

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ГРУНТОВ ОСНОВАНИЙ ФУНДАМЕНТОВ В УСЛОВИЯХ МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ПОРОД

В.И. Васильев<sup>1</sup>  
М.В. Васильева<sup>1</sup>  
И.К. Сирдитов<sup>1</sup>  
С.П. Степанов<sup>1,2</sup>  
А.Н. Цеева<sup>3</sup>

vasvasil@mail.ru  
vasilyevadotmdotv@gmail.com  
sirditov@gmail.com  
cepe2a@inbox.ru  
antseeva@mail.ru

<sup>1</sup> Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Якутск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Институт мерзлотоведения им. П.И. Мельникова СО РАН, Якутск, Российская Федерация

<sup>3</sup> ОАО «Якутский государственный проектный, научно-исследовательский институт строительства», Якутск, Российская Федерация

---

### Аннотация

Рассмотрена математическая модель, описывающая процесс теплопереноса с фазовыми переходами. Сформулирована математическая постановка задачи с соответствующими граничными условиями, построена ее численная реализация на основе метода конечных элементов, позволяющая учитывать усложнение геометрии устройств свайных фундаментов. Выполнено численное сравнение двумерных и трехмерных моделей для расчета теплопереноса в грунтах с учетом установки свай и наличия сезонных колебаний температуры окружающей среды. Приведены результаты численного моделирования температурного режима грунтов, содержащего несколько свай, установленных в грунт со слоистым строением. Рассмотрены элементы разработанного прикладного обеспечения для прогнозирования температурного режима грунтов в условиях криолитозоны

### Ключевые слова

*Численное моделирование, задача Стефана, метод конечных элементов, многолетнемерзлый грунт, высокопроизводительные вычислительные системы, свайные фундаменты, программное обеспечение*

Поступила в редакцию 27.05.2016  
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

---

*Работа выполнена при поддержке договора № Д-2400-14*

**Введение.** При строительстве зданий или инженерных сооружений на многолетнемерзлых основаниях необходимо выполнять численное исследование температурного режима грунтовых оснований и фундаментов с учетом процессов тепло-массопереноса с фазовыми переходами в целях определения их несущей способности и устойчивости во избежание дальнейших проблем с эксплуатацией. В настоящее время прогнозирование термомеханического состояния протаивающих/промерзающих насыщенных грунтов и их взаимодействие со зданиями и

сооружениями является особенно актуальной задачей с учетом глобального потепления и принятой программой освоения Арктики.

Принимая во внимание необходимость учета взаимовлияния нескольких сооружений в условиях густой застройки городских территорий (населенных пунктов) необходимо ориентироваться на трехмерные модели со сложной геометрией исследуемого объекта. Усложнение геометрии также вызывает учет устройств свайных фундаментов, что приводит к необходимости локального сгущения расчетных сеток. В свою очередь, это существенно увеличивает трудоемкость задачи. Таким образом, для повышения эффективности расчетов следует разрабатывать современные вычислительные алгоритмы для высокопроизводительных вычислительных систем.

Для моделирования теплового режима грунта в условиях криолитозоны применяют закон сохранения энергии с учетом фазовых переходов поровой влаги вода–лед [1–3]. При построении математической модели учитывают такие основные климатические параметры, как амплитуда температуры воздуха, составляющие радиационно-теплового баланса, мощность и плотность снежного покрова. Количественные значения основных климатических параметров необходимы для построения математической модели, с помощью которой можно прогнозировать изменения температурного режима грунтов, а также кинетики и механики развития криогенных процессов и их воздействия на глубину протаивания грунта [4]. Вычислительный алгоритм основан на конечно-элементной аппроксимации температурного поля по пространственным переменным. Для аппроксимации по времени строят стандартную неявную разностную схему с линеаризацией с предыдущего временного слоя [5–7].

Особенность моделирования рассматриваемых проблем криолитозоны — ярко выраженная геометрическая разномасштабность моделируемых объектов: небольшие размеры свай и большие размеры области моделирования процесса. Таким образом, даже при использовании существенно неравномерных расчетных сеток, их размеры получаются достаточно большими — типичная расчетная сетка содержит несколько миллионов ячеек. Численное решение указанных задач невозможно без применения вычислительных систем параллельной архитектуры.

В настоящее время отсутствует программное обеспечение для прогнозирования температурного режима и механического состояния грунтов в условиях вечной мерзлоты, учитывающего приведенные выше особенности. В существующих программах для моделирования мерзлых оснований с учетом фазовых переходов используется, как правило, метод конечных разностей, вследствие чего имеются ограничения в геометрии расчетной области и отсутствует возможность учета в полной мере всех геометрических особенностей моделируемых объектов. Для моделирования общих задач используют конечно-элементные пакеты программ, которые являются многопрофильными, лицензии для таких программ имеют высокую стоимость.

**Математическая модель и конечно-элементная аппроксимация задачи.**

Приведем математическую модель, описывающую процессы передачи теплоты в мерзлых и талых грунтах и учитывающую наличие фазовых переходов поровой влаги в грунте при некоторой заданной температуре фазового перехода  $T^*$  в области  $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$ :

$$\Omega^+(t) = \{x \mid x \in \Omega, T(x, t) > T^*\}, \quad \Omega^-(t) = \{x \mid x \in \Omega, T(x, t) < T^*\}.$$

Здесь  $\Omega^+$  — область, занятая талым грунтом, где температура превышает температуру фазового перехода;  $\Omega^-$  — область, занятая мерзлым грунтом, фазовый переход происходит на границе раздела фаз  $S$  [8, 9].

Тепловые процессы, сопровождающиеся фазовыми превращениями, поглощением и выделением скрытой теплоты, описывают классической моделью Стефана [1, 2, 10]

$$(\alpha(\varphi) + \rho^+ L \varphi') \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(\varphi) \operatorname{grad} T) = 0, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — коэффициент конвективного теплообмена;  $\rho^+, \lambda^+, \rho^-, \lambda^-$  — плотность и теплопроводность талого и мерзлого грунтов;  $L$  — удельная теплота фазового перехода. Для коэффициентов уравнения (1) имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \rho^- c^- + \varphi(\rho^+ c^+ - \rho^- c^-); & \lambda(\varphi) &= \lambda^- + \varphi(\lambda^+ - \lambda^-); \\ c^- \rho^- &= (1-m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_i\rho_i; & \lambda^- &= (1-m)\lambda_{sc} + m\lambda_i; \\ c^+ \rho^+ &= (1-m)c_{sc}\rho_{sc} + mc_w\rho_w; & \lambda^+ &= (1-m)\lambda_{sc} + m\lambda_w \end{aligned}$$

и

$$\varphi = \begin{cases} 0, & T < T^*; \\ 1, & T > T^*. \end{cases}$$

Здесь  $c^+, c^-$  — удельная теплоемкость талого и мерзлого грунтов;  $m$  — пористость;  $sc, w, i$  — индексы, обозначающие каркас пористой среды, воды и льда.

