УДК 519.21 DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-16-31

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПЕРЕСКОКОМ ГРАНИЦЫ

А.В. Калинкин kalinkin@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Ранее автором настоящей статьи были получены аналитические выражения для вероятностей достижения границы случайным блужданием на целочисленных точках полуплоскости и вероятностей перескока границы. В данной работе для установленных вероятностных распределений найдены асимптотические приближения, представляющие интерес для приложений. Предельные теоремы в докритическом и надкритическом случаях приводят к нормальному закону для точки выхода или точки перескока за границу — при условии, что остановка случайного блуждания произошла. В критическом случае асимптотическое приближение отлично от нормального закона — получено устойчивое распределение с показателем $\alpha = 1/2$. Предельные теоремы обобщают известный частный случай, когда перескока через границу полуплоскости нет. Для вывода предельных теорем использован метод характеристических функций и метод преобразования Лапласа

Ключевые слова

Вероятность остановки случайного блуждания, производящие функции, предельные теоремы, метод характеристических функций

Поступила в редакцию 15.04.2016

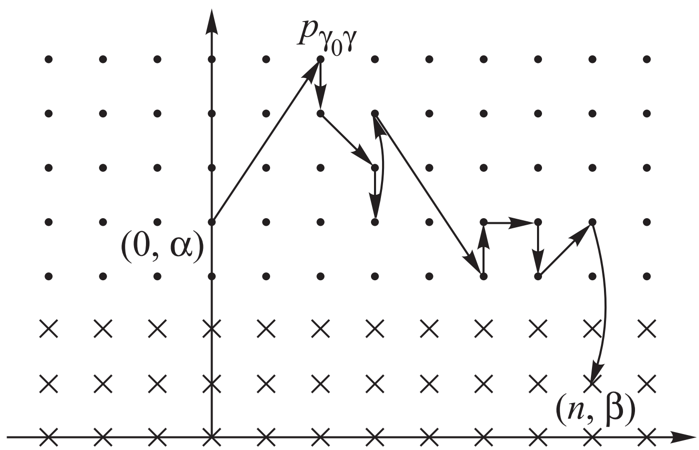
Случайное блуждание на целочисленных точках полуплоскости. На множестве состояний $Z \times N = \{(\alpha_0, \alpha),\ \alpha_0 = \ldots, -1,\ 0,\ 1, \ldots,\ \alpha = 0,\ 1, \ldots\}$ рассмотрим однородное случайное блуждание (S_n^0, S_n), $n = 0,\ 1, \ldots$ [1]. Переходные вероятности за n шагов обозначим $P_{(\beta_0, \beta)}^{(\alpha_0, \alpha)}(n) = \mathbf{P}\{(S_n^0, S_n) = (\beta_0, \beta) | (S_0^0, S_0) = (\alpha_0, \alpha)\}$. Пусть переходные вероятности за один шаг равны, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\mathbf{P}\{(S_{n+1}^0, S_{n+1}) = (\beta_0, \beta) \,|\, (S_n^0, S_n) = (\alpha_0, \alpha)\} = p_{\beta_0 - \alpha_0,\ \beta - \alpha + k},$$
$$\text{если } \beta_0 \ge \alpha_0 \text{ и } \alpha \ge k,\ \beta - \alpha + k \ge 0;$$
$$\mathbf{P}\{(S_{n+1}^0, S_{n+1}) = (\beta_0, \beta) \,|\, (S_n^0, S_n) = (\alpha_0, \alpha)\} = 0, \quad \text{если } \beta_0 < \alpha_0;$$
$$\mathbf{P}\{(S_{n+1}^0, S_{n+1}) = (\alpha_0, \alpha) \,|\, (S_n^0, S_n) = (\alpha_0, \alpha)\} = 1, \quad \text{если } \alpha < k.$$

Здесь задано распределение вероятностей

$$\left\{ p_{\gamma_0 \gamma} \ge 0,\ (\gamma_0, \gamma) \in N^2;\ \sum_{\gamma_0, \gamma = 0}^{\infty} p_{\gamma_0 \gamma} = 1,\ p_{0k} = 0 \right\}.$$

Для случайного блуждания (S_n^0, S_n) возможна остановка в одном из состояний множества $\{(\gamma_0, \beta),\ \gamma_0 \in Z,\ \beta = 0, \ldots, k-1\}$. Вероятности остановки равны $q_{(\gamma_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)} = \lim\limits_{n\to\infty} P_{(\gamma_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}(n)$, а при $\beta = k-1$ есть вероятности достижения границы полуплоскости $\{(\gamma_0, k-1), \gamma_0 \in Z\}$, при $\beta = 0, \ldots, k-2$ — вероятности перескока этой границы. Одна из реализаций случайного блуждания (S_n^0, S_n) при начальном состоянии $(0, \alpha)$ и остановкой в состоянии (n, β) показана на рисунке.



Реализация случайного блуждания $(k = 3)$, точки остановки обозначены знаком «×»

Введем производящую функцию вероятностей скачков, $|u| \le 1$, $|s| \le 1$,

$$h(u, s) = \sum_{\gamma_0, \gamma = 0}^{\infty} p_{\gamma_0\gamma} u^{\gamma_0} s^{\gamma}. \tag{1}$$

Явные выражения для вероятностей остановки при общих предположениях о производящей функции $h(u, s)$ получены в работе [2]. Настоящая работа является продолжением указанной работы. Установлены предельные теоремы для точки выхода случайного блуждания на границу полуплоскости и для точки перескока этой границы в докритическом, критическом и надкритическом случаях. Обобщен случай $k = 1$ [3, 4], когда перескока через границу полуплоскости нет. Теоремы 2–5 приведены в краткой заметке [5].

Выражение для вероятностей остановки $q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)}$ [2]. Учитывая равенство $q_{(n,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)} = q_{(n-\alpha_0,\beta)}^{(0,\alpha)}$, далее рассмотрим вероятности $q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)}$. Введем производящие функции, $|u| \le 1$,

$$\varphi_{\alpha\beta}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)} u^n, \quad \alpha \in N, \quad \beta = 0, \ldots, k-1. \tag{2}$$

Функции $\varphi_{\alpha\beta}(u)$ являются аналитическими в области $|u|<1.$ Предположим выполнение условий

$$p_0 = \sum_{\gamma_0=0}^{\infty} p_{\gamma_0 0} > 0; \quad \text{Н.О.Д.}\ (k,\ \gamma > 0 : p_\gamma = \sum_{\gamma_0=0}^{\infty} p_{\gamma_0\gamma} > 0) = 1; \tag{3}$$

$$p_{\gamma_0\gamma} > 0 \text{ при некотором } \gamma_0 > 0; \quad p_{\gamma_0\gamma} > 0 \text{ при некотором } \gamma \geq k+1. \tag{4}$$

Выражение для производящей функции $\varphi_{\alpha\beta}(u)$ содержит ветви комплекснозначной функции $s=\varphi(u),$ определяемой уравнением

$$h(u,s)-s^k=0. \tag{5}$$

Уравнение

$$h(1,s)-s^k=0 \tag{6}$$

рассмотрено в работах [5, 6].

