

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ, СОДЕРЖАЩЕМ СФЕРИЧЕСКИЙ ОЧАГ РАЗОГРЕВА С ТЕПЛОПОГЛОЩАЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ

А.В. Аттетков

fn2@bmstu.ru

И.К. Волков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача определения температурного поля изотропного твердого тела со сферическим очагом разогрева, обладающим термически тонким теплопоглощающим покрытием. Исследован нестационарный режим теплообмена с изменяющимися во времени коэффициентом теплоотдачи и температурой очага разогрева. Определены достаточные условия, выполнение которых обеспечивает возможность реализации автомоделного процесса теплопереноса в анализируемой системе. Качественно исследованы физические свойства изучаемого автомоделного процесса и установлены его специфические особенности. Теоретически обоснована возможность реализации граничного режима с обострением в сферическом очаге разогрева

Ключевые слова

Изотропное твердое тело, сферический очаг разогрева, термически тонкое теплопоглощающее покрытие, температурное поле, автомоделное решение

Поступила в редакцию 26.01.2016
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016

В математической теории теплопроводности [1–5] важное место занимает задача определения температурного поля твердого тела со сферическим очагом разогрева, имеющего покрытие [6–10]. Несмотря на достигнутые результаты в исследовании процессов теплопереноса в изучаемой системе, некоторые вопросы требуют дальнейшего развития. В частности, это относится к теоретическому обоснованию возможности реализации режима термостатирования границы сферического очага разогрева. Рассмотрению указанного вопроса и посвящены проводимые исследования.

В качестве объекта исследований использовано изотропное пространство со сферическим очагом разогрева — шаровой полостью радиусом r_0 , заполненной высокотемпературным газом (далее — внешняя среда) и обладающей изотропным теплопоглощающим покрытием постоянной толщиной Δ с объемной плотностью мощности внутренних источников теплоты $q(r, t)$. Введем следующие допущения.

1. Начальная температура T_0 объекта исследований постоянна и реализуются нестационарные режимы теплообмена с внешней средой при переменном во времени коэффициенте теплоотдачи $\alpha(t)$ и температуре внешней среды $T_c(t)$.

2. В системе пространство–покрытие выполняются условия идеального теплового контакта [2, 3].

3. Изотропное покрытие термически тонкое, т. е. для него допустима реализация идеи «сосредоточенная емкость» [4], среднеинтегральная по толщине покрытия температура

$$\langle T(t) \rangle = \frac{3}{(r_0 + \Delta)^3 - r_0^3} \int_{r_0}^{r_0 + \Delta} T(r, t) r^2 dr$$

равна как температуре его границ, так и температуре контактной границы анализируемой системы: $T(r_0 + 0, t) \equiv T(r_0 + \Delta - 0, t) \equiv \langle T(t) \rangle \equiv T(r_0 + \Delta + 0, t)$, $t \geq 0$.

Цель исследования — нахождение достаточных условий, выполнение которых обеспечивает возможность реализации автомодельного (самоподобного) процесса теплопереноса в изотропном пространстве со сферическим очагом разогрева, имеющим теплопоглощающее покрытие. Отметим, что в понятие «автомодельный» обычно вкладывается следующий смысл: изучаемый физический процесс является гомохронным (однородным во времени) и можно проводить поиск его состояния равновесия, которое не должно зависеть от времени [11–14].

В соответствии с допущениями 1, 2 и с учетом ранее полученных результатов [6, 8] исходная математическая модель процесса формирования температурного поля объекта исследований имеет вид

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}, \quad \rho > R > 1, \quad Fo > 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \chi \left\{ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} - \Lambda f(\rho, Fo) \right\}, \quad 1 < \rho < R, \quad Fo > 0; \tag{2}$$

$$\theta(\rho, 0) = 0; \tag{3}$$

$$\theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=R-0} = \theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=R+0}; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R-0} = \Lambda \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R+0}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1+0} = \Lambda Bi(Fo) \left[\theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=1+0} - \zeta(Fo) \right]; \tag{6}$$

$$\theta(\rho, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} \in L_{\rho^2}^2 [1, +\infty). \tag{7}$$

Здесь условие (7) означает, что при каждом фиксированном значении $Fo \geq 0$ функция $\theta(\rho, Fo)$ интегрируема с квадратом и весом ρ^2 по радиальному переменному $\rho \in [1, +\infty)$.

