DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-57-69

УДК 531.38

Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги

Ко Ко Вин, А.Н. Темнов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: win.c.latt@gmail.com; antt45@mail.ru

При проведении инженерных расчетов динамики твердых тел, имеющих полости с жидкостью, часто используют механические аналоги движений изучаемой гидродинамической системы. Так, при плоских движениях твердого тела с полостью частично заполненной жидкостью применяют маятниковые аналоги колебаний жидкостей, при продольных колебаниях деформируемого тела с жидким топливом — механические осцилляторы, при колебаниях вокруг продольной оси симметрии — физические и математические маятники на бифилярном подвесе, свободно вращающемся вокруг продольной оси. Рассмотрены колебания трех несжимаемых жидкостей, получены дифференциальные уравнения для обобщенных координат, отражающих волновые движения жидкостей на поверхностях разделов, и приведены механические аналоги колебаний жидкостей.

Ключевые слова: *колебания жидкостей, частота колебаний, форма колебаний, потенциальная энергия, кинетическая энергия, обобщенные координаты, механические аналоги.*

Oscillations of Immiscible Liquids in a Stationary Cylindrical Vessel and their Mechanical Analogs

Ko Ko Win, A.N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: win.c.latt@gmail.com; antt45@mail.ru

When making engineering calculations for the dynamics of solid bodies with the cavity filled with fluid, we often use mechanical analogues of movements of the required hydrodynamic systems. So, in plane motions of a solid body with a cavity partly filled with fluid we use pendulous analogues of oscillations in fluids. The longitudinal oscillations of a deformable body with fluid fuel require mechanical oscillators. In oscillations around the longitudinal axis of symmetry, we use the physical and mathematical pendulums on the bifilar suspension, freely rotating around the longitudinal axis. This article deals with the oscillations of three incompressible fluids. Within the research we obtain differential equations for generalized coordinates that reflect the wave motions of fluids on the section surfaces, and we describe the mechanical analogues of oscillations of fluids.

Keywords: *oscillations of fluids, oscillations frequency, mode shape, potential energy, kinetic energy, generalized coordinates, mechanical analogues.*

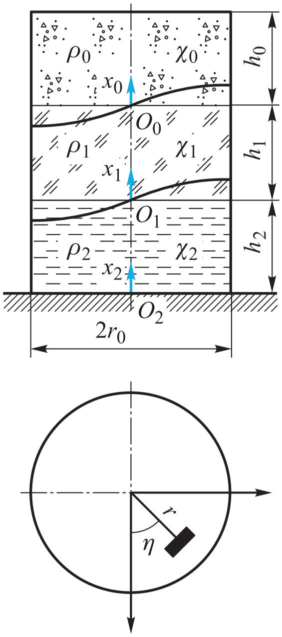

Рис. 1. Схема системы, состоящей из трех невязких несжимаемых и несмешивающихся жидкостей, полностью заполняющих цилиндрический сосуд

Введение. В последнее время в связи с развитием ракетной космической техники общего машиностроения в значительной степени возрос интерес к исследованию динамики сложных жидкостей [1]. Одной из используемых моделей подобной жидкости может являться дискретно-стратифицированная жидкость, представляющая собой совокупность слоев несмешивающихся несжимаемых жидкостей. Колебаниям стратифицированных и несмешивающихся жидкостей посвящено достаточно много работ (например, [2–11]).

В настоящей статье рассмотрены колебания трех идеальных жидкостей, каждая из которых совершает несжимаемое движение. Получены дифференциальные уравнения для обобщенных координат, отражающих колебания поверхностей раздела жидкостей, и предложены эквивалентные механические маятниковые модели, моделирующие колебания жидкостей по n-му тону.

