

ОЦЕНКИ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТА С КОРОТКИМИ ИЗОТРОПНЫМИ ВОЛОКНАМИ

В.С. Зарубин
О.В. Новожилова
С.И. Шишкина

fn2@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Построена математическая модель, описывающая взаимодействие элементов структуры композита (коротких изотропных волокон и частиц матрицы) с изотропной упругой средой, модули упругости которой подлежат определению как искомые характеристики композита. Методом самосогласования получена система нелинейных матричных соотношений, устанавливающая связь искомых модулей композита с объемной концентрацией волокон и их удлинением и упругими свойствами волокон и матрицы. Проведен количественный анализ математической модели и определены границы, в пределах которых существенно влияние удлинения волокон. Полученные расчетные зависимости позволяют прогнозировать упругие характеристики композита, армированного короткими волокнами (в том числе в виде наноструктурных элементов, например, углеродных нанотрубок)

Ключевые слова

Композит, изотропные короткие волокна, модули упругости, метод самосогласования

Поступила в редакцию 17.03.2016
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Введение. Волокнистые композиты широко применяют в различных областях техники в качестве конструкционных материалов [1–4]. Конкретные области использования таких композитов существенно зависят от комплекса их механических свойств, в том числе от их упругих характеристик. Построению математических моделей для оценки модулей упругости волокнистых композитов посвящено достаточно много работ [5–9], в большинстве которых рассмотрены композиты, армированные однонаправленными волокнами, имеющими длину много большую их диаметра.

Вместе с тем часто возникает необходимость использования волокнистых композитов с хаотически ориентированными достаточно короткими волокнами. Такие волокна применяют для повышения механических и технологических характеристик связующего и в качестве наполнителя для упрочнения термопластов и реактопластов, каучуков, клеев и герметиков, а в некоторых случаях — металлов (алюминия или магния) [2]. К коротким волокнам также относят игольчатые и нитевидные кристаллы («усы»), обладающие высокой прочностью и жесткостью. Например, нитевидные кристаллы графита и оксида алюминия

имеют продольный модуль упругости (модуль Юнга) около 1 ТПа, а прочность при растяжении «усов» карбида кремния достигает 30 ГПа [2]. В последнее время в качестве коротких армирующих волокон рассматривают и различные наноструктурные элементы (в частности, углеродные нанотрубки) [10, 11].

Для достоверного прогноза ожидаемых упругих характеристик композитов, армированных высокопрочными и высокомодульными короткими волокнами, необходима разработка математической модели, учитывающей влияние механического взаимодействия таких волокон с матрицей композита при различных сочетаниях их длины и диаметра.

Математическая модель. Пусть композит состоит из изотропной линейно упругой матрицы, свойства которой характеризуют объемный модуль K° и модуль сдвига G° , и линейно упругих изотропных волокон, имеющих объемный модуль K^\bullet и модуль сдвига G^\bullet . Объемную концентрацию волокон в композите обозначим C_V .

Представительный элемент структуры композита включает в себя множество волокон, продольные оси которых равновероятно распределены по всем возможным направлениям. Это означает, что композит не обладает текстурой и его допустимо полагать изотропным [5]. Искомые упругие характеристики композита представим объемным модулем K и модулем сдвига G .

Форму волокна длиной l и диаметром d приближенно представим эллипсоидом вращения с отношением полуосей $\bar{b} = l/d$. Такое приближение позволяет использовать для описания механического взаимодействия волокна с окружающей его средой решение задачи о напряженно-деформированном состоянии эллипсоидального включения, помещенного в однородную изотропную линейно упругую среду [12]. В волокне как в элементе структурной неоднородности композита возникает возмущение напряженно-деформированного состояния по отношению к заданному на большом расстоянии от включения напряженно-деформированному состоянию в окружающей среде. В частицах матрицы, которые примем шаровыми с переменным радиусом от некоторого конечного до бесконечно малого, что позволяет заполнить все пустоты между эллипсоидальными волокнами, также возникнет возмущение напряженно-деформированного состояния. Последующее осреднение по представительному объему композита таких возмущений во всех волокнах и частицах матрицы позволяет получить расчетные зависимости для искомых упругих характеристик композита [5, 13].