Уравнение (6) имеет корень 1 и далее всегда предполагается наличие двух положительных корней [2]. Обозначим $q_1,\ldots,q_{k-1}$ — $k-1$ ближайших к нулю корня уравнения (6) и $q_0\in(0,1]$ корень уравнения (6) кратности один или два; $|q_l|<q_0,$ $l=1,\ldots,k-1.$ Если q_l корень кратности один уравнения (1), то $\frac{\partial h(u,s)}{\partial s}\big|_{u=1,s=q_l}\neq kq_l^{k-1}$ и по теореме о неявной функции [7, 8] для уравнения (5) в некоторой окрестности точки $u=1$ имеется единственное решение $s=\varphi_l(u),$ для которого $q_l=\varphi_l(1),$ и это аналитическая функция в окрестности точки $u=1.$ Если q_l корень кратности m уравнения (6), то для уравнения (5) в некоторой окрестности точки $u=1$ имеется m решений $s=\varphi_l^1(u),\ldots,s=\varphi_l^m(u),$ для которых $q_l=\varphi_l^1(1),\ldots,q_l=\varphi_l^m(1),$ и $u=1$ точка ветвления порядка m для функции $\varphi(u)$ (см. задачи № 26.19, № 26.51 в работе [8]). Таким образом, в окрестности точки $u=1$ определены $k-1$ ветвь многозначной функции $\varphi(u),$ которые определяются равенством $h(u,\varphi(u))-\varphi^k(u)=0:$ $\varphi_1(u),\ldots,\varphi_{k-1}(u),$ соответствующие значениям $q_1,\ldots,q_{k-1}.$ Вводим также ветвь $\varphi_0(u),$ соответствующую корню $q_0.$ Если q_0 — корень кратности два, то берем решение уравнения (5) такое, что $|\varphi_0(u)|\leq q_0$ при $|u|\leq 1.$ Существование такой ветви $\varphi_0(u),$ а также другие свойства функций $\varphi_0(u),\ldots,\varphi_{k-1}(u)$ были рассмотрены в работе [2].

Лемма 1 [2]. *Пусть для распределения вероятностей скачков* $\{p_{\gamma_0\gamma}\}$ *случайного блуждания выполнены условия (3), (4). Из определяемых уравнением (5) функций* $\varphi_0(u),\ldots,\varphi_{k-1}(u)$ *выделим функцию* $\varphi_0(u)$ *условием* $\lim_{u\uparrow 1}\varphi_0(u)=q_0.$ *Тогда в области* $|u|<r,$ *где* $r\geq 1,$ *выполнены неравенства* $|\varphi_l(u)|\leq\varphi_0(|u|),$ $l=0,\ldots,k-1.$

В случае $p_{00}+\ldots+p_{0,k-1}>0$ *функция* $\varphi_0(u)$ *является аналитической в области* $|u|<r,\ r\geq 1,$ *и представляется рядом*

$$\varphi_0(u)=\sum_{m=0}^{\infty} r_m u^m,\quad r_0>0,\ r_1\geq 0,\ r_2\geq 0,\ldots \tag{7}$$

В случае $p_{00}+\ldots+p_{0,k-1}=0$ *точка* $u=0$ *является точкой ветвления порядка* k *функции* $\varphi(u)$ *и в кольце* $0<|u|<r,\ r\geq 1,$ *функция* $\varphi_0(u)$ *представляется рядом*

$$\varphi_0(u)=\sum_{m=1}^{\infty} r_m(\sqrt[k]{u})^m,\quad r_1\geq 0,\ r_2\geq 0,\ldots, \tag{8}$$

где взята ветвь функции $\sqrt[k]{u}$ *такая, что* $\sqrt[k]{1}=1.$

Теорема 1 [2]. *Пусть функция* $h(u,s)$ *аналитическая при всех* $u,s,$ *выполнены условия (3), (4). Производящая функция вероятностей остановки равна,* $|u|<1,$

$$\varphi_{\alpha\beta}(u)=\sum_{l=0}^{k-1} C_l^{\beta}(u)\varphi_l^{\alpha}(u),\qquad \alpha\in N, \tag{9}$$

где функции $C_l^{\beta}(u)$, $l=0,\ldots,k-1,$ *определяются условиями* $\varphi_{\alpha\beta}(u)=\delta_{\beta}^{\alpha},$ $\alpha=$ $=0,\ldots,k-1;$ $\delta_{\beta}^{\alpha}=0,$ *если* $\alpha\neq\beta$ *и* $\delta_{\beta}^{\beta}=1.$

Следствием является представление для производящей функции

$$\varphi_{\alpha\beta}(u)=(-1)^{k-\beta+1}\sum_{\substack{i_0+\ldots+i_{k-1}=\alpha-\beta\\ i_0,\ldots,i_{k-1}\geq 0}}{}' \varphi_0^{i_0}(u)\ldots\varphi_{k-1}^{i_{k-1}}(u),\qquad \alpha\in N. \tag{10}$$

Здесь знак «$'$» обозначает, что число показателей степеней $i_0,\ldots,i_{k-1},$ обращающихся в нуль, не больше β.