Постановка задачи. Рассмотрим систему из трех невязких несжимаемых и несмешивающихся жидкостей, полностью заполняющих цилиндрический сосуд. Введем цилиндрические системы координат $O_i x_i r \eta$, $i = 0, 1, 2$, с началами координат, расположенными на поверхностях разделов жидкостей и на дне (рис. 1). Обозначим плотность и глубину каждого слоя жидкости через ρ_i, h_i, $i = 0, 1, 2$, соответственно. При решении задачи примем следующие допущения:

− перемещения и скорости всех частиц жидкостей — малые величины, т. е. произведениями и квадратами можно пренебречь по сравнению со значениями любой из этих величин;

− движение каждой жидкости является потенциальным.

Вследствие сделанных допущений колебания трех жидкостей могут быть описаны уравнениями Лапласа для потенциалов смещений частиц жидкостей в цилиндрической системе координат [12]:

$$\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial {x_0}^2} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial {x_1}^2} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \chi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial {x_2}^2} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\chi_i\left(x_i,\, r,\, \eta,\, t\right)$, $i = 0, 1, 2$ — потенциалы смещений частиц жидкостей, связанные с соответствующими потенциалами скоростей $\Phi_i\left(x_i,\, r,\, \eta,\, t\right)$ формулами $\Phi_i = \partial \chi_i / \partial t$; $\overline{w}^{(i)}\left(x_i,\, r,\, \eta,\, t\right) = \nabla \chi_i$ — поле смещений частиц жидкостей, ∇ — оператор Гамильтона.

Потенциалы $\chi_i\left(x_i,\, r,\, \eta,\, t\right)$, $i = 0, 1, 2,$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

1) условия непротекания на смачиваемых поверхностях

$$\left.\frac{\partial \chi_0}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial \chi_1}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial \chi_2}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial \chi_0}{\partial x_0}\right|_{x_0=h_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial \chi_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0;$$

2) кинематические условия на поверхностях разделов жидкостей

$$\left.\frac{\partial \chi_0}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = \left.\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=h_1}; \quad \left.\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \left.\frac{\partial \chi_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=h_2};$$

3) динамические условия на поверхностях разделов жидкостей

$$\left(\rho_0 \left.\frac{\partial^2 \chi_0}{\partial t^2}\right|_{x_0=0} - \rho_1 \left.\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2}\right|_{x_1=h_1}\right) = \left(\rho_1 - \rho_0\right) g \left.\frac{\partial \chi_0}{\partial x_0}\right|_{x_0=0}; \qquad (2)$$

$$\left(\rho_1 \left.\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t^2}\right|_{x_1=0} - \rho_2 \left.\frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t^2}\right|_{x_2=h_2}\right) = \left(\rho_2 - \rho_1\right) g \left.\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}. \qquad (3)$$

Начальные условия для рассматриваемой задачи не являются необходимыми.

Постановка вспомогательных краевых задач и их решения. Для решения задачи представим потенциалы χ_0, χ_1 и χ_2 в виде:

$$\chi_0 = \varphi_0\left(x_0,\, r,\, \eta\right)\sigma_1\left(t\right); \; \chi_2 = \varphi_2\left(x_2,\, r,\, \eta\right)\sigma_2\left(t\right); \qquad (4)$$

$$\chi_1 = \varphi_{11}\left(x_1,\, r,\, \eta\right)\sigma_1\left(t\right) + \varphi_{12}\left(x_1,\, r,\, \eta\right)\sigma_2\left(t\right), \qquad (5)$$

где $\sigma_1\left(t\right), \sigma_2\left(t\right)$ — функции времени, описывающие волновые движения поверхностей разделов жидкостей. Потенциалы $\varphi_0, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_2$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\Delta\varphi_0 = 0; \quad \left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0}\right|_{x_0=h_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0}\right|_{x_0=0} = \left.\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x_1}\right|_{x_1=h_1}; \qquad (6)$$

$$\Delta\varphi_{11}=0;\quad \left.\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0;\quad \left.\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x_0}\right|_{x_1=0}=0;\quad \left.\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x_1}\right|_{x_1=h_1}=\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}\right|_{x_0=0};\qquad (7)$$

$$\Delta\varphi_{12}=0;\quad \left.\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0;\quad \left.\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_1}\right|_{x_1=h_1}=0;\quad \left.\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=h_2};\qquad (8)$$

$$\Delta\varphi_2=0;\quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0;\quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=h_2}=0;\quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=h_2}=\left.\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}.\qquad (9)$$