Особенность эллипсоидального включения состоит в том, что возникающее в нем возмущение напряженно-деформированного состояния однородно по объему включения [12], т. е. не зависит от координат. Если на большом расстоянии от включения (по сравнению с его размерами) заданы компоненты ε_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, тензора деформации окружающей среды, то в эллипсоидальном включении появится возмущение деформированного состояния, определяемое компонентами [14]

$$\varepsilon_{ij}^{\bullet} = \zeta_{ijmn}^{\bullet} \varepsilon_{mn}, \quad m, n = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где $\zeta_{ijmn}^{\bullet} = (C_{ijrs}^{\bullet} - C_{ijrs} + C_{ijpq} W_{pqrs}^{\bullet})^{-1} (C_{rsmn} - C_{rsmn}^{\bullet})$; $r, s, p, q = 1, 2, 3$, C_{ijrs}^{\bullet} , C_{ijrs} — компоненты тензоров четвертого ранга коэффициентов упругости включения и окружающей среды; W_{pqrs}^{\bullet} — компоненты тензора, зависящие от формы включения и определяющие его взаимодействие с окружающей средой.

Возмущения деформированного состояния в частицах матрицы композита определяют соотношения, аналогичные формуле (1):

$$\varepsilon_{ij}^{\circ} = \zeta_{ijmn}^{\circ} \varepsilon_{mn}, \quad (2)$$

где $\zeta_{ijmn}^{\circ} = (C_{ijrs}^{\circ} - C_{ijrs} + C_{ijpq} W_{pqrs}^{\circ})^{-1} (C_{rsmn} - C_{rsmn}^{\circ})$; C_{ijrs}° — компоненты тензора коэффициентов упругости матрицы; W_{pqrs}° — компоненты тензора, зависящие от формы частицы матрицы и характеризующие ее взаимодействие с окружающей средой. Компоненты тензоров в соотношениях (1) и (2) определены в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, неподвижной относительно представительного объема композита.

Связь тензора \hat{C} коэффициентов упругости композита с искомыми значениями модулей K и G устанавливает равенство [15]

$$\hat{C} = 3K\hat{V} + 2G\hat{D}. \quad (3)$$

Здесь \hat{V} , \hat{D} — тензоры четвертого ранга, являющиеся объемной и девиаторной составляющими единичного тензора четвертого ранга $\hat{I} = \hat{V} + \hat{D}$ и имеющие компоненты $V_{ijmn} = \delta_{ij}\delta_{mn}/3$, $D_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2 - V_{ijmn}$, где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ [5]. Связь тензоров \hat{C}^{\bullet} и \hat{C}° с заданными значениями модулей K^{\bullet} , G^{\bullet} для волокон и K° , G° для матрицы композита определяют формулы, аналогичные равенству (3).

Осредненные по представительному объему композита возмущения деформированного состояния в волокнах и частицах матрицы должны быть равны нулю, т. е. с учетом формул (1) и (2) имеем

$$\langle C_V \zeta_{ijmn}^{\bullet} + (1 - C_V) \zeta_{ijmn}^{\circ} \rangle = 0, \quad (4)$$

где угловые скобки обозначают процедуру осреднения. Условие (4) характеризует так называемый метод самосогласования определения эффективных упругих характеристик неоднородной среды [5, 16]. При хаотической ориентации волокон процесс осреднения указанных возмущений эквивалентен приравнению нулю двух линейных инвариантов тензоров, компоненты которых заключены в угловых скобках. Таким образом, вместо условия (4) получим два равенства

$$C_V \zeta_{iimm}^{\bullet} + (1 - C_V) \zeta_{iimm}^{\circ} = 0, \quad C_V \zeta_{imim}^{\bullet} + (1 - C_V) \zeta_{imim}^{\circ} = 0. \quad (5)$$

Равенства (5) позволяют найти искомые значения K и G . Предварительно необходимо вычислить компоненты W_{pqrs}^{\bullet} и W_{pqrs}° тензоров, обратных так называемому тензору Эшелби [17].