Скачок функции Хевисайда  $\varphi$  в точке  $T^*$  разложим простейшим образом в интервале  $T^* - \Delta < T < T^* + \Delta$ , в результате чего получим непрерывную функцию  $\varphi_\Delta$  [13–15]:

$$\varphi_\Delta = \begin{cases} 0, & T \leq T^* - \Delta; \\ \frac{T - T^* + \Delta}{2\Delta}, & T^* - \Delta < T < T^* + \Delta; \\ 1, & T \geq T^* + \Delta; \end{cases} \quad \varphi'_\Delta = \begin{cases} 0, & T \leq T^* - \Delta; \\ \frac{1}{2\Delta}, & T^* - \Delta < T < T^* + \Delta; \\ 0, & T \geq T^* + \Delta. \end{cases}$$

Таким образом, запишем нелинейное параболическое уравнение для температуры в области  $\Omega$ :

$$(\alpha(\varphi_\Delta) + \rho_l L \varphi'_\Delta) \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\lambda(\varphi_\Delta) \operatorname{grad} T) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) дополним начальным условием [4]

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \tag{3}$$

и граничными условиями

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{Q(1-A) + I - \alpha(T - T_{air})}{\alpha R + 1}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1; \tag{4}$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \tag{5}$$

где  $Q$  — суммарная коротковолновая радиация;  $A$  — альбедо;  $I$  — длинноволновое излучение;  $T_{air}$  — температура окружающей среды;  $R$  — коэффициент термического сопротивления наземного покрова (зимой — снега, летом — растительности).

Уравнение (2) с соответствующими граничными и начальными условиями аппроксимируют по пространственным переменным методом конечных элементов [11]. Для аппроксимации по времени применяют неявную разностную схему [5, 6]. Для линеаризации уравнения используем простейшую линеаризацию, когда коэффициенты зависят от значения искомой функции предыдущего временного слоя [12].

Для каждого временного слоя запишем вариационную постановку задачи: найти  $T \in V(\Omega)$  такую, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\alpha(\varphi_\Delta^n) + \rho_l L \varphi'_\Delta^n) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} \nu dx + \int_{\Omega} (\lambda(\varphi_\Delta^n) \operatorname{grad} T^{n+1}, \operatorname{grad} \nu) dx + \\ & + \int_{\Gamma_1} \frac{\alpha}{\alpha R + 1} T^{n+1} \nu ds = \int_{\Gamma_1} \frac{Q(1-A) + I + \alpha T_{air}}{\alpha R + 1} \nu ds, \end{aligned} \tag{6}$$

где  $\forall \nu \in V(\Omega) = H^1(\Omega)$ . Отметим, что в качестве базисных функций будем использовать линейные базисные функции.

Запишем уравнение (6) в виде

$$m(T^{n+1}, \nu) + \tau a(T^{n+1}, \nu) = \tau l(\nu) + m(T^n, \nu), \quad \forall \nu \in H_0^1, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} m(T, \nu) &= \int_{\Omega} (\alpha(\varphi_\Delta^n) + \rho_l L \varphi'_\Delta^n) T \nu dx; \\ a(T, \nu) &= \int_{\Omega} (\lambda(\varphi_\Delta^n) \operatorname{grad} T, \operatorname{grad} \nu) dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\alpha}{\alpha R + 1} T \nu ds; \\ l(\nu) &= \int_{\Gamma_1} \frac{Q(1-A) + I + \alpha T_{air}}{\alpha R + 1} \nu ds. \end{aligned} \tag{8}$$

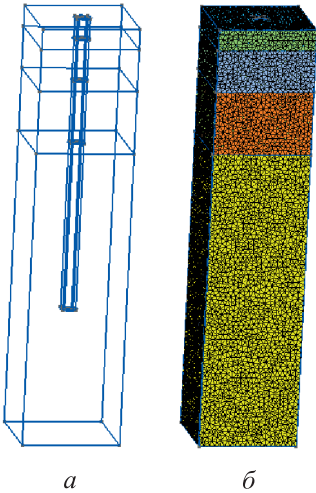
Здесь  $T^{n+1} = \sum_{j=1}^N U_j^{n+1} \Phi_j$ , где  $U^{n+1} = \{U_j^{n+1}\}_{j=1}^N$  — вектор неизвестных на момент

времени  $t_{n+1}$ , определенный в узлах расчетной сетки;  $N$  — число узлов сетки. Поскольку используем линейные базисные функции, вариационную постановку (8) запишем в матричной форме

$$SU^{n+1} = Q; \quad S = M + \tau A; \quad Q = MU^n + \tau F,$$

где  $S$  — оператор перехода на новый временной слой;  $M$  — матрица масс (определяемая билинейной формой  $m(T, v)$ );  $A$  — матрица жесткости (определяемая билинейной формой  $a(T, v)$ );  $F$  — вектор правой части (определяемый линейной формой  $l(v)$ ).

**Численное решение задачи с учетом установки сваи в трехмерной постановке.** Рассмотрим результаты численного моделирования задачи расчета температурного режима грунтов с учетом установки сваи в трехмерной постановке (рис. 1).



**Рис. 1.** Расчетная геометрия (а) и тетраэдральная сетка (б) для задачи теплопереноса в грунтах с учетом установки одной сваи

Вычислительный алгоритм решения поставленной задачи приведен ниже.

1. При  $t < t_p$  вычисляют температуру грунта без учета свай. Геометрию изначально строят с учетом свай, т. е. в геометрии уже определены сваи. В этом случае до момента укладки свай области внутри свай описываются свойствами окружающего слоя грунта.

2. Если  $t = t_p$  (временной момент укладки свай), то добавление свай в задачу происходит следующим образом:

2.1) принимаем температуру для всей области, равной температуре предыдущего временного слоя;

2.2) изменяем теплофизические характеристики в областях сваи и окружающей среды (например, бетона);

2.3) задаем температуру сваи как температуру

воздуха в момент укладки свай;

2.4) принимаем температуру бетона, которым заливают сваи, равной  $20^\circ\text{C}$ .

3. При  $t_{\max} > t > t_p$  решают задачу распространения теплоты с учетом измененных объектов.

Расчетная область является трехмерной и достаточно сложной. Для учета геометрических факторов необходимо использовать мелкие нерегулярные расчетные сетки [9], в частности, предложенные выше конечно-элементные аппроксимации по пространству.