Решения краевых задач (6)–(9) могут быть записаны в виде [13]

$$\varphi_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)}\operatorname{th}k_n h_1\frac{\operatorname{ch}k_n(x_0-h_0)}{\operatorname{sh}k_n h_0}\sin\eta;\qquad (10)$$

$$\varphi_{11}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)}\operatorname{th}k_n h_1\frac{\operatorname{ch}k_n x_1}{\operatorname{sh}k_n h_1}\sin\eta;\qquad (11)$$

$$\varphi_{12}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)}\frac{\operatorname{ch}k_n(x_1-h_1)}{\operatorname{ch}k_n h_1}\sin\eta;\qquad (12)$$

$$\varphi_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(k_n r)}{J_1(\xi_n)}\operatorname{th}k_n h_1\frac{\operatorname{ch}k_n x_2}{\operatorname{sh}k_n h_2}\sin\eta.\qquad (13)$$

В уравнениях (10)–(13) $J_1(k_n r)$ — функция Бесселя первого рода, первого порядка; $k_n=\xi_n/r_0$, $n=1, 2, 3...$ Чтобы выполнить динамические граничные условия, подставим представления (4), (5) в условия (2), (3) и получим дифференциальные уравнения для обобщенных координат $\sigma_{1n}(t)$ и $\sigma_{2n}(t)$, описывающих колебания слоев жидкостей:

$$\begin{aligned}&\left(\rho_1+\bar f_{0n}\rho_0\right)\left(\ddot\sigma_{1n}+\gamma_n^2\sigma_{1n}\right)+\frac{\rho_1\ddot\sigma_{2n}}{\operatorname{ch}k_n h_1}=0;\\&\left(\rho_2\bar f_{1n}+\rho_1\right)\left(\ddot\sigma_{2n}+\beta_n^2\sigma_{2n}\right)+\frac{\rho_1\ddot\sigma_{1n}}{\operatorname{ch}k_n h_1}=0,\end{aligned}\qquad (14)$$

где $\gamma_n^2=\dfrac{\omega_n^2(\rho_1-\rho_0)}{(\rho_1+\bar f_{0n}\rho_0)}$, $\beta_n^2=\dfrac{\omega_n^2(\rho_2-\rho_1)}{(\rho_2\bar f_{1n}+\rho_1)}$, $\omega_n^2=gk_n\operatorname{th}k_n h_1$ — парциальные частоты колебаний верхней, нижней поверхностей раздела и свободной поверхности среднего слоя жидкости при $\rho_0=0$; $\bar f_{0n}=$ $=\operatorname{th}k_n h_1\operatorname{cth}k_n h_0$; $\bar f_{1n}=\operatorname{th}k_n h_1\operatorname{cth}k_n h_2$.

Умножим уравнение (14) на величину $v = \dfrac{\pi r_0^3 2\operatorname{tg}\left(k_n h_1\right)}{\xi_n\left(\xi_n{}^2 - 1\right)}$, получим иную запись дифференциальных уравнений для обобщенных координат σ_{1n} и σ_{2n}:

$$\begin{gathered}
\left(m_n' + \bar{f}_{0n} m_{0n}'\right)\ddot{\sigma}_{1n} + \left(m_n' - m_{0n}'\right)\omega_n^2 \sigma_{1n} + \frac{m_n' \ddot{\sigma}_{2n}}{\operatorname{ch} k_n h_1} = 0; \\
\left(m_n'' \; \bar{f}_{1n} + m_n'\right)\ddot{\sigma}_{2n} + \left(m_n'' \; - m_n'\right)\omega_n^2 \sigma_{2n} + \frac{m_n' \ddot{\sigma}_{1n}}{\operatorname{ch} k_n h_1} = 0,
\end{gathered} \tag{15}$$

где $m_{0n}' = \rho_0 v$, $m_n' = \rho_1 v$, $m_n'' = \rho_2 v$, m_{0n}', m_n' и m_n'' — приведенные массы колеблющихся слоев жидкостей.