Обращение тензора Эшелби. Тензору Эшелби четвертого ранга можно поставить в соответствие квадратную матрицу шестого порядка. В случае эллипсоида вращения матрица N^\bullet имеет семь независимых элементов, которые при совпадении оси вращения с координатной осью $O\check{\xi}_3$ примут вид [5, 12]

$$N_{11}^\bullet = N_{22}^\bullet = QD_{11} + RD_1, \quad N_{12}^\bullet = N_{21}^\bullet = QD_{11}/3 - RD_1, \quad N_{33}^\bullet = QD_{33} + RD_3;$$

$$N_{13}^\bullet = N_{23}^\bullet = QD_{31} - RD_1, \quad N_{31}^\bullet = N_{32}^\bullet = QD_{13} - RD_3, \quad N_{66}^\bullet = QD_{11}/3 + RD_1;$$

$$N_{44}^\bullet = N_{55}^\bullet = Q(1 + \bar{b}^2)D_{13}/2 + R(1 - D_1)/2,$$

где $Q = (3/2)/(1 - \nu)$; $R = (1/2 - \nu)/(1 - \nu)$; $\nu = (3K/2 - G)/(3K + G)$ — коэффициент Пуассона композита,

$$D_1 = \frac{\bar{b}}{2} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^2 (\bar{b}^2 + u)^{1/2}} = \frac{\bar{b}/2}{\sqrt{(\bar{b}^2 - 1)^3}} (\bar{b}\sqrt{\bar{b}^2 - 1} - \operatorname{arccsch} \bar{b}); \quad D_3 = 1/3 - 2D_1;$$

$$3D_{13} = (D_1 - D_3)/(\bar{b}^2 - 1); \quad D_{31} = D_{13}\bar{b}^2; \quad 4D_{11} = 1 - 3D_{13}; \quad D_{33} = 1/3 - 2D_{13}.$$

Остальные элементы этой матрицы равны нулю.

Обращение тензора Эшелби можно заменить обращением соответствующей матрицы N^\bullet , представив ее как блочную, включающую в себя четыре блока в виде матриц третьего порядка. Матрица W^\bullet , обратная матрице N^\bullet , также будет блочной, структура которой аналогична структуре матрицы N^\bullet . При этом элементы диагонального блока будут равны $W_{44}^\bullet = W_{55}^\bullet = 1/N_{44}^\bullet$ и $W_{66}^\bullet \bar{1}/N_{66}^\bullet$, а обращение блока с матрицей N_0^\bullet даст матрицу W^\bullet третьего порядка с элементами

$$W_{11}^\bullet = W_{22}^\bullet = (N_{11}^\bullet N_{33}^\bullet - N_{13}^\bullet N_{31}^\bullet) / \Delta_0^\bullet, \quad W_{12}^\bullet = W_{21}^\bullet = (N_{13}^\bullet N_{31}^\bullet - N_{12}^\bullet N_{33}^\bullet) / \Delta_0^\bullet;$$

$$W_{13}^\bullet = W_{23}^\bullet = (N_{12}^\bullet - N_{11}^\bullet) N_{13}^\bullet / \Delta_0^\bullet, \quad W_{31}^\bullet = W_{32}^\bullet = (N_{12}^\bullet - N_{11}^\bullet) N_{31}^\bullet / \Delta_0^\bullet;$$

$$W_{33}^\bullet = (N_{11}^\bullet + N_{12}^\bullet)(N_{11}^\bullet - N_{12}^\bullet) / \Delta_0^\bullet,$$

где $\Delta_0^\bullet \det(N_0) = (N_{11}^\bullet - N_{12}^\bullet)(N_{11}^\bullet N_{33}^\bullet - 2N_{13}^\bullet N_{31}^\bullet + N_{12}^\bullet N_{33}^\bullet)$ — определитель матрицы N_0^\bullet .

Тензор Эшелби для шаровых частиц матрицы композита является изотропным, т. е. его компоненты не зависят от ориентации системы координат. Этот тензор можно представить в виде [5]

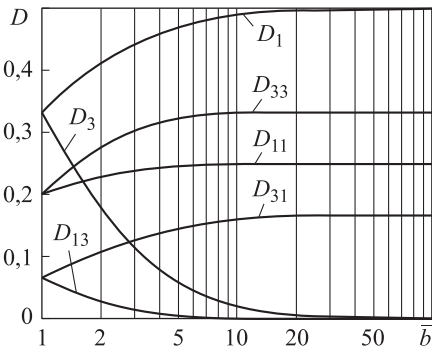
$$\hat{N}^\circ = \frac{1 + \nu}{3(1 - \nu)} \hat{V} + 2 \frac{4 - 5\nu}{15(1 - \nu)} \hat{D}.$$