В математической модели (1)–(7) использованы следующие безразмерные переменные и параметры:

$$Fo = \frac{at}{r_0^2}; \quad \rho = \frac{r}{r_0}; \quad R = \frac{r_0 + \Delta}{r_0}; \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_{c0} - T_0}; \quad \zeta = \frac{T_c - T_0}{T_{c0} - T_0};$$

$$\chi = \frac{a_{\text{п}}}{a}; \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{п}}}; \quad Bi = \frac{\alpha}{\lambda} r_0; \quad f = \frac{qr_0^2}{\lambda(T_{c0} - T_0)};$$

$T(r, t)$ — температура в момент времени t в точках изотропного пространства, отстоящих от центра шаровой полости на расстоянии r ; T_{c0} — начальная температура внешней среды; $\lambda, a, \lambda_{\text{п}}, a_{\text{п}}$ — теплопроводность и температуропроводность твердого тела и покрытия соответственно; α — коэффициент теплоотдачи. Функции $Bi(Fo), \zeta(Fo)$ согласно решаемой задаче могут принимать лишь неотрицательные значения и удовлетворяют условиям Гельдера [15].

Для достижения основной цели проведенных исследований используем допущение 3 [4]. Умножив левую и правые части уравнения (2) на $3(R^3 - 1)^{-1}$ с последующим интегрированием по переменной ρ в пределах от 1 до R и воспользовавшись равенствами (4)–(6), получим

$$\frac{d\langle\theta(Fo)\rangle}{dFo} = \varepsilon^{-1} \left\{ R^2 \frac{\partial\theta(\rho, Fo)}{\partial\rho} \Big|_{\rho=R+0} - Bi(Fo)[\langle\theta(Fo)\rangle - \zeta(Fo)] - Q(Fo) \right\},$$

где $\varepsilon \triangleq (3\chi\Lambda)^{-1}(R^3 - 1)$ — определяющий безразмерный параметр реализуемой модели «сосредоточенная емкость», который по смыслу решаемой задачи может принимать только положительные значения; $Q(Fo) \triangleq \int_1^R f(\rho, Fo)\rho^2 d\rho$ — интегральная величина, характеризующая реализуемый режим теплопоглощения в покрытии.

Учитывая очевидные равенства

$$\langle\theta(Fo)\rangle = \theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=R+0}, \quad Fo \geq 0;$$

$$\frac{d\langle\theta(Fo)\rangle}{dFo} = \frac{\partial\theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\rho=R+0}, \quad Fo \geq 0,$$

запишем искомую математическую модель

$$\frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho}, \quad \rho > R, \quad Fo > 0;$$

$$\theta(\rho, 0) = 0;$$

$$\begin{aligned} R^2 \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R+0} &= Bi(Fo) \left[\theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=R+0} - \zeta(Fo) \right] + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial \theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\rho=R+0} + Q(Fo); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\theta(\rho, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} \in L^2_{\rho^2} [R, +\infty).$$

Функция $Q(Fo)$ может принимать лишь неотрицательные значения и удовлетворяет условиям Гельдера [15]. Отметим, что наличие термически тонкого покрытия в модели (8) фактически учтено граничным условием при $\rho = R$, явно содержащим производную температуры по времени.