Приведем результаты численного моделирования задачи распространения теплоты в грунте в условиях криолитозоны при установке одной сваи в трех-

мерной постановке. Сваю укладывают на 365 сут. Расчеты проведены при  $t_{\max} = 3$  года с шагом  $\tau = 1$  сут. с начальной температурой  $T_0 = -3$  °С. Предположим, что температура фазового перехода составляет  $T^* = 0$  °С.

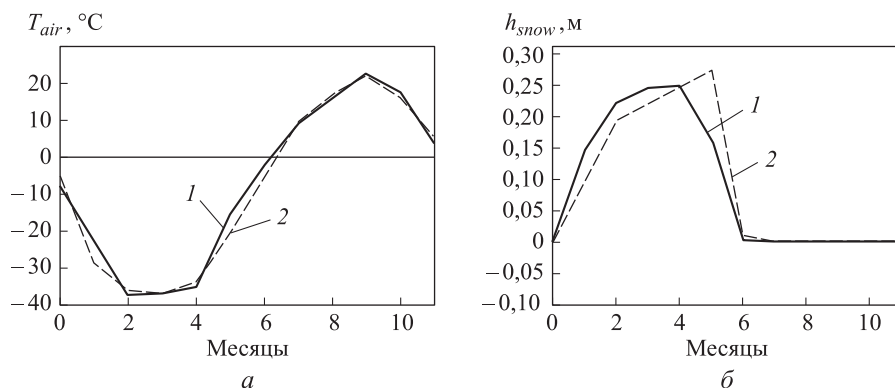
Расчетная область размерами  $L_x = 6$  м,  $L_y = 6$  м и  $L_z = 20$  м включает в себя несколько инженерно-геологических слоев грунта и одну сваю размерами  $L_x = 0,2$  м,  $L_y = 0,2$  м и  $L_z = 14$ , погруженную в скважину радиусом  $r = 0,2$  м и длиной 14 м (см. рис. 1). Строители используют следующую технологию установки свай: пробуривают скважину глубиной, равной длине сваи, опускают сваю, оставшуюся при этом пустоту заливают бетоном. Расчет проводят на сетке, содержащей 85 270 узлов и 479 975 ячеек. Геометрическая область и расчетная сетка были построены с помощью программы *Gmsh*. Температура на дневной поверхности принята по данным метеостанции (табл. 1), расположенной в Якутске. Теплофизические характеристики были приняты в соответствии со СНиП 2.02.04–88 (см. табл. 1).

Таблица 1

**Расчетные значения физических и теплофизических характеристик талых (числитель) и мерзлых (знаменатель) грунтов**

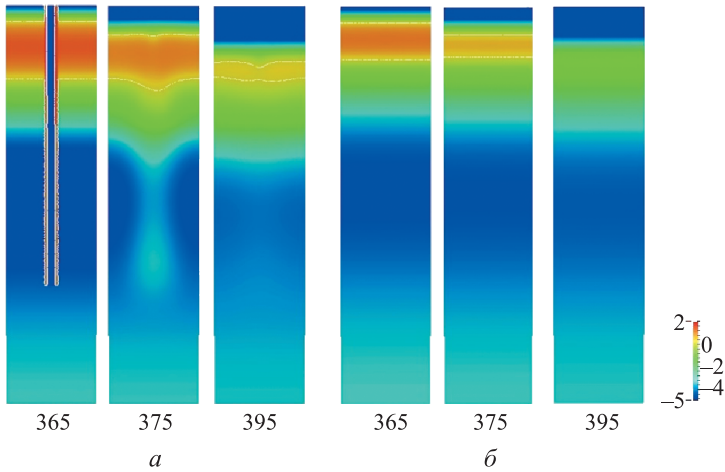
Грунт	Объемная теплоемкость, Дж/(м <sup>3</sup> · °С), 10 <sup>6</sup>	Теплопроводность, Вт/(м · °С)	Удельная теплота таяния, кДж/кг
Суглинок заторфяной	3,15/ 2,35	2,5 / 2,73	71 957
Суглинок	3,15/ 2,35	1,51 / 1,70	71 957
Песок	2,01/ 1,67	1,51 / 1,86	60 437

Результаты численного моделирования температуры воздуха для различных моментов времени представлены на рис. 2. Расчеты выполнены на вычислительном кластере «Ариан Кузьмин» Северо-Восточного федерального университета. В качестве итерационного решателя использован метод сопряженных градиентов (CG) с предобуславливателем (SOR) [13]. Время расчета составило 139 с, суммарное число итераций — 27 184 для 32 процессов [14].



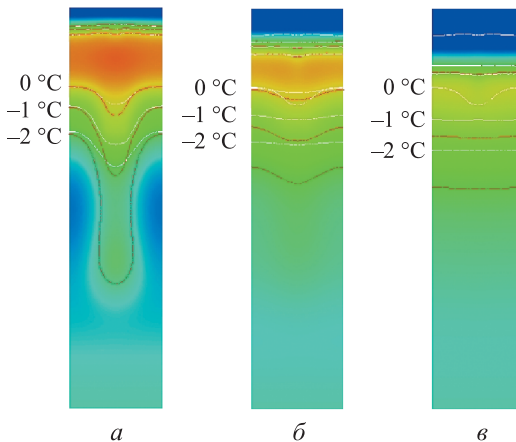
**Рис. 2.** Результаты численного моделирования температуры воздуха (а) и высота снега (б) за 1 год (1) и 2 года (2)

Распределение температуры для различных моментов времени с учетом установки сваи и без установки сваи представлено на рис. 3. Приведенные результаты расчета иллюстрируют перепад температуры, происходящий в грунте при установке сваи.



**Рис. 3.** Распределение температуры для различных моментов времени с учетом установки сваи (а) и без установки сваи (б)

Результаты численного сравнения результатов 3D-моделирования с 2D-моделированием представлены на рис. 4. Распределения температуры существенно отличаются, поскольку при 2D-моделировании сваи рассматривают как траншеи, что будет увеличивать влияние на температуру. Следовательно, необходимо проводить расчеты в полной трехмерной постановке.