Определим собственные частоты главных колебаний трех слоев жидкостей, полностью заполняющих сосуд (рис. 2). Перепишем уравнение (14) в виде

$$\begin{gathered}
\ddot{\sigma}_{1n} + \gamma_n^2 \sigma_{1n} + \frac{\rho_1 \ddot{\sigma}_{2n}}{\left(\rho_1 + \bar{f}_{0n}\rho_0\right)\operatorname{ch} k_n h_1} = 0; \\
\ddot{\sigma}_{2n} + \beta_n^2 \sigma_{2n} + \frac{\rho_1 \ddot{\sigma}_{1n}}{\left(\rho_2 \bar{f}_{1n} + \rho_1\right)\operatorname{ch} k_n h_1} = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Приняв $\sigma_{1n} = A_1 \sin\left(pt + \propto\right)$, $\sigma_{2n} = C_1 \sin\left(pt + \propto\right)$, получим определитель относительно неизвестных амплитуд A_1 и C_1. Равенство нулю определителя приводит к частотному уравнению

$$ap^4 + bp^2 + c = 0. \tag{17}$$

Здесь $a = 1$;

$$b = -\frac{\left(\gamma_n^2 + \beta_n^2\right)\left(\rho_1 + \rho_0 \bar{f}_{0n}\right)\left(\rho_2 \bar{f}_{1n} + \rho_1\right)\operatorname{ch} k_n h_1{}^2}{\left(\rho_1 + \bar{f}_{0n}\rho_0\right)\left(\rho_2 \bar{f}_{1n} + \rho_1\right)\operatorname{ch} k_n h_1{}^2 - \rho_1{}^2}; \tag{18}$$

$$c = \frac{\gamma_n^2 \beta_n^2 \left(\rho_1 + \bar{f}_{0n}\rho_0\right)\left(\rho_2 \bar{f}_{1n} + \rho_1\right)\operatorname{ch} k_n h_1{}^2}{\left(\rho_1 + \bar{f}_{0n}\rho_0\right)\left(\rho_2 \bar{f}_{1n} + \rho_1\right)\operatorname{ch} k_n h_1{}^2 - \rho_1{}^2}. \tag{19}$$

Зависимости главных частот $\left(p_{1,2}^2 = g p_{1,2\_}^2 / r_0\right)$ от изменения относительных плотностей жидкостей $\left(\rho_{0\_} = \rho_0/\rho_2,\ \rho_{1\_} = \rho_1/\rho_2\right)$ и от относительной глубины среднего слоя жидкости $\left(h_{1\_} = h_1/r_0\right)$ при постоянных значениях $h_{0\_} = h_0/r_0$ и $h_{2\_} = h_2/r_0$ приведены на рис. 3 и рис. 4.