Тензору \hat{V}° , обратному тензору \hat{N}° , соответствует симметрическая матрица W° с элементами $W_{11}^\circ = W_{22}^\circ = W_{33}^\circ = (1 - \nu)(1/(1 + \nu) + 5/(4 - 5\nu))$, $W_{12}^\circ = W_{13}^\circ =$

$= W_{23}^{\circ} = (1-\nu)(1/(1+\nu) - (5/2)/(4-5\nu))$, $W_{44}^{\circ} = W_{55}^{\circ} = W_{66}^{\circ} = 15(1-\nu)/(4-5\nu)$. Остальные элементы этой матрицы, которая также является блочной, равны нулю.

Следовательно, компоненты тензоров, обратных тензорам Эшелби для волокон и частиц матрицы композита, удалось представить элементами соответствующих блочных матриц. Поэтому вычисление инвариантов тензоров в равенствах (5) целесообразно также вести в матричном виде.

Количественный анализ математической модели. Оценку в первом приближении влияния удлинения волокон на упругие характеристики рассматриваемых композитов можно получить, построив зависимости от параметра \bar{b}



коэффициентов D , входящих в соотношения для элементов матрицы N^{\bullet} , соответствующей тензору Эшелби. В соответствии с зависимостями, приведенными на рис. 1 в полулогарифмических координатах, влияние удлинения на значения указанных коэффициентов пренебрежимо мало при $\bar{b} > 100$, но с достаточной для оценочных расчетов точностью это влияние можно не учитывать уже при $\bar{b} > 20$.

Рис. 1. Зависимости коэффициентов, определяющих компоненты тензора Эшелби, от удлинения волокна

Для количественного анализа совместного влияния на упругие свойства композита объемной концентрации C_V волокон и других определяющих параметров следует

расширить область представления в графическом виде вычисляемых значений объемного модуля K и модуля сдвига G . Отметим, что по этим значениям при необходимости можно вычислить не только коэффициент Пуассона ν композита (формула приведена выше), но и его модуль Юнга $E = 9KG / (3K + G)$.

Для расширения области представления результатов расчетов используем верхние и нижние оценки объемного модуля и модуля сдвига композита в виде $K_+ = (1-C_V)K^{\circ} + C_V K^{\bullet}$, $1/K_- = (1-C_V)/K^{\circ} + C_V / K^{\bullet}$ и $G_+ = (1-C_V)G^{\circ} + C_V G^{\bullet}$, $1/G_- = (1-C_V)/G^{\circ} + C_V / G^{\bullet}$, следующие из теории смесей [19, 20] и более строго обоснованные с привлечением двойственной вариационной формулировки задачи о напряженно-деформированном состоянии неоднородного линейно упругого тела [13]. Тогда при нормировании вычисляемых значений объемного модуля по значению K_+ в виде $\tilde{K} = K / K_+$ область графического представления результатов расчетов этого модуля будет ограничена в положительном единичном квадранте с координатами C_V и \tilde{K} сверху ординатой $\tilde{K} = 1$, а снизу — кривой, построенной по формуле

$$\tilde{K}_- = \frac{K_-}{K_+} = \frac{1}{(1 + C_V(K^{\circ} / K^{\bullet} - 1))(1 + C_V(K^{\bullet} / K^{\circ} - 1))}$$

Аналогично будет ограничена в единичном квадранте с координатами C_V и $\tilde{G} = G/G_+$ область графического представления вычисляемых значений модуля сдвига. При этом нижняя граница этой области будет определена по зависимости

$$\tilde{G}_- = \frac{G_-}{G_+} = \frac{1}{(1+C_V(G^\circ/G^\bullet-1))(1+C_V(G^\bullet/G^\circ-1))}.$$

В случае $K^\bullet/K^\circ = G^\bullet/G^\circ$ области представления результатов расчетов указанных модулей совпадают.