**Рис. 4.** Сравнение изотерм при температуре  $T = 0, -1$  и  $-2$  °C, полученных при 2D- (красный цвет) и 3D-моделировании (серый цвет) для 10 дней (а), одного (б) и двух (в) месяцев

**Численное моделирование теплопереноса в грунте с учетом установки нескольких свай для трехмерной комплексной геометрии.** Рассмотрим числен-

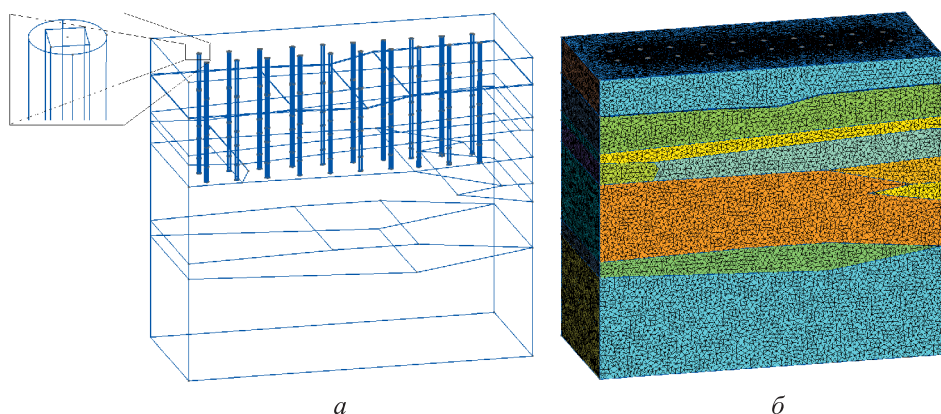
ное моделирование задачи теплопереноса с фазовым переходом в трехмерной комплексной геометрии с учетом наличия нескольких геологических слоев и установки большого числа свай с малым диаметром и приведем результаты многовариантного расчета задачи. Численное моделирование задачи проведено при следующих вариантах параметров расчетной области.

*Вариант 1.* Грунт с почвенно-растительным слоем.

*Вариант 2.* Грунт после удаления почвенно-растительного слоя.

*Вариант 3.* Слоистый грунт с учетом установки свай.

Особенность моделирования задач теплопереноса в грунтах — ярко выраженная геометрическая разномасштабность моделируемых объектов: небольшие диаметры свай и большие размеры области моделирования процесса. При прикладном моделировании, даже при использовании существенно неравномерных расчетных сеток, размерность задачи получается достаточно большой. В настоящее время численное решение таких задач невозможно без применения вычислительных систем параллельной архитектуры (рис. 5).



**Рис. 5.** Расчетная геометрия (а) и тетраэдральная сетка (б) для задачи теплопереноса в грунтах с учетом установки 20 свай

Приведем результаты численного моделирования до удаления и после удаления почвенно-растительного слоя (варианты 1 и 2). При моделировании с учетом почвенно-растительного слоя (вариант 1) были использованы граничные условия (4). При моделировании без учета почвенно-растительного слоя (вариант 2) альбедо  $A$  задавали приблизительно в 2 раза больше. Температура на дневной поверхности принята по данным метеостанции, расположенной в Якутске. Теплофизические характеристики приведены в табл. 2.

Численное моделирование выполнено с учетом приведенных выше параметров. Геометрическая область состоит из нескольких инженерно-геологических слоев грунта и содержит 20 свай радиусом  $r = 0,2$  м и длиной 14 м. Расчетная область имеет размеры  $L_x = 15$ ,  $L_y = 54$  и  $L_z = 50$  м. Расчетная сетка содержит приблизительно 260 тыс. узлов и около 1,5 млн тетраэдральных ячеек. Расчеты проведены для  $t_{\max} = 2$  года с шагом  $\tau = 1$  сут.



**Расчетные значения физических и теплофизических характеристик  
талых (числитель) и мерзлых (знаменатель) грунтов**

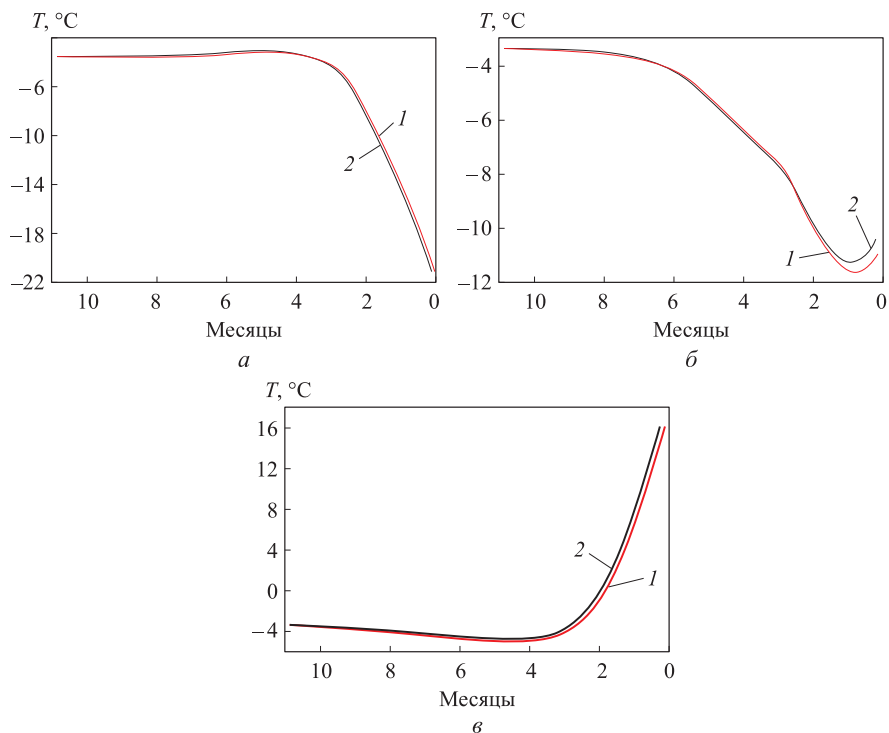
Грунт	Объемная теплоемкость, Вт/(м <sup>3</sup> · ч · °С)	Теплопроводность, Вт/(м · ч · °С)	Удельная теплота таяния, (Вт · ч)/м <sup>3</sup>
Насыпь (песок)	470 /435	0,90/0,96	7 070
Почвенно-растительный слой	390/270	0,76/ 1,40	1 500
Песок: мелкий, средней степени влагонасыщения	770/570	1,91/2,14	34 870
пылеватый, слабодистый	780/590	2,15/2,37	32 200
мелкий, малой степени водонасыщения	780/590	2,15/ 2,37	29 000
Суглинок легкий: пылеватый льдистый	666/ 524	1,37/1,72	20 925
слабодистый	830/630	1,45/1,66	20 550
Супесь пылеватая, слабодистая	780/590	1,62/1,74	24 550

Распределение температуры вдоль средней линии приведено на рис. 6 (варианты 1 и 2). Представленные результаты аналогичны как при наличии, так и при отсутствии почвенно-растительного слоя. Распределение температуры после удаления почвенно-растительного слоя и добавления насыпи (вариант 3) для  $t = 365, 375, 395$  дней представлено на рис. 7, а–в.