Вспомогательные леммы. Основную роль в исследовании асимптотических свойств распределения $\{q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)}, n=0,1,\ldots\},$ исходя из представлений (9) и (10), играет функция $\varphi_0(u).$ Далее рассмотрим случай (7), случай (8) аналогичен. Обозначим r радиус сходимости ряда (7) и примем $R=\varphi_0(r).$ Поскольку ряд (7) имеет неотрицательные коэффициенты, точка $u=r$ — особая для функции $\varphi_0(u)$. Следующие леммы доказывают аналогично леммам, приведенным в главе 5 работы [3].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда* r *и* R *конечны,*

$$\frac{\partial h(u,s)}{\partial s}\Big|_{u=r,s=R}=kR^{k-1}. \tag{11}$$

◀ По второму из условий (4), в разложении (1) для функции $h(u,s)$ коэффициент $p_{\gamma_0\gamma}>0$ при некотором $\gamma\geq k+1.$ Тогда из равенства $h(u,\varphi_0(u))=\varphi_0^k(u)$ вытекает, при $0<u\leq 1$

$$p_{\gamma_0\gamma}u^{\gamma_0}\varphi_0^{\gamma}(u)\le\varphi_0^k(u). \qquad (12)$$

Поскольку по первому из условий (3) $h(1,0)>0$, то $\varphi_0(u)>0$, $0<u\le 1$, и из (12) следует $\varphi_0(u)\le(p_{\gamma_0\gamma}u^{\gamma_0})^{-1/(\gamma-k)}$. Полагая в последнем неравенстве $u\uparrow r$, устанавливаем конечность r и R. Согласно теореме о неявной функции [7, 8], в окрестности точки (u_1, s_1) существует единственное аналитическое решение $s=\varphi_0(u)$ уравнения $h(u,s)=s^k$, если $\dfrac{\partial h(u,s)}{\partial s}\Big|_{u=u_1,\, s=s_1}\ne ks_1^{k-1}$. Точка $u=r$ — особая точка для функции $\varphi_0(u)$, получаем равенство (11). ►

Функция $\varphi_0(u)$ аналитическая в области $|u|<r$, поэтому при $|u|<r$

$$\frac{\partial h(u,s)}{\partial s}\Big|_{s=\varphi_0(u)}\ne k\varphi_0^{k-1}(u).$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Функция $\varphi_0(u)$ в окрестности точки r является аналитической функцией от $(u-r)^{1/2}$.*

◄ Рассмотрим уравнение

$$h(u,s)=s^k. \qquad (13)$$

В точке (r,R) имеем $h(r,R)=R^k$ и $\dfrac{\partial h(u,s)}{\partial u}\Big|_{u=r,s=R}\ne 0$. Поэтому в этой точке по теореме о неявной функции существует аналитическое решение $u=\psi(s)$ уравнения (13), являющееся обратной функцией для $s=\varphi_0(u)$. Дифференцируя (13), определим первую $\dfrac{du}{ds}$ и вторую $\dfrac{d^2u}{ds^2}$ производные функции $u=\psi(s)$ в точке $s=R$:

$$\frac{\partial h}{\partial u}\frac{du}{ds}+\frac{\partial h}{\partial s}=ks^{k-1};\qquad \frac{du}{ds}\Big|_{s=R}=0, \qquad (14)$$

так как $\dfrac{\partial h}{\partial s}\Big|_{u=r,s=R}=kR^{k-1}$ по лемме 2,

$$\frac{\partial h}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2}+2\frac{\partial^2 h}{\partial u\partial s}\frac{du}{ds}+\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}=k(k-1)s^{k-2};$$

$$\frac{d^2u}{ds^2}\Big|_{s=R}=-\frac{\dfrac{\partial^2 h(r,R)}{\partial s^2}-k(k-1)R^{k-2}}{\dfrac{\partial h(r,R)}{\partial u}}\ne 0. \qquad (15)$$

Числитель в выражении (15) отличен от нуля. Если

$$\sum_{\gamma_0,\,\gamma=0}^{\infty}\gamma(\gamma-1)p_{\gamma_0\gamma}r^{\gamma_0}R^{\gamma-2}-k(k-1)R^{k-2}=0,$$

то R — положительный корень кратности три уравнения $h(r,s)-s^k=0,$ чего быть не может согласно лемме 6, приведенной в работе [2].

Утверждение леммы 3 следует из (14) и (15). ►

Предельные теоремы. Обозначим $\eta_{\alpha\beta}$ случайную величину, имеющую распределение $\{q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)},\, n=0,1,\ldots\};$ вероятности $q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)}$ определяются производящей функцией (2). Используя явное выражение (9) для $\varphi_{\alpha\beta}(s),$ установим предельные теоремы при $\alpha\to\infty.$

При $u=1$ из определения (2) получаем

$$\varphi_{\alpha\beta}(1)=\sum_{n=0}^{\infty}q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)}=q_{\alpha\beta}\le 1,\quad \beta=0,\ldots,k-1,$$

где $q_{\alpha\beta}$ — вероятность остановки случайного блуждания в одном из состояний $\{(n,\beta),\, n\in N\}.$ Выражение для вероятности $q_{\alpha\beta}$ дано в теореме 3, приведенной в работе [6] при условиях (3), и может быть получено из представления (9) при $u\uparrow 1.$ Далее использовано следствие 1, взятое из работы [6],

$$q_{\alpha\beta}=C_0^{\beta}q_0^{\alpha}(1+o(1)),\quad \alpha\to\infty. \tag{16}$$

Здесь $q_0=\varphi_0(1)$ — ближайший к нулю положительный корень уравнения (6) и $C_0^{\beta}=C_0^{\beta}(1)>0.$

При $k\ge 2$ $q_{\alpha\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)}<1,$ и $\eta_{\alpha\beta}$ можно полагать случайной величиной, принимающей с положительной вероятностью $1-q_{\alpha\beta}$ бесконечное значение $\eta_{\alpha\beta}=\infty.$ В этом случае рассматривают условное распределение

$$\mathbf{P}\left\{\eta_{\alpha\beta}=n\middle|\eta_{\alpha\beta}<\infty\right\}=\frac{q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)}}{q_{\alpha\beta}},\quad n\in N. \tag{17}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, соответствующей распределению (17), вычисляют по формулам [3]

$$\mathbf{M}\left\{\eta_{\alpha\beta}\middle|\eta_{\alpha\beta}<\infty\right\}=\frac{\varphi'_{\alpha\beta}(1)}{q_{\alpha\beta}}; \tag{18}$$

$$\mathbf{D}\left\{\eta_{\alpha\beta}\middle|\eta_{\alpha\beta}<\infty\right\}=\frac{\varphi''_{\alpha\beta}(1)}{q_{\alpha\beta}}+\frac{\varphi'_{\alpha\beta}(1)}{q_{\alpha\beta}}-\left(\frac{\varphi''_{\alpha\beta}(1)}{q_{\alpha\beta}}\right)^2, \tag{19}$$

при этом под производной понимают левую производную.