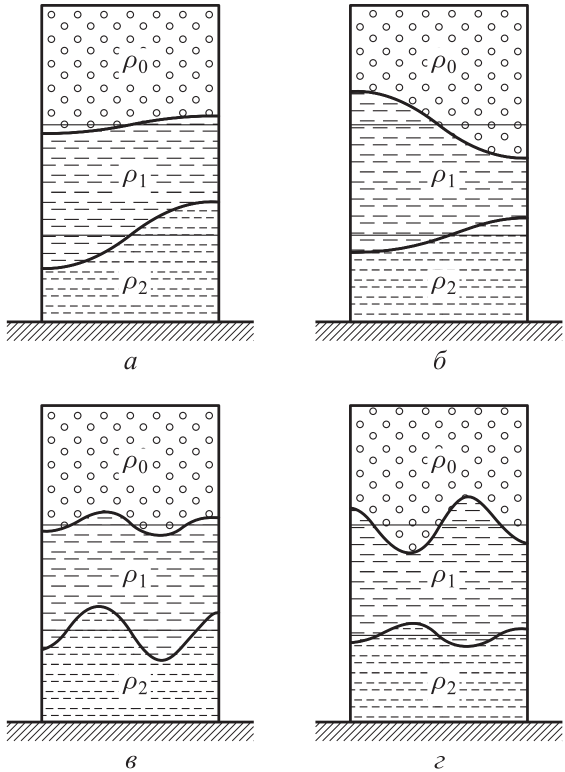

Рис. 2. Формы главных колебаний трех слоев жидкостей по первому (*а*, *б*) и второму (*в*, *г*) тону

В случае отсутствия верхнего слоя жидкости плотностью ρ_0 уравнения (16) упрощаются и принимают вид

$$\ddot{\sigma}_{1n} + \omega_n^2 \sigma_{1n} + \frac{\ddot{\sigma}_{2n}}{\operatorname{ch} k_n h_1} = 0;$$

$$\ddot{\sigma}_{2n} + \beta_n^2 \sigma_{2n} + \frac{\rho_1 \ddot{\sigma}_{1n}}{\operatorname{ch} k_n h_1 \left(\rho_2 \bar{f}_{1n} + \rho_1 \right)} = 0.$$

Механический аналог. При проведении инженерных расчетов динамики твердых тел, имеющих полости с жидкостью, часто используют механические аналоги движений изучаемой гидродинамической системы [14, 15]. Рассмотрим механическую систему в виде невесомого стержня с маятниками (рис. 5). Точки подвеса маятников расположены на одной прямой. Вертикальное положение продольной оси при отсутствии отклонений маятников примем за невозмущенное состояние, соответствующее горизонтальному положению поверхностей раздела слоев жидкостей при отсутствии их возмущений.

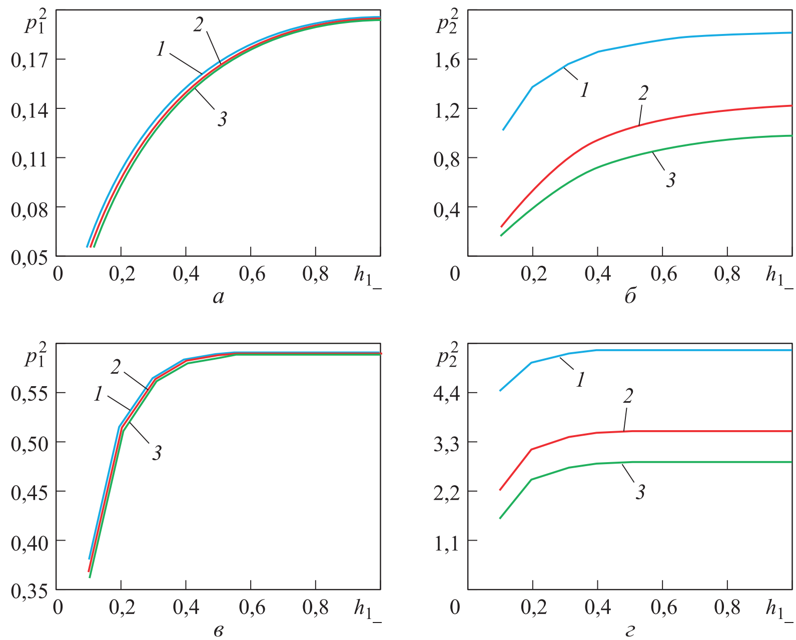

Рис. 3. Зависимость первой (p_1^2) и второй (p_2^2) главных частот для $n = 1,\ \zeta_1 = 1{,}8412$ (*а*, *б*) и $n = 2,\ \zeta_2 = 5{,}3315$ (*в*, *г*) от изменения глубины среднего слоя жидкости $h_{1\_}$ при $\rho_{0\_} = 0$ (*1*), $\rho_{1\_} = 0{,}2$ (*2*) и $\rho_{2\_} = 0{,}3$ (*3*)