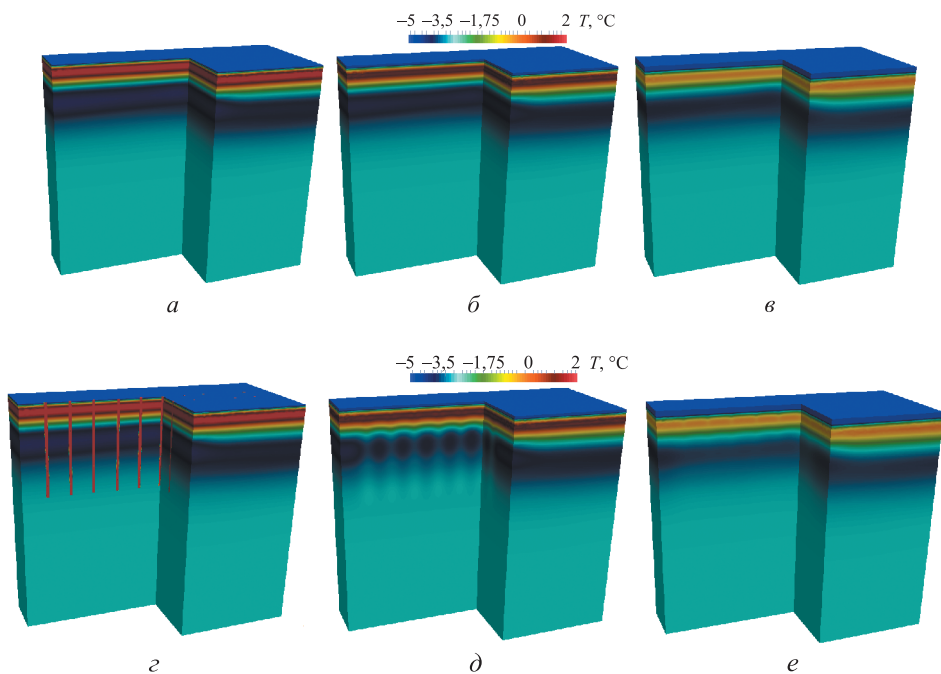
Сравним результаты моделирования в случае установки свай и без них. Результаты моделирования после установки свай приведены на рис. 7, г–е. Численное сравнение температуры вдоль линии  $y = 48$  представлено на рис. 8 и иллюстрирует оттаивание грунта.

По приведенным результатам численного моделирования задач теплопереноса в грунтах в условиях криолитозоны с учетом таких факторов, как удаление почвенно-растительного слоя, добавления насыпи и установки свай, можно сделать следующие выводы:

- численные расчеты температурного поля грунтов с учетом наличия почвенно-растительного слоя и с использованием теплообмена по закону Ньютона с коэффициентом теплообмена, учитывающим толщину почвенно-растительного слоя и его теплопроводность, позволяют получить близкие результаты;
- возведение насыпи под здание из подходящих материалов достаточной высоты может сохранить грунт под зданием в мерзлом состоянии;
- моделирование температурного влияния свай показывает, что их установка может привести к кратковременному повышению температуры окружающих мерзлых грунтов, время стабилизации температурного поля грунта зависит от температуры свай и составляет 3–12 мес.



**Рис. 6.** Распределение температуры вдоль средней линии при наличии почвенно-растительного слоя (1) и после его удаления (2) для  $t = 455$  (а), 545 (б), 635 (в) дней



**Рис. 7.** Распределение температуры после добавления насыпи (а-в) и с учетом установки свай (г-е) для  $t = 365$  (а, г), 375 (б, д), 395 (в, е) дней

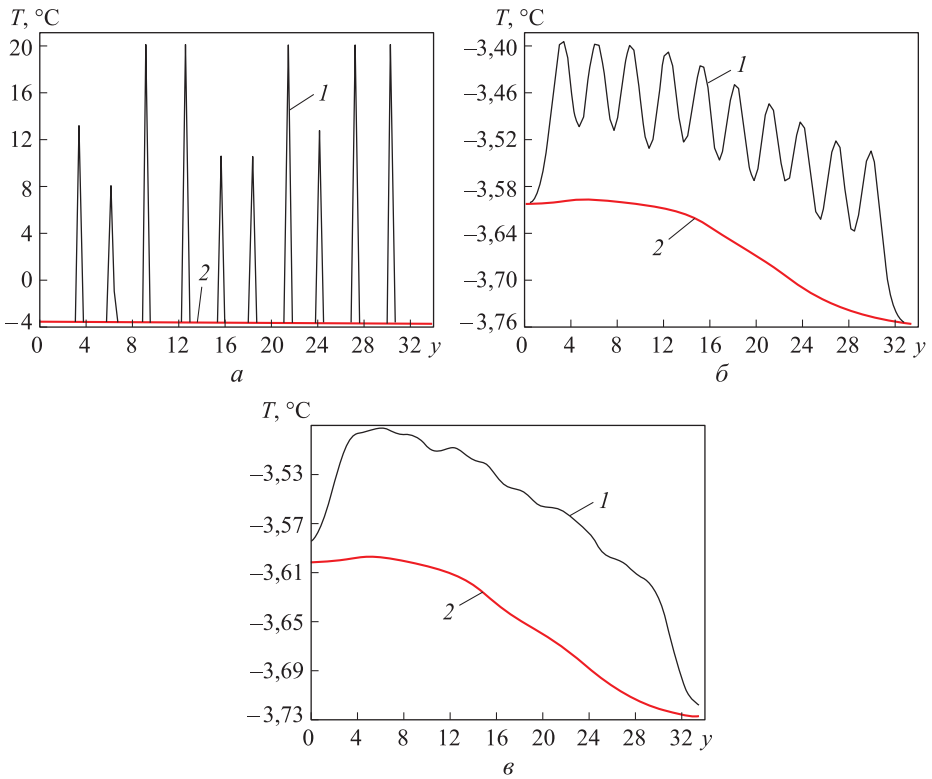


Рис. 8. Распределение температуры вдоль линии  $y = 48$  с учетом установки свай (1) и без них (2) для  $t = 365$  (а), 375 (б), 395 (в) дней

**Разработка прикладного программного обеспечения для прогнозирования температурного режима грунтов.** Процесс численного моделирования прикладной задачи включает в себя несколько этапов:

- построение геометрии;
- генерация сетки;
- задание параметров задачи и вычислительного алгоритма;
- решение задачи;
- визуализация полученных результатов.