Рассмотрим докритический случай $\left(A=\frac{\partial h(u,s)}{\partial s}\Big|_{u=1,s=1}<k,\ \varphi_0(1)=q_0=1\right),$ критический случай $(A=k,\ \varphi_0(1)=q_0=1),$ и надкритический случай $(A>k,$

$\varphi_0(1) = q_0 < 1)$ [3, 9]. В докритическом и критическом случаях $\sum_{\beta=0}^{k-1} q_{\alpha\beta} = 1,$ т. е. случайное блуждание остановится с вероятностью 1, в надкритическом случае $\sum_{\beta=0}^{k-1} q_{\alpha\beta} < 1.$

Докритический случай. Функция $\varphi_0(u)$ аналитическая в области $|u| < r,$ $r > 1.$ Вычислим $a = \varphi_0'(1)$ и $\sigma^2 = \varphi_0''(1) + \varphi_0'(1) - (\varphi_0'(1))^2.$ Обозначим

$$A_0 = \frac{\partial h(u,s)}{\partial u}\Big|_{u=1,s=1}, \qquad A = \frac{\partial h(u,s)}{\partial s}\Big|_{u=1,s=1},$$

$$B_{00} = \frac{\partial^2 h(u,s)}{\partial u^2}\Big|_{u=1,s=1}, \qquad B_0 = \frac{\partial^2 h(u,s)}{\partial u \partial s}\Big|_{u=1,s=1}, \qquad B = \frac{\partial^2 h(u,s)}{\partial s^2}\Big|_{u=1,s=1}.$$

Дифференцируя (5), в котором $s = \varphi_0(u),$ по u в точке $u = 1,$ $s = 1,$ и учитывая $\varphi_0(1) = q_0 = 1,$ имеем

$$A_0 + A\varphi_0'(1) - k\varphi_0'(1) = 0;$$

$$B_{00} + 2B_0\varphi_0'(1) + (\varphi_0'(1))^2 + A\varphi_0''(1) - k(k-1)(\varphi_0'(1))^2 - k\varphi_0''(1) = 0,$$

откуда получаем

$$a = \varphi_0'(1) = \frac{A_0}{k-A} < \infty;$$

$$\sigma^2 = \frac{B_{00}}{k-A} + \frac{2B_0A_0}{(k-A)^2} + \frac{(B-k(k-1))A_0^2}{(k-A)^3} + \frac{A_0}{k-A} - \frac{A_0^2}{(k-A)^2} < \infty.$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. В докритическом случае*

$$\mathbf{M}\{\eta_{\alpha\beta} | \eta_{\alpha\beta} < \infty\} = a\alpha(1 + o(1)), \qquad \alpha \to \infty; \tag{20}$$

$$\mathbf{D}\{\eta_{\alpha\beta} | \eta_{\alpha\beta} < \infty\} = \sigma^2\alpha(1 + o(1)), \qquad \alpha \to \infty. \tag{21}$$

◄ В докритическом случае производящая функция (2) аналитическая в области $|u| < r,$ $r > 1,$ поэтому конечны математическое ожидание и дисперсия, соответствующие распределению (17). При использовании выражения (9) в вычислении математического ожидания по формуле (18), следует учесть, что точка $u = 1$ может быть особой для некоторых из функций $\varphi_l(u),$ $l = 1, \ldots, k-1.$ Существует интервал $(1-\varepsilon, 1),$ $\varepsilon > 0,$ не содержащий точек, которые являются особыми для функций $\varphi_l(u),$ $l = 1, \ldots, k-1;$ используем равенство

$$\varphi_{\alpha\beta}'(1) = \lim_{u \uparrow 1}\left[\sum_{l=0}^{k-1} \varphi_l^{\alpha}(u) C_l^{\beta}(u)\right]' = \lim_{u \uparrow 1}\left[\alpha\varphi_0^{\alpha-1}(u)\varphi_0'(u)C_0^{\beta}(u) + \varphi_0^{\alpha}(u)\frac{dC_0^{\beta}(u)}{du} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{k-1}\left(\alpha\varphi_l^{\alpha-1}(u)\varphi_l'(u)C_l^{\beta}(u) + \varphi_l^{\alpha}(u)\frac{dC_l^{\beta}(u)}{du}\right)\right] < \infty.$$

Функция $\varphi_0(u)$ аналитическая в области $|u|<r,\ r>1$, поэтому $\lim_{u\uparrow 1}\varphi_0'(u)=\varphi_0'(1)=a$; $\lim_{u\uparrow 1}C_0^\beta(u)=C_0^\beta$, константа C_0^β используется в (16). Функции $C_l^\beta(u)$ не имеют особых точек на интервале $(1-\varepsilon,1)$, что видно из представления (10) для функции $\varphi_{\alpha\beta}(u)$; на этом интервале конечны $\dfrac{dC_l^\beta(u)}{du}$. Тогда с учетом того, что $\varphi_0(1)=q_0=1$ и $q_{\alpha\beta}=C_0^\beta+o(1),\ \alpha\to\infty$, имеем

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\mathbf{M}\{\eta_{\alpha\beta}|\eta_{\alpha\beta}<\infty\}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{\varphi_{\alpha\beta}'(1)}{q_{\alpha\beta}}=$$
$$=a+\frac{1}{C_0^\beta}\lim_{\alpha\to\infty}\lim_{u\uparrow 1}\left[\frac{1}{\alpha}\varphi_0^\alpha(u)\frac{dC_0^\beta(u)}{du}+\sum_{l=1}^{k-1}\left(\varphi_l^{\alpha-1}(u)\varphi_l'(u)C_l^\beta(u)+\frac{1}{\alpha}\varphi_l^\alpha(u)\frac{dC_l^\beta(u)}{du}\right)\right].$$

При $\alpha\to\infty$ выражение в квадратных скобках стремится к нулю равномерно на $(1-\varepsilon,\ 1)$, так как при таких u $|\varphi_0(u)|\le 1$ и $|\varphi_l(u)|<1,\ l=1,\ldots,k-1$. Таким образом, $\lim_{\alpha\to\infty}\lim_{u\uparrow 1}[\ldots]=\lim_{u\uparrow 1}\lim_{\alpha\to\infty}[\ldots]=\lim_{u\uparrow 1}0=0$, что завершает вывод соотношения (20).