Если использовать стандартный прием [1] и принять

$$V(\rho, Fo) \triangleq \rho \theta(\rho, Fo), \quad (9)$$

то согласно (8), (9) функция $V(\rho, Fo)$ должна являться решением следующей смешанной задачи для уравнения в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial V(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 V(\rho, Fo)}{\partial \rho^2}, \quad \rho > R, \quad Fo > 0;$$

$$V(\rho, 0) = 0;$$

$$\begin{aligned} R^2 \frac{\partial V(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} &= [Bi(Fo) + R] V(\rho, Fo) \Big|_{\rho=R} - R[Bi(Fo) \zeta(Fo) - \\ &- Q(Fo)] + \varepsilon \frac{\partial V(\rho, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\rho=R}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$V(\rho, Fo) \Big|_{Fo \geq 0} \in L^2 [R, +\infty).$$

Реализуем в задаче (10) автомодельную подстановку

$$\xi = \frac{\rho - R}{\sqrt{Fo}}. \quad (11)$$

Тогда с учетом очевидных равенств

$$\frac{\partial}{\partial Fo} = -\frac{\xi}{2Fo} \frac{d}{d\xi}; \quad \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{1}{\sqrt{Fo}} \frac{d}{d\xi}; \quad \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{1}{Fo} \frac{d^2}{d\xi^2}$$

и введенных обозначений

$$U(\xi) \triangleq V(\rho, Fo); \quad h(Fo) \triangleq Bi(Fo) + R \quad (12)$$

смешанная задача (4) эквивалентна краевой задаче

$$\frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2} \frac{dU(\xi)}{d\xi} = 0, \xi > 0; \quad (13)$$

$$\left. \frac{dU(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \sqrt{Fo} \gamma(Fo) \{U(\xi)|_{\xi=0} - f(Fo)\}; \quad (14)$$

$$U(\xi) \in L^2_{\xi}[0, +\infty), \quad (15)$$

где

$$\gamma(Fo) \triangleq R^{-2}h(Fo); \quad f(Fo) \triangleq Rh^{-1}(Fo)[Bi(Fo)\zeta(Fo) - Q(Fo)]. \quad (16)$$

Отметим, что начальное условие при $Fo = 0$ в смешанной задаче (10) в автомодельных переменных (11) будет иметь вид краевого условия задачи (13)–(15), заданного при $\xi = +\infty$.

Непосредственный анализ краевой задачи (13)–(15) показывает, что используемая подстановка (11) позволяет получить автомодельное решение при выполнении условий

$$f(Fo) \equiv f_0 - \text{const}; \quad (17)$$

$$\sqrt{Fo} \gamma(Fo) \equiv \gamma_0 - \text{const}, \quad (18)$$

где $f_0 \geq 0$, $\gamma_0 > 0$ — постоянные. В этом случае искомое автомодельное решение будет обладать свойством изменения со временем только масштаба автомодельного переменного $\xi \geq 0$, в то время как масштаб искомой функции $U(\xi)$ остается неизменным.

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (7) находим стандартными методами:

$$U(\xi) = U(0) + U'(0) \sqrt{\pi} \left\{ 1 - \text{erfc} \frac{\xi}{2} \right\}, \quad \xi \geq 0, \quad (19)$$

где $\text{erfc}\{\cdot\}$ — дополнительная функция ошибок Гаусса [2]; знак «'» обозначает производную по переменной ξ .

Используя равенство (19), с учетом условий автомодельности (17), (18) и краевых условий (14), (15) находим безразмерную температуру $U(0) \equiv R\theta(R, Fo)$ границы сферического очага разогрева в изучаемом автомодельном режиме теплопереноса:

$$U(0) = f_0 \frac{\gamma_0 \sqrt{\pi}}{1 + \gamma_0 \sqrt{\pi}}. \quad (20)$$

Для получения содержательной информации о свойствах изучаемого процесса теплопереноса обратимся к условиям автомодельности (17), (18) реализуемого граничного режима. Воспользовавшись условием автомодельности (17) и равенствами (12), (16), запишем следующее представление зависимости функций $Bi(Fo)$, $\zeta(Fo)$, $Q(Fo)$:

$$\left[\frac{R\zeta(Fo)}{f_0} - 1 \right] \frac{Bi(Fo)}{R[f_0^{-1}Q(Fo) + 1]} = 1, \quad (21)$$