В соответствии с перечисленными этапами разрабатываемое программное обеспечение имеет аналогичные модули для каждого этапа решения задачи.

Рассмотрим основные модули разработанного прикладного программного обеспечения для прогнозирования температурного режима грунтов и несущей способности мерзлых оснований фундаментов. Прикладное программное обеспечение разработано с использованием библиотек *Qt*, *FEniCS*, *Gmsh* и *VTK* и состоит из модулей задания параметров и конфигурации решателя, подготовки геометрии и генерации расчетной сетки, расчета температурного режима грунтов, обработки результатов и визуализации.

Рассмотрим примеры использования представленных модулей прикладного программного обеспечения.

**Модуль задания параметров и конфигурации решателя.** Внешний интерфейс реализован в виде графического интерфейса с помощью среды разработки *Qt Creator* с использованием библиотеки *Qt*.

Основной структурой для числовых, текстовых и коэффициентных данных выбран формат *.xml*, в котором хранятся файлы:

- *info.xml* (вкладка «Проекты») — файл проекта, в котором хранится основная информация, т. е. комментарии, начальное и конечное время и т. д., а также свойства физических объектов для редактора геометрии, создание файла *info.xml* происходит при создании проекта;

- *problem.xml* (вкладка «Геометрия») — файл, в котором хранятся коэффициенты инженерно-геологических элементов (ИГЭ) и свай, конфигурация этого файла происходит при создании расчетной области и конфигурации свойств среды для каждой создаваемой подобласти;

- *dolfin.xml* (вкладка «Задача») — файл решателя, конфигурация которого просходит при задании и запуске решателя позволяет задавать граничные и начальные условия задачи.

Все файлы проекта лежат в отдельной папке, название которой определяется названием проекта. Такой метод выбран для удобного хранения и переноса проекта.

**Модуль подготовки геометрии и генерации расчетной сетки.** Этот модуль связан с построением геометрической области, в которой будет проводиться численное моделирование задач теплопереноса с учетом фазовых переходов. Затем для построенной геометрической области выполняют генерацию расчетной сетки.

Построение геометрической модели в прикладном программном обеспечении реализовано с использованием следующих геометрических примитивов: точки; линии; поверхности; объемы. Для созданных примитивов можно задать дополнительные свойства. Построенная модель в редакторе прикладного программного обеспечения сохраняется в виде *geo*-файла (формат, используемый в программе *Gmsh*). Геометрическую область также можно создавать и редактировать с помощью любого текстового редактора или напрямую программой *Gmsh*, а затем подгружать ее. Отметим, что такой модуль является оберткой над программой *Gmsh* и упрощает создание специфичных геометрических примитивов, необходимых для рассматриваемой задачи, таких как сваи и ИГЭ.

При установке свай присутствует возможность задания глубины залегания сваи, уровня отсчета глубины сваи, ширины ямы и сваи, число свай и расстояние между ними. При добавлении части свай область, находящуюся вне расчетной области, удаляют и рассматривают только с верхней границы. Если уровень свай находится ниже верхней границы, то сваи автоматически удлиняют до верхней границы.

Для численного решения математической модели необходимо сгенерировать расчетную сетку в построенной геометрической области. Задача построения расчетной сетки заключается в нахождении отображения, которое перево-

дит узлы сетки из физической области в вычислительную. Это отображение должно быть однозначным и иметь сгущение в тех областях, где возможно появление больших градиентов искомых функций. В одномерном случае элементами сетки являются отрезки, в двумерном — треугольники или четырехугольники, а в трехмерном — тетраэдры или призмы.

Сгенерированная расчетная сетка представлена на рис. 9. На этом этапе построения расчетной сетки можно визуализировать расчетную область для построенной геометрии. Для просмотра области можно использовать три основных режима. В режиме сетки (wireframe, который стоит по умолчанию) расчетная область представлена в виде множества связанных треугольных элементов. Режим точек (point) отображает область в виде точек, а режим поверхность (surface) — в виде поверхности.

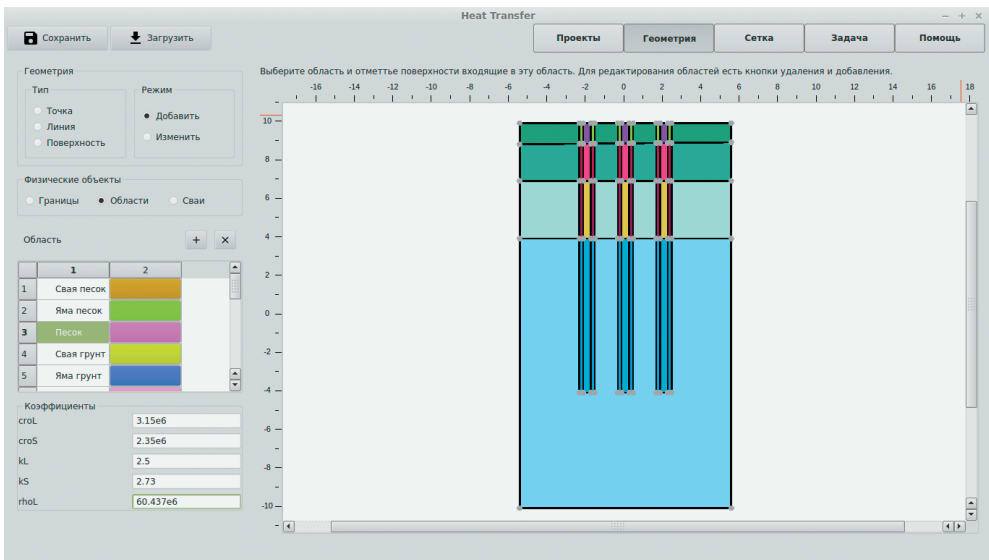


Рис. 9. Сгенерированная расчетная сетка на примере распределения температуры (180 день с момента установки свай)

**Модуль расчета температурного режима грунтов и модуль обработки результатов и визуализации.** После построения геометрической области, расчетной сетки и задания необходимых параметров задачи переходим во вкладку «Задача».

Для проведения численного моделирования задачи строят математическую модель моделируемого процесса, а затем с использованием методов аппроксимации — дискретную задачу, которую численно решают. Представленные алгоритмы реализованы с помощью вычислительной библиотеки *FEniCS* [15], позволяющей автоматизировать решение задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных с помощью метода конечных элементов. Библиотека *FEniCS* находится в свободном доступе и позволяет проводить численные расчеты для задач многих областей инженерии и науки.