Зависимости модулей \tilde{K} (сплошные линии) и \tilde{G} (штриховые линии) от объемной концентрации C_V при фиксированных значениях $K^\bullet/K^\circ = 20$, $G^\bullet/K^\circ = 10$ и $G^\circ/K^\circ = 0,5$ приведены на рис. 2, а. Для этих значений совпадающие нижние границы представления вычисляемых значений обоих модулей отмечены штрихпунктирной линией. Для каждого модуля расчеты выполнены при $\bar{b} = 1$ (кривые со светлыми кружками, соответствующие предельному случаю шаровых включений), $\bar{b} = 2$ (кривые без символов) и $\bar{b} = 100$ (кривые со светлыми ромбами). Следует отметить, что изменение параметра \bar{b} в диапазоне значений 2...100, соответствующем принятому в литературе термину «короткие волокна» [2, 7, 8, 18], мало влияет на значения модулей композита при фиксированных значениях C_V , причем это влияние уменьшается при формальном условии $C_V \rightarrow 1$ и исчезает при $C_V < 0,2$. Переход от шаровых включений к волокнам с удлинением $\bar{b} = 2$ приводит примерно к такому же изменению значений модулей, как и при изменении удлинений в диапазоне значений 2...100.

Для сравнения на рис. 2, а сплошными и штриховыми линиями с темными кружками показаны зависимости модулей \tilde{K} и \tilde{G} от концентрации C_V , рассчитанные для композита с хаотически ориентированными волокнами [7], взаимодействие которых с материалом матрицы определено с помощью теории смесей [18, 19]. Для объемного модуля и модуля сдвига такой подход в случае приня-

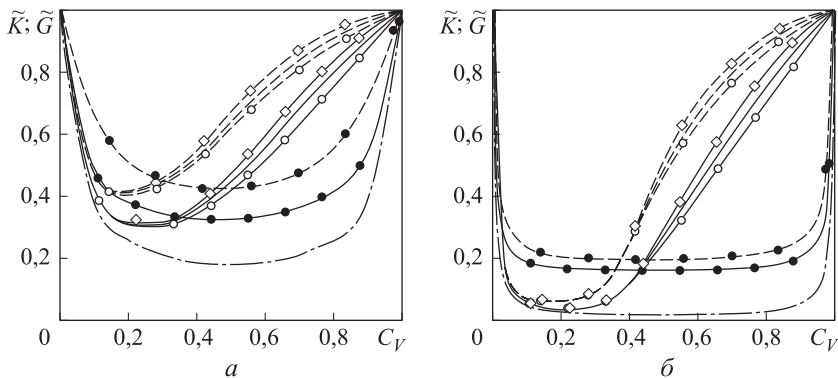


Рис. 2. Зависимости безразмерных модулей упругости $\tilde{K}(C_V)$ и $\tilde{G}(C_V)$ композита от объемной концентрации волокон при фиксированных значениях $K^\bullet/K^\circ = 20$, $G^\bullet/K^\circ = 10$ и $G^\circ/K^\circ = 0,5$ (а) и $K^\bullet/K^\circ = 200$, $G^\bullet/K^\circ = 100$ и $G^\circ/K^\circ = 0,5$ (б)

тых значений упругих характеристик волокон и матрицы приводит при $C_V \leq 0,3$ к завышенным оценкам по сравнению с рассматриваемой моделью и к существенно заниженным оценкам по мере возрастания объемной концентрации C_V волокон.

Результаты расчетов при фиксированных значениях $K^*/K^\circ = 200$, $G^*/K^\circ = 100$ и значении $G^\circ/K^\circ = 0,5$ представлены на рис. 2, б, что свидетельствует о правильности тенденции применения более высокопрочных и высоко-модульных волокон в качестве армирующих элементов композитов [2, 7, 18]. При этом область представления вычисляемых значений модулей композита заполняет весь положительный единичный квадрант с координатами C_V и \tilde{K} (или \tilde{G}). Влияние удлинения волокон на модули упругости композита можно полагать достаточно малым при $C_V < 0,4$. Отличие рассчитанных значений параметров композита при $\bar{b} = 2 \dots 100$ от значений модулей, вычисленных по формулам, приведенным в работе [7] (кривые с темными кружками), примерно такое же, как и отличие, показанное на рис. 2, а.