Аналогично выводят соотношение (21) с использованием выражений (19), (9) и асимптотик (16), (20). ►

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. В докритическом случае, при фиксированном* $x\in(-\infty,\infty)$,

$$\lim_{\alpha\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_{\alpha\beta}-a\alpha}{\sigma\sqrt{\alpha}}\le x|\eta_{\alpha\beta}<\infty\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy,$$

где a *и* σ^2 *определены выше.*

◄ Применим метод характеристических функций [10]. Покажем, что характеристическая функция для нормированной случайной величины, $t\in(-\infty,\infty)$,

$$\hat{\varphi}_{\alpha\beta}(t)=\mathbf{M}\left\{\exp\left(it\frac{\eta_{\alpha\beta}-a\alpha}{\sigma\sqrt{\alpha}}\right)\Big|\,\eta_{\alpha\beta}<\infty\right\}$$

стремится при $\alpha\to\infty$ к функции $e^{-t^2/2}$, являющейся характеристической функцией стандартного нормального распределения [11]. Имеем

$$\hat{\varphi}_{\alpha\beta}(t)=\frac{1}{q_{\alpha\beta}}e^{-ita\sqrt{\alpha}/\sigma}\,\varphi_{\alpha\beta}(e^{it/(\sigma\sqrt{\alpha})})$$

и из явного представления (9) следует

$$\hat{\varphi}_{\alpha\beta}(t)=\frac{1}{q_{\alpha\beta}}e^{-ita\sqrt{\alpha}/\sigma}\sum_{l=0}^{k-1}C_l^\beta(e^{it/(\sigma\sqrt{\alpha})})\,\varphi_l^\alpha(e^{it/(\sigma\sqrt{\alpha})}).$$

При $\alpha \to \infty$ значение $e^{it/(\sigma\sqrt{\alpha})}$ стремится к 1. При значениях u, близких к 1, $|\varphi_l(u)|<1$, так как $\varphi_l(1)=q_l<q_0=\varphi_0(1)=1$, $l=1,\ldots,k-1$. Учитывая также (16) при $q_0=1$, получаем, что предел $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\hat{\varphi}_{\alpha\beta}(t)$ равен пределу $\lim\limits_{\alpha\to\infty} e^{-ita\sqrt{\alpha}/\sigma}\varphi_0^{\alpha}(e^{it/(\sigma\sqrt{\alpha})})$.

Используя разложение Маклорена

$$\ln\varphi_0(e^v)=\varphi_0'(1)v+(\varphi_0''(1)+\varphi_0'(1)-(\varphi_0'(1))^2)v^2/2+o(v^2),\quad v\to 0,$$

имеем при $\alpha \to \infty$

$$\varphi_0^{\alpha}(e^{it/(\sigma\sqrt{\alpha})})=\exp\left(it\,\frac{\varphi_0'(1)\sqrt{\alpha}}{\sigma}-t^2\,\frac{\varphi_0''(1)+\varphi_0'(1)-(\varphi_0'(1))^2}{2\sigma^2}+o(1)\right).$$

Перемножая $e^{-ita\sqrt{\alpha}/\sigma}$ на последнее выражение, получаем, с учетом определений a и σ^2, $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\hat{\varphi}_{\alpha\beta}(t)=e^{-t^2/2}$. ►

Критический случай. Производящая функция (2) аналитическая в области $|r|<1$, $r=1$ точка ветвления второго порядка; формула (18) приводит к значению математического ожидания $\mathbf{M}\{\eta_{\alpha\beta}|\eta_{\alpha\beta}<\infty\}=\infty$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. В критическом случае, при фиксированном* $x\in[0,\infty)$,

$$\lim_{\alpha\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_{\alpha\beta}}{\alpha^2A_0/(B-k(k-1))}\le x\Big|\eta_{\alpha\beta}<\infty\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-1/(2y)}y^{-3/2}\,dy,$$

где $A_0=\dfrac{\partial h(u,s)}{\partial u}\Big|_{u=1,s=1}$; $B=\dfrac{\partial^2 h(u,s)}{\partial s^2}\Big|_{u=1,s=1}$.

◄ Применим метод интегральных преобразований для доказательства предельных теорем [10]. Покажем, что преобразование Лапласа для распределения нормированной случайной величины, $\lambda\in[0,\infty)$,

$$\overline{\varphi}_{\alpha\beta}(\lambda)=\mathbf{M}\left\{\exp\left(-\lambda\,\frac{\eta_{\alpha\beta}}{\alpha^2A_0/(B-k(k-1))}\right)\Big|\eta_{\alpha\beta}<\infty\right\}$$

стремится при $\alpha\to\infty$ к функции $e^{-\sqrt{2\lambda}}$, являющейся преобразованием Лапласа плотности распределения устойчивого закона с показателем $\alpha=1/2$ [12],

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/(2x)}x^{-3/2}\,dx=e^{-\sqrt{2\lambda}}.$$

Имеем

$$\overline{\varphi}_{\alpha\beta}(\lambda)=\frac{1}{q_{\alpha\beta}}\varphi_{\alpha\beta}\left(\exp\left\{-\lambda\,\frac{B-k(k-1)}{\alpha^2A_0}\right\}\right)$$

и из представления (9) следует

$$\overline{\varphi}_{\alpha\beta}(\lambda)=\frac{1}{q_{\alpha\beta}}\sum_{l=0}^{k-1}C_l^{\beta}\left(\exp\left\{-\lambda\frac{B-k(k-1)}{\alpha^2 A_0}\right\}\right)\varphi_l^{\alpha}\left(\exp\left\{-\lambda\frac{B-k(k-1)}{\alpha^2 A_0}\right\}\right).$$

При $\alpha\to\infty$ выражение в круглых скобках стремится к 1. При значениях u, близких к 1, $|\varphi_l(u)|<1$, так как $\varphi_l(1)=q_l<q_0=\varphi_0(1)=1$, $l=1,\ldots,k-1$. Учитывая также (16) при $q_0=1$, получаем, что предел $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\overline{\varphi}_{\alpha\beta}(\lambda)$ равен пределу

$$\lim_{\alpha\to\infty}\varphi_0^{\alpha}\left(\exp\left\{-\lambda\frac{B-k(k-1)}{\alpha^2 A_0}\right\}\right). \qquad (22)$$

Согласно лемме 3, представим функцию $\varphi_0(u)$ в виде (в критическом случае $r=1$, $R=\varphi_0(1)=1$), $u\to 1$,

$$\varphi_0(u)=1+c_1(u-1)^{1/2}+c_2(u-1)+O((u-1)^{3/2}) \qquad (23)$$

и найдем коэффициент c_1, который определяют из (15) и обращения ряда

$$u-1=(s-1)\frac{du}{ds}|_{s=1}+\frac{1}{2}(s-1)^2\frac{d^2u}{ds^2}|_{s=1}+\ldots=-\frac{B-k(k-1)}{2A_0}(s-1)^2+\ldots \qquad (24)$$