Решение задач с помощью библиотеки *FEniCS* предполагает несколько этапов [15]:

- определение дифференциального уравнения в частных производных, постановка граничных условий и приведение задачи к вариационной формулировке;
- описание вариационной формулировки задачи в формате UFL (Unified Form Language) и генерация классов из UFL-файлов;
- построение геометрии задачи и генерация расчетной сетки;
- написание программы и проведение вычислительных экспериментов.

Следует отметить, что время расчета прямо зависит от числа узлов сетки. При этом размер сетки напрямую зависит от числа свай и их размеров, поскольку наличие небольших элементов (свай) приводит к необходимости локального сгущения сетки.

После решения задачи теплопереноса в грунтах для построенной геометрической области появляется возможность визуализации полученных результатов. Для работы с визуализацией имеется меню, в котором содержится возможность просмотра результатов в режимах анимации или визуализации решения на конкретном временном слое.

В разрабатываемом прикладном программном обеспечении имеется возможность визуализации расчетных значений температуры с использованием изолиний для конкретных фиксированных значений температуры. При режиме просмотра с применением контуров (изолиний) в программе можно задать максимальное и минимальное значение температуры, а также число цветов для их визуализации.

Результаты работы программы сохраняются в формате *.pvd*, который используют для хранения данных программой *ParaView*, формат основан на структуре *.xml*. Соответственно, полученные результаты можно открыть в программе *ParaView*.

**Заключение.** Рассмотрено математическое моделирование температурного режима грунтов оснований фундаментов в условиях многолетнемерзлых пород. Математическая модель позволяет учитывать фазовый переход, происходящий в грунтах за счет сезонных колебаний температуры окружающей среды и установки свай. Представленная вычислительная реализация, основанная на методе конечных элементов с использованием линейных базисных функций, позволяет применять треугольные и тетраэдральные неструктурированные расчетные сетки. Это позволяет строить и проводить расчет в сложных геометрических расчетных областях с учетом установки свай и неоднородности грунтов.

В рамках проведенных исследований создано уникальное прикладное программное обеспечение, позволяющее проводить численное исследование температурного режима грунтов оснований фундаментов зданий и инженерных сооружений на многолетнемерзлых породах, содержащих несколько ИГЭ. Программное обеспечение позволяет строить комплексные расчетные области с учетом ИГЭ оснований, а также задавать геометрическое расположение свай-

ных фундаментов. С его помощью проведено численное моделирование задач теплопереноса в грунтах с учетом установки свай в толщу многолетнемерзлых грунтов. Исследовано влияние установки свай на температурный режим многолетнемерзлых грунтов как в двумерной, так и в трехмерной постановках на вычислительном кластере Северо-Восточного федерального университета.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* Вычислительная теплопередача. М.: Едиториалл УРСС, 2003. 784 с.
2. *Васильев В.И., Максимов А.М., Петров Е.Е., Цыпкин Г.Г.* Тепломассоперенос в промерзающих и протаивающих грунтах. М.: Наука, 1996. 224 с.
3. *Васильев В.И., Попов В.В.* Численное решение задачи промерзания грунта // Математическое моделирование. 2008. Т. 20. № 7. С. 119–128.
4. *Павлов А.В.* Теплофизика ландшафтов. Новосибирск: Наука, 1979. 284 с.
5. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 656 с.
6. *Васильева М.В., Павлова Н.В.* Конечно-элементная реализация задачи замораживания фильтрующих грунтов // Математические заметки ЯГУ. 2013. Т. 20. № 1. С. 195–205.
7. *Logg Anders, Mardal Kent-Andre, Wells Garth N.* Automated solution of differential equations by the finite element method. The FEniCS Book, 2011. 732 p.
8. *Крылов Д.А., Сидняев Н.И., Федотов А.В.* Математическое моделирование распределения температурных полей // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 7. С. 3–27.
9. *Gornov V.F., Stepanov S.P., Vasilyeva M.V., Vasilyev V.I.* Mathematical modeling of heat transfer problems in the permafrost // AIP Conference Proceedings. 2014. Vol. 1629. P. 424–431. DOI: 10.1063/1.4902304
10. *Вабищевич П.Н., Васильева М.В., Павлова Н.В.* Численное моделирование термостабилизации фильтрующих грунтов // Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 9. С. 111–125.
11. *Вабищевич П.Н., Васильева М.В., Горнов В.Ф., Павлова Н.В.* Математическое моделирование искусственного замораживания грунтов // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19. № 4. С. 19–31.
12. *Математическое моделирование теплового режима железнодорожного полотна в условиях криолитозоны / П.Н. Вабищевич, С.П. Варламов, В.И. Васильев, М.В. Васильева, С.П. Степанов // Вестник СВФУ им. М.К. Аммосова. 2013. Т. 10. № 5. С. 5–11.*
13. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2003. 528 p.
14. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 608 с.
15. *Вычислительные технологии. Профессиональный уровень / М.Ю. Антонов и др.; под ред. П.Н. Вабищевича.* Якутск: Издательский дом СВФУ, 2014. 308 с.

**Васильев Василий Иванович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий научно-исследовательской кафедрой «Вычислительные технологии» Института математики и информатики СВФУ им. М.К. Аммосова (Российская Федерация, Республика Саха, 677027, Якутск, ул. Белинского, д. 58).

**Васильева Мария Васильевна** — канд. физ.-мат. наук, доцент-исследователь научно-исследовательской кафедры «Вычислительные технологии» Института математики и информатики СВФУ им. М.К. Аммосова (Российская Федерация, Республика Саха, 677027, Якутск, ул. Белинского, д. 58).

**Сирдитов Иван Константинович** — старший преподаватель кафедры «Информационные технологии» Института математики и информатики СВФУ им. М.К. Аммосова (Российская Федерация, Республика Саха, 677027, Якутск, ул. Белинского, д. 58).

**Степанов Сергей Павлович** — аспирант научно-исследовательской кафедры «Вычислительные технологии» Института математики и информатики СВФУ им. М.К. Аммосова (Российская Федерация, Республика Саха, 677027, Якутск, ул. Белинского д. 58), сотрудник Института мерзлотоведения им. П.И. Мельникова СО РАН (Российская Федерация, Республика Саха, 677010, Якутск, ул. Мерзлотная, д. 36).