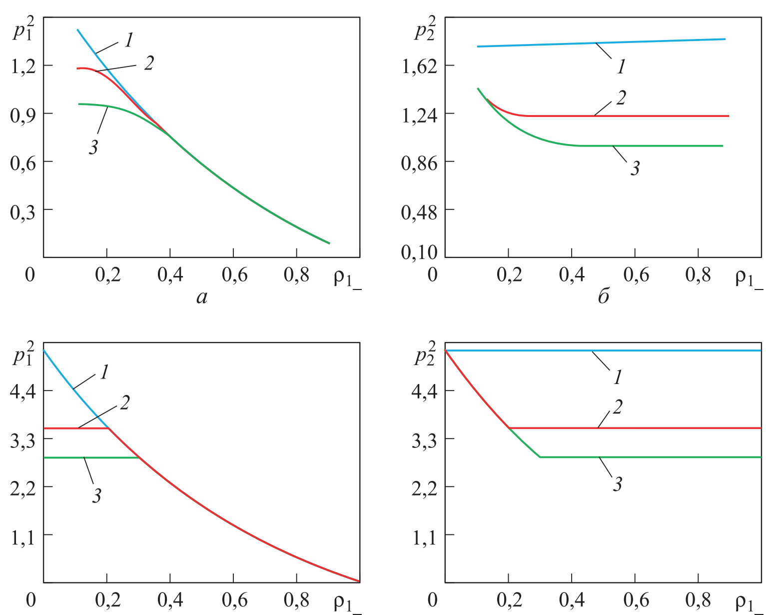

Рис. 4. Зависимость первой (p_1^2) и второй (p_2^2) главных частот для $n = 1,\ \zeta_1 = 1{,}8412$ (*а*, *б*) и $n = 2,\ \zeta_2 = 5{,}3315$ (*в*, *г*) от изменения плотности $\rho_{1\_}$ среднего слоя жидкости при $h_{0\_} = 1{,}0$ (*1*), $h_{1\_} = 1{,}0$ (*2*) и $h_{2\_} = 1{,}3$ (*3*)

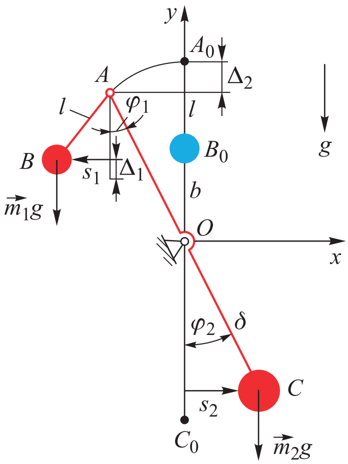

Рис. 5. Механическая модель

Введем следующие обозначения: m_1, m_2 — массы мятников; l — длина невесомого стержня AB; b, δ — расстояния OB_0 и OC_0, соответствующие n-му тону колебаний слоев жидкостей.

Как показывает анализ дифференциальных уравнений для обобщенных координат волновых движений по поверхности разделов трех слоев жидкостей каждому индексу «n» соответствуют два главных колебания, частоты которых могут быть определены по формулам (17)–(19). Следовательно, для каждого индекса «n» механической модели должны возникать два главных колебания, т. е. эквивалентный механический аналог колебаний поверхностей разделов слоев жидкостей должен иметь две степени свободы. Покажем, что для предлагаемого механического аналога (см. рис. 5) уравнения движения будут совпадать с уравнениями для обобщенных координат $\sigma_{1n}(t)$ и $\sigma_{2n}(t)$.