Выражая в $s-1=c_1(u-1)^{1/2}+c_2(u-1)+\ldots$ разность $u-1$ с помощью (24), имеем $c_1=i\sqrt{2A_0/(B-k(k-1))}$. Используя (23), получаем для предела (22) выражение

$$\lim_{\alpha\to\infty}\exp\left\{\alpha c_1\sqrt{\exp\left\{-\lambda\frac{B-k(k-1)}{\alpha^2 A_0}\right\}-1}\right\}=\exp\left\{-\sqrt{2\lambda}\right\}. \blacktriangleright$$

Надкритический случай. Далее потребуются величины $\tilde{a}=\varphi_0'(1)/q_0$ и $\tilde{\sigma}^2=\varphi_0''(1)/q_0+\varphi_0'(1)/q_0-(\varphi_0''(1)/q_0)^2$. Обозначим

$$\tilde{A}_0=\frac{\partial h(u,s)}{\partial u}|_{u=1,s=q_0},\qquad \tilde{A}=\frac{\partial h(u,s)}{\partial s}|_{u=1,s=q_0};$$

$$\tilde{B}_{00}=\frac{\partial^2 h(u,s)}{\partial u^2}|_{u=1,s=q_0},\quad \tilde{B}_0=\frac{\partial^2 h(u,s)}{\partial u\partial s}|_{u=1,s=q_0},\quad \tilde{B}=\frac{\partial^2 h(u,s)}{\partial s^2}|_{u=1,s=q_0}.$$

После дифференцирования (5), в котором $s=\varphi_0(u)$, по u в точке $u=1$, $s=q_0$, и учитывая $\varphi_0(1)=q_0$, имеем

$$\tilde{A}_0+\tilde{A}\varphi_0'(1)-k\varphi_0'(1)q_0^{k-1}=0;$$

$$\tilde{B}_{00}+2\tilde{B}_0\varphi_0'(1)+\tilde{B}(\varphi_0'(1))^2+\tilde{A}\varphi_0''(1)-k(k-1)(\varphi_0'(1))^2q_0^{k-2}-k\varphi_0''(1)q_0^{k-1}=0,$$

откуда получаем

$$\tilde{a}=\frac{\varphi_0'(1)}{q_0}=\frac{\tilde{A}_0}{q_0(kq_0^{k-1}-\tilde{A})}<\infty;$$

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{\tilde{B}_{00}}{q_0(kq_0^{k-1}-\tilde{A})}+\frac{2\tilde{B}_0\tilde{A}_0}{q_0(kq_0^{k-1}-\tilde{A})^2}+\frac{(\tilde{B}-k(k-1))\tilde{A}_0^2}{q_0(kq_0^{k-1}-\tilde{A})^3}+$$
$$+\frac{\tilde{A}_0}{q_0(kq_0^{k-1}-\tilde{A})}-\frac{\tilde{A}_0^2}{q_0^2(kq_0^{k-1}-\tilde{A})^2}<\infty.$$

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1. В надкритическом случае*

$$\mathbf{M}\left\{\eta_{\alpha\beta}\middle|\eta_{\alpha\beta}<\infty\right\}=\tilde{a}\alpha(1+o(1)),\quad \alpha\to\infty;$$

$$\mathbf{D}\left\{\eta_{\alpha\beta}\middle|\eta_{\alpha\beta}<\infty\right\}=\tilde{\sigma}^2\alpha(1+o(1)),\quad \alpha\to\infty.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 1. В надкритическом случае, при фиксированном* $x\in(-\infty,\infty)$,

$$\lim_{\alpha\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_{\alpha\beta}-\tilde{a}\alpha}{\tilde{\sigma}\sqrt{\alpha}}\le x\middle|\eta_{\alpha\beta}<\infty\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy,$$

где $\tilde{a}$ *и* $\tilde{\sigma}^2$ *определены выше.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема об асимптотических свойствах вероятностей остановки. В теории случайных блужданий представляет интерес асимптотическая формула для $q_{(n,\beta)}^{(0,k)}$ при $n\to\infty$ [1, 3, 4]. Вероятности остановки выражают через интеграл

$$q_{(n,\beta)}^{(0,k)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{0+}\varphi_{k\beta}(u)\frac{du}{u^{n+1}},\quad \beta=0,\ldots,k-1, \tag{25}$$

где согласно представлению (10) (ср. формулы Виета),

$$\begin{aligned}
&\varphi_{k,k-1}(u)=\varphi_0(u)+\ldots+\varphi_{k-1}(u);\\
&\varphi_{k,k-2}(u)=-\varphi_0(u)\varphi_1(u)-\ldots-\varphi_{k-2}(u)\varphi_{k-1}(u);\\
&\varphi_{k,k-3}(u)=\varphi_0(u)\varphi_1(u)\varphi_2(u)+\ldots+\varphi_{k-3}(u)\varphi_{k-2}(u)\varphi_{k-1}(u);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_{k1}(u)=(-1)^{k-2}(\varphi_0(u)\varphi_1(u)\ldots\varphi_{k-2}(u)+\ldots+\varphi_1(u)\varphi_2(u)\ldots\varphi_{k-1}(u));\\
&\varphi_{k0}(u)=(-1)^{k-1}\varphi_0(u)\varphi_1(u)\ldots\varphi_{k-1}(u).
\end{aligned} \tag{26}$$

Для формулировки теоремы 5 опишем вид производящих функций $\varphi_{k\beta}(u)$, определяемый достижимостью из начального состояния $(0,k)$ точек остановки случайного блуждания (S_n^0,S_n). Обозначим через S множество всех точек плоскости с целочисленными координатами (γ_0,γ), для которых $p_{\gamma_0,\gamma+k}>0$ или

$\gamma_0 = \gamma = 0$. Обозначим S_L такую решетку целочисленных точек, которая содержит множество S и не содержит никакой подрешетки, удовлетворяющей этому же свойству. Координаты всех точек решетки S_L можно получить, составляя всевозможные линейные комбинации с целыми коэффициентами из координат точек множества S. Свойства такой решетки исследованы в работе [3].

