Гавриков М.Б. Основные уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики. Ч. I // *Препринт № 59*. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2006. 28 с.
URL: http://www.keldysh.ru/papers/2006/rep59/rep2006_59.html (дата обращения: 15.06.2016).
7. Gavrikov M.B., Taiurskii A.A. Electron inertia effect on incompressible plasma flow in a planar channel // *J. Plasma Phys.* 2015. Vol. 81. No. 5. P. 495810506.
DOI: 10.1017/S0022377815000720
URL: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-plasma-physics/article/div-classtilelectron-inertia-effect-on-incompressible-plasma-flow-in-a-planarchanneldiv/D2675017840F927236881A2CDF592F10>
8. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Влияние инерции электронов на течение несжимаемой плазмы в плоском канале // *Математическое моделирование*. 2013. Т. 25. № 8. С. 65–79.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. М.: Мир, 1965. 212 с.
11. Чэпмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
12. Ландау Л.Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // *ЖЭТФ*. 1937. Т. 7. С. 203.
13. Грим Г. Процессы излучения в плазме / В сб. *Основы физики плазмы*. Т. 1. М.: Энергоатомиздат, 1983. 641 с.
14. Чукбар К.В. Лекции по явлениям переноса в плазме. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008. 256 с.
15. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
16. Аллен К.У. Астрофизические величины. М.: Мир, 1977. 279 с.
17. Грей Д. Наблюдение и анализ звездных фотосфер. М.: Мир, 1980. 496 с.

Гавриков Михаил Борисович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4), доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Таюрский Алексей Александрович — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник ИПМ им. М.В. Келдыша (Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Пространственное нелинейное поглощение альфвеновской волны диссипативной плазмой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 2. С. 40–59. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-40-59

**SPATIAL NONLINEAR ALFVEN WAVE ABSORPTION
BY DISSIPATIVE PLASMA**

М.Б. Gavrikov^{1, 2}

А.А. Tayurskiy¹

nadya_p@cognitive.ru

tayurskiy2001@mail.ru

¹ **Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation**

² **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

Abstract

The mathematical model of Alfvén wave absorption makes it possible, in particular, to explain the anomalous heating of the solar corona by Alfvén waves generated in the lower, much colder layers of the sun. According to calculations, Alfvén wave absorption occurs over distances of the skin order, on which classical magnetohydrodynamics (MHD) equations are obviously inapplicable. Therefore, the research is based on equations of the two-fluid MHD with a full account of the electron inertia. The study revealed a number of important regularities, in particular, the depth finiteness of the layer heating, where Alfvén waves penetrate into plasma. In our research we evaluated the penetration depth and established the parameters of Alfvén waves absorbed, and their convergence to the quasi-stationary mode

Keywords

Classic magnetohydrodynamics (MHD), electromagnetic hydrodynamics (EMHD), Alfvén wave absorption, bremsstrahlung

REFERENCES

- [1] Alfvén H. *Cosmical electrodynamics*. Clarendon Press, 1963. 228 p.
- [2] Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 8. Elektrodinamika sploshnykh sred* [Theoretical physics. Vol. 8. Electrodynamics of continuous media]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 652 p.
- [3] McIntosh S.W., Pe Pontien B., Carlsson M., Hansteen V., Boerner P., Goossens M. Alfvénic waves with sufficient energy to power the quiet solar corona and fast solar wind. *Nature*, 2011, vol. 475, pp. 478–480. DOI: 10.1038/nature10235
Available at: <http://www.nature.com/nature/journal/v475/n7357/full/nature10235.html>
- [4] Braginskii S.I. *Yavleniya perenosa v plazme* [Transport phenomenon in plasma]. *Voprosy teorii plazmy. Vyp. 1* [Plasma theory questions. Iss. 1]. Moscow, Gosatomizdat Publ., 1963, pp. 183–272 (in Russ.).

- [5] Dnestrovskiy Yu.N., Kostomarov D.P. *Matematicheskoe modelirovanie plazmy* [Plasma mathematic simulation]. Moscow, Nauka Publ., 1993. 336 p.
- [6] Gavrikov M.B. *Osnovnye uravneniya dvukhzhidkostnoy magnitnoy gidrodinamiki*. Ch. I. Preprint № 59 [The basic equations for two-fluid electromagnetic hydrodynamics. Part I. Preprint no. 59]. Moscow, Inst. Appl. Math. Publ., 2006. 28 p. (in Russ.). Available at: http://www.keldysh.ru/papers/2006/prep59/prep2006_59.html (accessed 15.06.2016).
- [7] Gavrikov M.B., Taiurskii A.A. Electron inertia effect on incompressible plasma flow in a planar channel. *J. Plasma Phys.*, 2015, vol. 81, no. 5, pp. 495810506. DOI: 10.1017/S0022377815000720 Available at: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-plasma-physics/article/div-classtitleelectron-inertia-effect-on-incompressible-plasma-flow-in-a-planar-channel/div/D2675017840F927236881A2CDF592F10>
- [8] Gavrikov M.B., Tayurskiy A.A. The influence of electron inertia on the incompressible plasma flow in a planar channel. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2013, vol. 25, no. 8, pp. 65–79.
- [9] Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika*. T. 6. *Gidrodinamika* [Theoretical physics. Vol. 6. Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p.
- [10] Spitzer L. *Physics of fully ionized gases*. New York–London, John Wiley and Sons, 1962.
- [11] Chapman S., Cowling T.G. *The mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge, Univ. Press, 1939.
- [12] Landau L.D. Kinetic equation in case of Coulomb interaction. *ZhETF*, 1937, vol. 7, p. 203 (in Russ.).
- [13] Grim G. *Protsessy izlucheniya v plazme*. Sbornik: *Osnovy fiziki plazmy*. T. 1 [Emission processes in plasma. In: Fundamentals of plasma physics. Vol. 1]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 641 p. (in Russ.).
- [14] Chukbar K.V. *Leksii po yavleniyam perenosa v plazme* [Lectures on transport phenomenon in plasma]. Dolgoprudnyy, Intellect Publ. House, 2008. 256 p.
- [15] Kulikovskiy A.G., Lyubimov G.A. *Magnitnaya gidrodinamika* [Magnetic hydrodynamics]. Moscow, Logos Publ., 2005. 328 p.
- [16] Allen C.W. *Astrophysical quantities*. The Athlone Press, 1973.
- [17] Gray D.F. *The observation and analysis of stellar photospheres*. New York, Wiley, 1976.

Gavrikov M.B. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Senior Research Scientist of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Miusskaya ploshchad' 4, Moscow, 125047 Russian Federation), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Tayurskiy A.A. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Research Scientist of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Miusskaya ploshchad' 4, Moscow, 125047 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Gavrikov M.B., Tayurskiy A.A. Spatial Nonlinear Alfvén Wave Absorption by Dissipative Plasma. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 2, pp. 40–59. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-2-40-59