**Цеева Анастасия Николаевна** — заведующая отделом оснований и фундаментов ОАО «Якутский государственный проектный, научно-исследовательский институт строительства» (ЯкутПНИИС) (Российская Федерация, Республика Саха, 677000, Якутск, ул. Дзержинского, д. 20).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Васильев В.И., Васильева М.В., Сирдитов И.К., Степанов С.П., Цеева А.Н. Математическое моделирование температурного режима грунтов оснований фундаментов в условиях многолетнемерзлых пород // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 1. С. 142–159. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-142-159

## **MATHEMATICAL MODELING OF TEMPERATURE REGIME OF SOILS OF FOUNDATION ON PERMAFROST**

V.I. Vasilyev<sup>1</sup>  
M.V. Vasilyeva<sup>1</sup>  
I.K. Sirditov<sup>1</sup>  
S.P. Stepanov<sup>1,2</sup>  
A.N. Tseeva<sup>3</sup>

vasvasil@mail.ru  
vasilyevadotmdotv@gmail.com  
sirditov@gmail.com  
cepe2a@inbox.ru  
antseeva@mail.ru

<sup>1</sup> North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Melnikov Permafrost Institute, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Yakutsk, Russian Federation

<sup>3</sup> Yakut State Design, Research Institute of Construction, Yakutsk, Russian Federation

---

### **Abstract**

In the article we consider a mathematical model describing the heat transfer processes in the frozen and thawed soils. We provide a mathematical formulation of the problem with the appropriate initial and boundary conditions. Numerical implementation is based on the finite-element method, which allows us to take into account the complication caused by difficulties with geometry, since piles are small comparing with whole domain. In this paper

### **Keywords**

*Numerical simulation, Stefan problem, finite-element method, permafrost, high-performance computing systems, pile foundations, software*



we include the comparison of two-dimensional and three-dimensional models of heat transfer calculation in a soil, taking into account the installation of piles and the seasonal fluctuations of ambient temperature. We present the results of numerical simulation of soil temperature on the example of engineering solutions containing several piles installed in the soil with a layered structure. We discuss the elements of the developed applied software for the predicting the temperature regime of soils on permafrost. Numerical simulations of the problem in three-dimensional case on the computational cluster of NEFU "Arian Kuzmin" are provided

## REFERENCES

- [1] Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Computational heat transfer. Vol. 1. Mathematical Modelling. Wiley, 1995. 418 p.
- [2] Vasilyev V.I., Maksimov A.M., Petrov E.E., Tsyppkin G.G. Teplomassoperenos v promerzayushchikh i protaivayushchikh gruntakh [Heat and mass transfer in freezing and melting soils]. Moscow, Nauka Publ., 1996. 224 p.
- [3] Vasilyev V.I., Popov V.V. Numerical solution of the soil freezing problem. *Math. Models Comput. Simul.*, 2009, vol. 1, iss. 4, pp. 419–427. DOI: 10.1134/S2070048209040012
- [4] Pavlov A.V. Teplofizika landshaftov [Thermophysics of landscapes]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1979. 284 p.
- [5] Samarskii A.A. The theory of difference schemes. N.Y.–Basel, Marcel Dekker, Inc., 2001. 761 p.
- [6] Vasilyeva M.V., Pavlova N.V. Finite element implementation of the task of filtering grounds freezing. *Matematicheskie zametki JaGU* [Math. Notes of Yakutsk State Univ.], 2013, vol. 20, no. 1, pp. 195–205 (in Russ.).
- [7] Logg Anders, Mardal Kent-Andre, Wells Garth N. Automated solution of differential equations by the finite element method. The FEniCS Book, 2011. 732 p.
- [8] Krylov D.A., Sidnyaev N.I., Fedotov A.A. Mathematical modelling of temperature distribution. *Matem. Mod.*, 2013, vol. 25, no. 7, pp. 3–27 (in Russ.).
- [9] Gornov V.F., Stepanov S.P., Vasilyeva M.V., Vasilyev V.I. Mathematical modeling of heat transfer problems in the permafrost. *AIP Conference Proceedings*, 2014, vol. 1629, pp. 424–431.
- [10] Vabishhevich P.N., Vasilyeva M.V., Pavlova N.V. Numerical simulation of thermal stabilization of filter soils. *Math. Models Comput. Simul.*, 2015, vol. 7, iss. 2, pp. 154–164. DOI: 10.1134/S2070048215020106
- [11] Vabishchevich P.N., Vasilyeva M.V., Gornov V.F., Pavlova N.V. Mathematical modeling of the artificial freezing of soils. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies], 2014, vol. 19, no. 4, pp. 19–31 (in Russ.).
- [12] Vabishchevich P.N., Varlamov S.P., Vasilyev V.I., Vasilyeva M.V., Stepanov S.P. Mathematical modeling of the thermal regime of a railway line in conditions of cryolithozone. *Vestnik SVFU* [Vestnik of North-Eastern Federal Univ.], 2013, vol. 10, no. 5, pp. 5–11 (in Russ.).

[13] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. Society for Industrial Mathematics. 2003. 528 p.

[14] Voevodin V.V., Voevodin V.I. Parallel'nye vychisleniya [Parallel computing]. St. Petersburg, BKhV-Petersburg Publ., 2002. 608 p.

[15] Antonov M.Yu., et al. Vychislitel'nye tekhnologii. Professional'nyy uroven' [Computational technologies. Professional level]. Yakutsk, Izdatel'skiy dom SVFU Publ., 2014. 308 p.

**Vasilyev V.I.** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of Applied Mathematics Research Department of Institute of Mathematics and Information Science, North-Eastern Federal University (Belinskogo ul. 58, Yakutsk, Republic of Sakha, 677027 Russian Federation).

**Vasilyeva M.V.** — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor, researcher of Applied Mathematics Research Department of Institute of Mathematics and Information Science, North-Eastern Federal University (Belinskogo ul. 58, Yakutsk, Republic of Sakha, 677027 Russian Federation).

**Sirditov I.K.** — Assis. Professor of Information Technologies Department of Institute of Mathematics and Information Science, North-Eastern Federal University (Belinskogo ul. 58, Yakutsk, Republic of Sakha, 677027 Russian Federation).

**Stepanov S.P.** — post-graduate student of Applied Mathematics Research Department of Institute of Mathematics and Information Science, North-Eastern Federal University (Belinskogo ul. 58, Yakutsk, 677027 Russian Federation); works at Melnikov Permafrost Institute, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences (Merzlotnaya ul. 36, Yakutsk, Republic of Sakha, 677010 Russian Federation).

**Tseeva A.N.** — Head of Foundation Engineering Department, Yakut State Design, Research Institute of Construction (YaPNIIS) (Dzerzhinskogo ul. 20, Yakutsk, Republic of Sakha, 677000 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Vasilyev V.I., Vasilyeva M.V., Sirditov I.K., Stepanov S.P., Tseeva A.N. Mathematical Modeling of Temperature Regime of Soils of Foundation on Permafrost. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 1, pp. 142–159. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-142-159