Равенство (21) при $\theta(Fo) \equiv 0$ позволяет качественно проанализировать физические свойства автомодельного процесса теплопереноса в изучаемой системе. В одном предельном случае $Bi(Fo) = 0$, при реализации режима тепловой изоляции границы очага разогрева, безразмерная температура внешней среды $\zeta(Fo)$ обращается в бесконечность, т. е. изменяется в режиме с обострением [14]. Физическая интерпретация реализуемого граничного режима ассоциируется, например, с процессом формирования очага разогрева, содержащего источник газовой выделения [16].

В другом предельном случае $Bi(Fo) = +\infty$, т. е. при отсутствии теплопереноса в изучаемой системе, имеем $Rf_0^{-1}\zeta(Fo) \rightarrow 1$. При этом вне зависимости от реализуемого режима теплопереноса безразмерная температура границы очага разогрева $U(0) \equiv R\theta(R, Fo) - \text{const}$ определена равенством (20).

Закон теплообмена в изучаемой системе согласно условию автомодельности (18) и равенствам (12), (16) имеет вид

$$Bi(Fo) = R \left(\frac{R\gamma_0}{\sqrt{Fo}} - 1 \right), \quad Fo \geq 0, \quad (22)$$

а закон изменения безразмерной температуры очага разогрева —

$$\zeta(Fo) = \frac{Rf_0\gamma_0 + \sqrt{Fo}Q(Fo)}{R(R\gamma_0 - \sqrt{Fo})}, \quad Fo \geq 0. \quad (23)$$

При каждом фиксированном значении $Fo \geq 0$ функции $Bi(Fo)$, $\zeta(Fo)$ и $Q(Fo)$ могут принимать лишь неотрицательные значения, поэтому должно выполняться условие

$$\sqrt{Fo} \leq R\gamma_0. \quad (24)$$

Условие (24) можно рассматривать как достаточное условие автомодельности реализуемого граничного режима.

Непосредственный анализ равенств (22), (23) показывает, что при $\sqrt{Fo} = R\gamma_0$ граница очага разогрева теплоизолирована: $Bi(R^2\gamma_0^2) = 0$. При этом вне зависимости от закона «компенсирующего» теплопоглощения $Q(Fo)$ в

термически тонком покрытии безразмерная температура очага разогрева составляет $\zeta(R^2\gamma_0^2) = +\infty$, т. е. реализуется граничный режим с обострением [14]. Парадоксальность его свойств обусловлена тем, что, несмотря на проявление эффектов теплопроводности теплота, сосредоточенная в сферическом очаге разогрева, не распространяется в «холодное» изотропное пространство в течение всего времени существования режима.

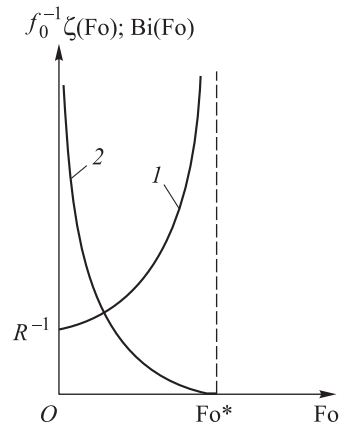
При реализации граничного режима, достаточное условие автомодельности которого определено неравенством $\sqrt{Fo} < R\gamma_0$, функция $Bi(Fo)$, определяющая закон теплообмена в изучаемой системе, монотонно убывающая, причем $Bi(0) = +\infty$, и обращается в нуль в конечный момент времени $Fo^* = (R\gamma_0)^2$. Функция $Bi(Fo)$ называется моментом обострения граничного режима, так как $\zeta(Fo^*) = +\infty$ (рисунок).

Результаты проведенных исследований теоретически обосновывают возможность реализации режима термостатирования границы сферического очага разогрева с термически тонким теплопоглощающим покрытием постоянной толщиной. Безразмерную температуру границы очага разогрева $U(0) \equiv R\theta(R, Fo) - \text{const}$ определяют по равенству (20), она зависит от параметра автомодельности f_0 , задаваемого условием (17).