Если на распределение вероятностей $\{p_{\gamma_0\gamma}\}$ наложены условия теоремы 1, то решетка S_L двумерна, в ее основании лежит параллелограмм площадью d, причем d — целое число. Решетка S_L характеризует множество состояний $(\beta_0, \beta) \in N^2$ таких, что $P^{(0,k)}_{(\beta_0,\beta)}(n_0) > 0$ при некотором $n_0 < \infty$. Очевидно, если $(\beta_0, \beta) \notin S_L$, то $P^{(0,k)}_{(\beta_0,\beta)}(n) \equiv 0$. Обозначим l_β минимальное число β_0 такое, что $P^{(0,k)}_{(\beta_0,\beta)}(n_0) > 0$ при некотором $n_0 < \infty$ ($\beta = 0, \ldots, k-1$). Такое l_β существует, так как в противном случае вероятность $q_{k\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(0,k)}_{(n,\beta)} = 0$, чего быть не может по условиям (3). Нетрудно заключить, при фиксированном β, что S_L принадлежат только точки вида $(l_\beta + md, \beta)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Достижимыми из состояния $(0, k)$ являются точки остановки вида $(l_\beta + md, \beta)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, и производящая функция вероятностей остановки имеет вид, $u \le 1$,

$$\varphi_{k\beta}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{(0,k)}_{(l_\beta + md, \beta)} u^{l_\beta + md}, \quad \beta = 0, \ldots, k-1.$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Примем*

$$A_0 = \frac{\partial h(u,s)}{\partial u}\Big|_{u=r,\, s=R}, \quad B = \frac{\partial^2 h(u,s)}{\partial s^2}\Big|_{u=r,\, s=R};$$

$$\varkappa_{k-1} = 1, \varkappa_{k-2} = -\varphi_1(r) - \ldots - \varphi_{k-1}(r);$$

$$\varkappa_{k-3} = \varphi_1(r)\varphi_2(r) + \ldots + \varphi_{k-2}(r)\varphi_{k-1}(r), \ \ldots, \ \varkappa_0 = (-1)^{k-1}\varphi_1(r)\ldots\varphi_{k-1}(r).$$

При $n \to \infty$

$$q^{(0,k)}_{(n,\beta)} = \begin{cases} d\varkappa_\beta \left(\dfrac{A_0 r}{2\pi\left(B - k(k-1)R^{k-2}\right)} \right)^{1/2} r^{-n} n^{-3/2} + O(r^{-n} n^{-5/2}), & n \equiv l_\beta \pmod d; \\ 0, & n \not\equiv l_\beta \pmod d. \end{cases} \tag{27}$$

Следствие 1. *В критическом случае, когда* $A = \dfrac{\partial h(u,s)}{\partial s}\Big|_{u=1, s=1} = k$, *при* $n \to \infty$

$$q^{(0,k)}_{(n,\beta)} = \begin{cases} d\varkappa_\beta \sqrt{\dfrac{A_0}{2\pi\left(B - k(k-1)\right)}}\, n^{-3/2} + O(n^{-5/2}), & n \equiv l_\beta \pmod d; \\ 0, & n \not\equiv l_\beta \pmod d. \end{cases} \tag{28}$$

Поскольку в критическом случае равенства $h(u,s)=s^k$ и $\dfrac{\partial h}{\partial s}=ks^{k-1}$ справедливы при $u=1,\ s=1$ согласно лемме 2 и следующему за ней замечанию, то $r=1$ и $R=\varphi_0(1)=q_0=1;$ (28) вытекает из (27).

Доказательство теоремы 5 проводят аналогично доказательству теоремы 1, приведенной в § 4 главы 5 работы [3], где исследован случай $k=1.$ Случай $k\geq 2$ сводится к случаю $k=1.$ Рассматривают интеграл (25), причем замкнутый контур интегрирования деформируется так, что главную роль в асимптотическом исследовании интеграла при $n\to\infty$ играют особые точки функции $\varphi_0(u)$ на границе круга сходимости $|u|=r.$ В случае $k\geq 2$ необходимо отметить, что функции под интегралом в (26) имеют вид

$$\varphi_{k\beta}(u)=\varphi_0(u)\psi_\beta(u)+\tilde{\psi}_\beta(u),\qquad \beta=0,\ldots,k-1, \tag{29}$$

причем из формул (26) следуют выражения

$$\begin{aligned}
&\psi_{k-1}(u)=1;\\
&\psi_{k-2}(u)=-\varphi_1(u)-\ldots-\varphi_{k-1}(u);\\
&\psi_{k-3}(u)=\varphi_1(u)\varphi_2(u)+\ldots+\varphi_{k-2}(u)\varphi_{k-1}(u);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\psi_1(u)=(-1)^{k-2}(\varphi_1(u)\varphi_2(u)\ldots\varphi_{k-2}(u)+\ldots+\varphi_2(u)\varphi_3(u)\ldots\varphi_{k-1}(u));\\
&\psi_0(u)=(-1)^{k-1}\varphi_1(u)\ldots\varphi_{k-1}(u);
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{\psi}_{k-1}(u)=\varphi_1(u)+\ldots+\varphi_{k-1}(u);\\
&\tilde{\psi}_{k-2}(u)=-\varphi_1(u)\varphi_2(u)-\ldots-\varphi_{k-2}(u)\varphi_{k-1}(u);\\
&\tilde{\psi}_{k-3}(u)=\varphi_1(u)\varphi_2(u)\varphi_3(u)+\ldots+\varphi_{k-1}(u)\varphi_{k-2}(u)\varphi_{k-1}(u);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\tilde{\psi}_1(u)=(-1)^{k-1}\varphi_1(u)\ldots\varphi_{k-1}(u);\\
&\tilde{\psi}_0(u)=0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Функции $\psi_\beta(u),\ \tilde{\psi}_\beta(u)$ аналитические в области $|u|<\rho,\ \rho>r.$ Действительно, пусть $u_0,\ |u_0|\leq r,$ особая точка функции $\varphi_l(u).$ Как отмечено в работе [2], $(u_0,\varphi_l(u_0))$ точка ветвления порядка $m,\ m\leq k,$ многозначной функции $\varphi(u).$ В некоторой окрестности точки u_0 функция $\varphi(u)$ представима в виде

$$\varphi(u)=\omega\left(\sqrt[m]{u-u_0}\right), \tag{32}$$

где $\omega(z)$ — аналитическая функция в точке $z=0$ [8]. Среди функций $\varphi_1(u),\ldots,\varphi_{k-1}(u)$ имеются функции $\varphi_l(u),\ \varphi_{l_1}(u),\ldots,\ \varphi_{l_{m-1}}(u),$ соответствующие m ветвям функции (32) в окрестности точки $u_0.$ В таком случае из выражений (30), (31) следует, что точка u_0 не является особой для функций $\psi_\beta(u),\ \tilde{\psi}_\beta(u)$ — достаточно подставить в (30), (31) выражения для $\varphi_l(u),\varphi_{l_1}(u),\ldots,\varphi_{l_{m-1}}(u)$ из (32).