Зависимости объемного модуля K и модуля сдвига G композита с алюминиевой матрицей от объемной концентрации C_V волокон из оксида алюминия ($\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$), для которого известны значения продольного модуля $E^* = 402,84$ ГПа и модуля сдвига $G^* = 163,45$ ГПа, приведены на рис. 3 [20]. Этим данным соответ-

ствует значение $K^* = 250,81$ ГПа. Для алюминиевой матрицы принято $K^\circ = 81,3$ ГПа и $G^\circ = 25,9$ ГПа [20]. Кривые, показанные сплошными и штрихпунктирными линиями, соответствуют верхней (K_+) и нижней (K_-) оценкам объемного модуля, а кривые, показанные штриховой и пунктирной линиями, — верхней (G_+) и нижней (G_-) оценкам модуля сдвига рассматриваемого композита. Сплошные и штриховые линии со светлыми кружками представляют результаты расчета модулей K и G композита в случае дисперсных шаровых включений, а со светлыми ромбами — при удлинении волокон $\bar{b} = 100$. Для этого композита изменение удлинения волокон в большей мере влияет на его объемный модуль, причем это влияние наиболее

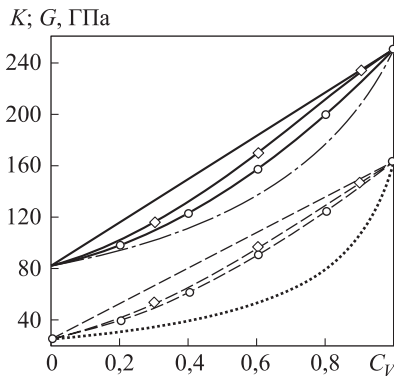


Рис. 3. Зависимости модулей упругости композита с алюминиевой матрицей от объемной концентрации волокон из оксида алюминия

существенно при значениях объемной концентрации $C_V = 0,5 \dots 0,8$.

Закключение. Применение математической модели взаимодействия волокон и частиц матрицы со средой, упругие свойства которой соответствуют искомым модулям композита, позволило оценить влияние удлинения волокон в диапазоне значений, характерном для так называемых коротких волокон. Установлено, что при малой объемной концентрации C_V волокон это влияние несуще-

ственно, но и с увеличением концентрации C_V различие модулей упругости волокнистого композита при изменении удлинения волокон в промежутке $\bar{b} = 2 \dots 100$ мало по сравнению с абсолютными значениями этих модулей.

Представленные расчетные зависимости позволяют прогнозировать упругие характеристики волокнистого композита по заданным упругим свойствам волокон и матрицы, а также по значениям C_V и удлинению \bar{b} волокна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Справочник по композиционным материалам* / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. В 2-х т. Т. 2. М.: Машиностроение, 1988. 584 с.
2. *Композиционные материалы. Справочник* / В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. *Комков М.А., Тарасов В.А.* Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.
4. *Калинчев В.А., Ягодников Д.А.* Технология производства ракетных двигателей твердого топлива. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 с.
5. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
6. *Механика композиционных материалов* / под ред. Дж. Сендецки; пер. с англ. М.: Мир, 1978. 564 с.
7. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов / пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
8. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 302 с.
9. *Хорошун Л.П.* Математические модели и методы механики стохастических композитных материалов // Прикладная механика. 2000. Т. 36. № 10. С. 30–62.
10. *Кац Е.А.* Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 296 с.
11. *Кормилицын О.П.* Механика материалов и структур нано- и микротехники. М.: Академия, 2008. 224 с.
12. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций / пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 248 с.
13. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Изотропные шаровые включения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2014. № 5. С. 53–69. DOI: 10.18698/0236-3941-2014-5-53-69
14. *Зарубин В.С.* Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
15. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Анизотропные шаровые включения // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2014. № 6. С. 20–31.
DOI: 10.18698/0236-3941-2014-6-20-31

16. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. Vol. 13. No. 4. P. 213–222.
17. Цвелодуб И.Ю. Об обратном тензоре Эшелби // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2010. № 2 (8). С. 530–535.
18. Композиционные материалы. Справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
19. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.
20. Францевич И.Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Справочник. Киев: Наукова думка, 1982. 287 с.