Особый интерес представляет случай $f_0 = 0$, наиболее содержательно отражающий специфические особенности автомодельного процесса теплопереноса в изучаемой системе. Воспользовавшись равенством (21) при $f_0 = 0$, получим следующее представление зависимости функций $Bi(Fo)$, $\zeta(Fo)$ и $Q(Fo)$: $\zeta(Fo)Bi(Fo) = Q(Fo)$, $Fo \geq 0$. Таким образом, закон «компенсирующего» теплопоглощения в термически тонком покрытии $Q(Fo)$, обеспечивающий термостатирование границы очага разогрева, определяется не только реализуемым режимом теплообмена $Bi(Fo)$ в изучаемой системе, но и зависит от закона изменения безразмерной температуры $\zeta(Fo)$. При этом согласно равенству (23) при $f_0 = 0$ имеем

$$\zeta(Fo) = \frac{\sqrt{Fo}Q(Fo)}{R(R\gamma_0 - \sqrt{Fo})}, \quad Fo \geq 0,$$

а безразмерная температура границы сферического очага разогрева равна $U(0) \equiv R\theta(R, Fo) = 0$, $Fo \geq 0$.



Законы изменения безразмерной температуры сферического очага разогрева 1 (при $\theta(Fo) = 0$) и теплообмена в изучаемой системе 2

Заключение. Представленные результаты теоретически обосновывают возможность существования граничного режима с обострением в изотропном твердом теле со сферическим очагом разогрева, обладающим термически тонким теплопоглощающим покрытием, и наглядно иллюстрируют физические свойства реализуемого автомоделного процесса теплопереноса в изучаемой системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
4. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.
5. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. 653 с.
6. Аттетков А.В., Волков И.К., Пилявский С.С. Иерархия математических моделей процесса теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, обладающим покрытием // Труды XVII Школы — семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева. М., 2009. Т. 1. С. 166–169.
7. Аттетков А.В., Волков И.К., Пилявский С.С. Температурное поле изотропного твердого тела со сферическим очагом разогрева, обладающим покрытием // Известия РАН. Энергетика. 2010. № 3. С. 122–128.
8. Аттетков А.В. О возможности управляемого воздействия на температурное поле твердого тела со сферическим очагом разогрева, обладающим теплопоглощающим покрытием // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4. № 10. С. 475–480.
9. Аттетков А.В., Волков И.К. Сингулярные интегральные преобразования как метод решения одного класса задач нестационарной теплопроводности // Известия РАН. Энергетика. 2016. № 1. С. 148–156.
10. Аттетков А.В., Волков И.К. «Уточненная модель сосредоточенной емкости» процесса теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, обладающим покрытием // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 2. С. 92–98.
11. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1977. 440 с.
12. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 686 с.
13. Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения задач газовой динамики и теплопереноса. М.: Изд-во МФТИ, 1997. 240 с.
14. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 478 с.
15. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
16. Марголин А.Д., Крупкин В.Г. Развитие пузыря в жидкости при наличии источника газовой выделения // Физика горения и взрыва. 1985. Т. 21. № 2. С. 76–81.

Аттетков Александр Владимирович — канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Волков Игорь Куприянович — д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры «Математическое моделирование» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Аттетков А.В., Волков И.К. Автомодельное решение задачи теплопереноса в твердом теле, содержащем сферический очаг разогрева с теплопоглощающим покрытием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 4. С. 97–106.

DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-97-106

SELF-SIMILAR SOLUTION OF HEAT TRANSPORT PROBLEMS IN SOLID WITH HEAT-ABSORBING COATING SPHERICAL HOT SPOT

A.V. Attetkov

fn2@bmstu.ru

I.K. Volkov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

The problem of determining the temperature field of the isotropic solid with a spherical hot spot having a thermally thin heat-absorbing coating was considered. The non-stationary mode of heat transfer with time-varying heat transfer coefficient and the temperature of the hot spot was investigated. Sufficient conditions were determined, the fulfillment of which allows the realization of self-similar process of the heat transfer in the test system. Qualitative studies of the physical properties of the self-similar process and set of its specific features were conducted. The feasibility of boundary regimes in the spherical hot spot was theoretically proved

Keywords

Isotropic solid, spherical hot spot, thermal thin heat-absorbing coating, temperature field, self-similar solution

REFERENCES

- [1] Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. London, Oxford University Press, 1959.
- [2] Lykov A.V. Teoriya teploprovodnosti [The theory of heat conduction]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1967. 600 p.
- [3] Kartashov E.M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in heat conduction of solid bodies]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 2001. 550 p.
- [4] Pudovkin M.A., Volkov I.K. Kraevye zadachi matematicheskoy teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnykh poley v neftnykh plastakh pri zavodnenii [Boundary value problems of heat conduction mathematical theory applied to the calculations of temperature fields in the oil reservoirs at waterflooding]. Kazan', Kazanskiy univ. Publ., 1978. 188 p.
- [5] Kartashov E.M., Kudinov V.A. Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoy termouprugosti [Analytical theory of heat conduction and thermoelasticity]. Moscow, URSS Publ., 2012. 653 p.

- [6] Attetkov A.V., Volkov I.K., Pilyavskiy S.S. The hierarchy of mathematical models of heat transfer process in a solid with coated spherical hot spot. *Tr. XVII Shkoly–seminara molodykh uchenykh i spetsialistov pod rukovodstvom akad. RAN A.I. Leont'eva* [Proc. of the XVII School–Seminar of Young Scientists and Specialists under the leadership of RAS academician A.I. Leontyev]. Moscow, 2009, vol. 1, pp. 166–169 (in Russ.).
- [7] Attetkov A.V., Volkov I.K., Pilyavskiy S.S. Temperature field of the isotropic firm body with the spherical center of the warming up possessing covering. *Izv. RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2010, no. 3, pp. 92–98 (in Russ.).
- [8] Attetkov A.V. On the possibility of control action on the temperature field of a solid body with a spherical heating-up spot having a heat-absorbing coating. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2012, vol. 4, no. 10, pp. 475–480 (in Russ.).
- [9] Attetkov A.V., Volkov I.K. The singular integral transformations as a method of solution for one class of non-stationary heat conduction problems. *Izv. RAN. Energetika* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering], 2016, no. 1, pp. 148–156 (in Russ.).
- [10] Attetkov A.V., Volkov I.K. “A refined model of concentrated capacity” of heat transfer in a solid with coated spherical hot spot. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Processes in Engineering], 2016, vol. 8, no. 2, pp. 92–98 (in Russ.).
- [11] Sedov L.I. Similarity and dimensional methods in mechanics. Tenth Ed. CRC Press, Inc., 1993. 496 p.
- [12] Zel'dovich Ya.B., Rayzer Yu.P. Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavleniy [Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 686 p.
- [13] Volosevich P.P., Levanov E.I. Avtomodel'nye resheniya zadach gazovoy dinamiki i teploperenosa [Self-similar solutions of problems of gas dynamics and heat thermal conduction]. Moscow, MFTI Publ., 1997. 240 p.
- [14] Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. Blow-up in quasi-linear parabolic equations. Berlin, Walter de Gruyter, 1995. 535 p.
- [15] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and quasi-linear equations of parabolic type]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 736 p.
- [16] Margolin A.D., Krupkin V.G. Bubble development in a liquid in the presence of a gas source. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1985, vol. 21, iss. 2, pp. 198–202.

Attetkov A.V. — Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Assoc. Professor of Applied Mathematics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Volkov I.K. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Modelling Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Attetkov A.V., Volkov I.K. Self-Similar Solution of Heat Transport Problems in Solid with Heat-Absorbing Coating Spherical Hot Spot. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 4, pp. 97–106. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-4-97-106