После подстановки (29) в (25) получаем, при $n \to \infty$

$$q_{(n,\beta)}^{(0,k)} = \varkappa_\beta \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0+} \varphi_0(u) \frac{du}{u^{n+1}} + O(\rho_1^{-n}), \quad n \equiv l_\beta (\bmod d),$$

где $r < \rho_1 < \rho$ и $\varkappa_\beta = \psi_\beta(r)$, $\beta = 0, \ldots, k-1$. С использованием результатов о решетке S_L в работе [3] построен специальный симметричный контур Γ для интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \varphi_0(u) \frac{du}{u^{n+1}},$$

охватывающий каждую из d точек ветвления второго порядка r, $re^{2\pi i/d}, \ldots, re^{2\pi i(d-1)/d}$ (в лемме 3 рассмотрена точка ветвления $u = r$ функции $\varphi_0(u)$). Последний интеграл исследован в работе [3] и приведен к асимптотике (27).

Заключение. Обобщен случай $k = 1$ [3], когда перескока случайного блуждания через границу полуплоскости нет. Нелинейное свойство ветвления переходных вероятностей, позволяющее свести исследование к схеме суммирования независимых случайных величин, использовано в работе [3]. Методами, приведенными в настоящей работе, установлены предельные теоремы, представленные в работе [13] для точки выхода за границу неоднородного случайного блуждания на N^2 и в работе [14] для точки выхода за границу случайного блуждания на N^3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969. 472 с.

2. *Калинкин А.В.* Вероятности перескока границы для случайного блуждания в полуплоскости и ветвящийся процесс с взаимодействием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 2. С. 38–52. DOI: 10.18698/1812-3368-2015-2-38-52

3. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.

4. *Otter R.* The multiplicative process // Ann. Math. Statistics. 1949. Vol. 20. No. 2. P. 206–224.

5. *Калинкин А.В.* Финальные вероятности для ветвящегося случайного процесса с взаимодействием частиц // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. Вып. 6. С. 1309–1312.

6. *Калинкин А.В.* Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц // Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 27. Вып. 1. С. 192–197.

7. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 472 с.

8. *Евграфов М.А, Бежанов К.А., Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по теории аналитических функций. М.: Наука, 1972. 416 с.

9. *Athreya K.B., Ney P.E.* Branching processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972. 287 p.

10. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М.: Едиториал УРСС, 2005. 448 с.

11. *Оберхеттингер Ф.* Преобразования Фурье распределений и их обращения. Таблицы. М.: Наука, 1979. 248 с.

12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 344 с.

13. *Ланге А.М.* О распределении числа финальных частиц ветвящегося процесса с превращениями и парными взаимодействиями // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51. Вып. 4. С. 801–809.

14. *Мастихин А.В.* Решение стационарного первого уравнения Колмогорова для марковского процесса эпидемии со схемой $T_1+T_2 \to T_1+T_3;\quad T_1+T_3 \to T_1;\quad T_1 \to 0$ // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2005. № 2. С. 75–86.

Калинкин Александр Вячеславович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Высшая математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Калинкин А.В. Предельные теоремы для случайного блуждания в полуплоскости с перескоком границы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 6. С. 16–31. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-16-31

LIMIT THEOREMS FOR RANDOM WALK IN A HALF-PLANE WITH JUMP ACROSS THE BORDER

A.V. Kalinkin kalinkin@bmstu.ru

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The article is a continuation of the work [2], in which we obtained the analytical formulas for the probability of reaching the boundary by the random walk method on the integer points of the half-plane and for the probability of a jump across the border. In this paper we have found asymptotic approximations for the given probability distributions. These approximations are of special interest for using them in applications. Limit theorems for subcritical and supercritical cases lead to the normal law for the exit point or the jump across the border point, provided that the random walk stop occurred. In the critical case the asymptotic approach is different from the normal law. We obtained a stable distribution with $\alpha = 1/2$. Limit theorems generalize the known special case, when there is no jump across the border. To derive the limit theorems, we applied the method of characteristic functions and Laplace transform method

Keywords

Random walk stop probability, generating functions, limit theorems, the method of characteristic functions

REFERENCES

[1] Spitzer F. Principles of random walk. Princeton, Van Nostrand Company, 1964. 406 p.

[2] Kalinkin A.V. Probability of jump across the border for random walk in a half-plane and a branching process with interaction. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv.*

Nauki [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 2, pp. 38–52 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2015-2-38-52

[3] Sevast'yanov B.A. Vetvyashchiesya protsessy [Branching processes]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 436 p. [German transl.: Sewastjanow B.A. Verzweigungsprozesse. Berlin, Akademie-Verlag, 1974].

[4] Otter R. The multiplicative process. *Ann. Math. Statistics*, 1949, vol. 20, no. 2, pp. 206–224.

[5] Kalinkin A.V. Final probabilities for a random branching process with interaction of particles. *Soviet Math. Dokl.*, 1983, vol. 27, no. 2, pp. 493–497.

[6] Kalinkin A.V. On the probability of the extinction of branching process with interaction of particles. *Theory of Probability and Its Applications*, 1982, vol. 27, no. 1, pp. 201–205.

[7] Evgrafov M.A. Analytic functions. Dover Publ., 1978. 336 p.

[8] Evgrafov M.A., Bezhanov K.A., Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I. A collection of problems on the theory of analytic functions. Moscow, Nauka Publ., 1972.

[9] Athreya K.B., Ney P.E. Branching processes. Berlin, Springer-Verlag, 1972. 287 p.

[10] Gnedenko B.V. The theory of probability. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2005. 529 p.

[11] Oberhettinger F. Fourier transforms of distributions and their inverses. A collection of tables. N.Y., London, Academic Press, 1973. 167 p.

[12] Bateman H., Erdélyi A. Tables of integral transforms. Vol. 1. N.Y., McGraw-Hill, 1954. 451 p.

[13] Lange A.M. On the distribution of the number of final particles in a branching process with transformations and pairwise interactions. *Theory of Probability and Its Applications*, 2007, vol. 51, no. 4, pp. 704–714.

[14] Mastikhin A.V. Solving stationary first Kolmogorov's equation for Markovian process of epidemic developing according to the scheme $T_1+T_2 \to T_1+T_3; \quad T_1+T_3 \to T_1; \quad T_1 \to 0$. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2005, no. 2, pp. 75–86 (in Russ.).

Kalinkin A.V. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Kalinkin A.V. Limit Theorems for Random Walk in a Half-Plane with Jump across the Border. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 6, pp. 16–31.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-16-31