Зарубин Владимир Степанович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Новожилова Ольга Валерьевна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Шишкина Светлана Ивановна — канд. техн. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Зарубин В.С., Новожилова О.В., Шишкина С.И. Оценки упругих характеристик композита с короткими изотропными волокнами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 1. С. 4–14. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-4-14

ASSESSMENT OF ELASTIC CHARACTERISTICS OF A COMPOSITE WITH SHORT ISOTROPIC FIBERS

V.S. Zarubin

fn2@bmmstu.ru

O.V. Novozhilova

S.I. Shishkina

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

We built a mathematical model describing the interaction of the elements of the composite structure (short isotropic fibers and the matrix particles) with an isotropic elastic medium, whose moduli of elasticity are to be determined as the desired characteristics of the composite. The method of self-consistency helped to obtain the system of nonlinear matrix relations, establishing a connection between the desired composite moduli and the volume concentration of fibers and their elongation and elastic properties of the fibers and the matrix. We carried out a quantitative

Keywords

Composite, isotropic short fibers, elasticity index, method of self-consistency

analysis of the mathematical model and defined the boundaries within which the influence of the fiber elongation is significant. The calculated dependences obtained made it possible to predict elastic properties of the composite reinforced with short fibers (including the form of nanostructured elements, for example carbon nanotubes)

REFERENCES

- [1] Handbook of composites. Ed. by G. Lubin. N.Y., Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p.
- [2] Vasil'ev V.V., Tarnopol'skiy Yu.M., ed. Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Handbook of composites]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990. 512 p.
- [3] Komkov M.A., Tarasov V.A. Tekhnologiya namotki kompozitnykh konstruktsiy raket i sredstv porazheniya [Wound composite structures technology and missile weapons]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2015. 432 p.
- [4] Kalinchev V.A., Yagodnikov D.A. Tekhnologiya proizvodstva raketnykh dvigateley tverdogo topliva [Production technology of solid-propellant rocket engine]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2011. 688 p.
- [5] Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [Theory of elasticity of micrononuniform environments]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.
- [6] Brautman L., Kroc R., Sendetsky J., eds. Composite materials. In 8 vols. Vol. 2. Mechanics of composite materials. N.Y., 1975.
- [7] Christensen R.M. Mechanics of composite materials. N.Y., Wiley-Interscience Publ., 1979. 348 p.
- [8] Vanin G.A. Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1985. 304 p.
- [9] Khoroshun L.P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites. *International Applied Mechanics*, 2000, vol. 36, no. 10, pp. 1284–1316.
- [10] Kats E.A. Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaya form i idey [Fullerenes, carbon nanotubes and nanoclusters. Pedigree of forms and ideas]. Moscow, LKI Publ., 2008. 296 p.
- [11] Kormilitsyn O.P. Mekhanika materialov i struktur nano- i mikrotekhniki [Mechanics of materials and nano- and microtechnology structures]. Moscow, Akademiya Publ., 2008. 224 p.
- [12] Eshelby J.D., Seitz F., Turnbull D., eds. The continuum theory of lattice defects. In *Collected Works of J.D. Eshelby "Progress in solid state physics"*. N.Y., Academic Press Publ., 1956, vol. 3, pp. 79–303.
- [13] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Comparative analysis estimates of elastic moduli for composite. Isotropic spherical inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2014, no. 5, pp. 53–69 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2014-5-53-69
- [14] Zarubin V.S. Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruktsiy [Applied problems of thermal strength of structural elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 296 p.
- [15] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Comparative analysis modulus elasticity estimates for composite anisotropic spherical inclusions. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ.*

im. N.E. Baumana, Mashinost. [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2014, no. 6, pp. 20–31 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3941-2014-6-20-31

[16] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, vol. 13, no. 4, pp. 213–222.

[17] Tselodub I.Yu. On the inverse Eshelby tensor. *Vestnik Chuvashskogo gos. ped. inst. im. I.Ia. Iakovleva. Ser. Mekhanika pred. sost.* [I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Ser. Mechanics Limit States], 2010, no. 2 (8), pp. 530–535 (in Russ.).

[18] Karpinos D.M., ed. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Handbook of composites]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1985. 592 p.

[19] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mixture models of composite mechanics. P. 1. Thermal mechanics and thermoelasticity of multicomponent mixture. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2009, no. 3, pp. 36–49 (in Russ.).

[20] Frantsevich I.N., Voronov F.F., Bakuta S.A. *Uprugie postoyannye i moduli uprugosti metallov i nemetallov. Spravochnik* [Elastic constants and elasticity modules of metals and nonmetals. Handbook]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1982. 287 p.

Zarubin V.S. — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Novozhilova O.V. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Shishkina S.I. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Zarubin V.S., Novozhilova O.V., Shishkina S.I. Assessment of Elastic Characteristics of a Composite with Short Isotropic Fibers. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2017, no. 1, pp. 4–14. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-1-4-14