Составим выражения для кинетической и потенциальной энергий предлагаемой механической системы. За обобщенные координаты примем расстояния s_1, s_2, определяющие положение маятника массой m_2 (точка C) и положение маятника массой m_1 (точка B) (см. рис. 5). Координаты точек C и B в системе координат xOy будут

$$x_C = \delta \sin \varphi_2;$$

$$y_C = -\delta \cos \varphi_2;$$

$$x_B = -(l + b)\sin \varphi_2 - l \sin \varphi_1;$$

$$y_B = -(l + b)\cos \varphi_2 - l \cos \varphi_1.$$

Кинетическая и потенциальная энергия рассматриваемой механической системы с точностью до величин второго порядка малости будет включать в себя кинетическую и потенциальную энергию маятников

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2{}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[\frac{(l + b)^2}{\delta^2} \dot{s}_2{}^2 + \dot{s}_1{}^2 + 2\frac{(l + b)}{\delta} \dot{s}_1 \dot{s}_2 \right];$$

$$\Pi = m_1 g \frac{s_1^2}{2l} - m_1 g \frac{(l_1 + b) s_2^2}{2\delta^2} + m_2 g \frac{s_2^2}{2\delta}.$$

Далее воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода и запишем уравнения колебаний системы маятников

$$\begin{gathered} m_1\ddot{s}_1 + m_1\frac{g}{l}s_1 + m_1\frac{(l+b)}{\delta}\ddot{s}_2 = 0; \\ \left(m_2 + m_1\frac{(l+b)^2}{\delta^2}\right)\ddot{s}_2 + \frac{g}{\delta}\left(m_2 - m_1\frac{(l+b)}{\delta}\right)s_2 + m_1\frac{(l+b)}{\delta}\ddot{s}_1 = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Сопоставив уравнения колебаний жидкости (15) и уравнения колебания механического аналога (20), определим параметры предлагаемой маятниковой системы. Сравнив уравнения движения, получим, что рассматриваемые механические системы будут эквивалентны при условии равенства обобщенных координат σ_{in} и s_k, $i, k = 1, 2,$ если параметры механического аналога будут определены по следующим формулам:

$$m_1 = m'_n + \overline{f}_{0n}m'_{0n};\;\; b = \frac{\delta m'_n}{m_1 \operatorname{ch} k_n h_1} - l;$$

$$\delta = g\frac{m_2 - m'_n/(\operatorname{ch} k_n h_1)}{(m''_n - m'_n)\omega_{1n}^2};\quad m_2 = \left(m''_n\overline{f}_{1n} + m'_n\right) - \frac{m'^{\,2}_n}{m_1(\operatorname{ch} k_n h_1)^2};$$

$$l = \frac{m_1}{(m'_n - m'_{0n})k_n \operatorname{th} k_n h_1}.$$

Зависимость расстояния b от относительных плотностей жидкостей $(\zeta_1 = 1{,}8412)$ приведена на рис. 6.

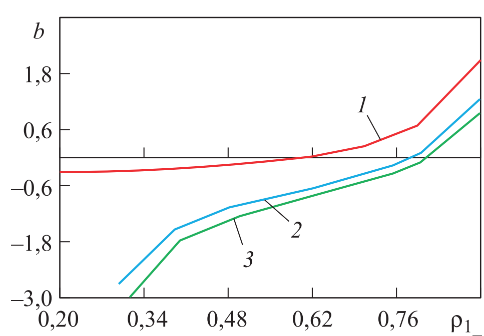

Рис. 6. Зависимость расстояния b от относительной плотности $\rho_{1\_}$ при $\rho_{0\_} = 0$ (*1*), $\rho_{1\_} = 0{,}2$ (*2*) и $\rho_{2\_} = 0{,}3$ (*3*)

Маятниковые аналоги колебаний слоев жидкости при $b > 0$ и $b < 0$ представлены на рис. 7, *а*, *б*, маятниковый аналог колебаний двух слоев жидкости, полностью заполняющих цилиндрический бак, — на рис. 7, *в*.

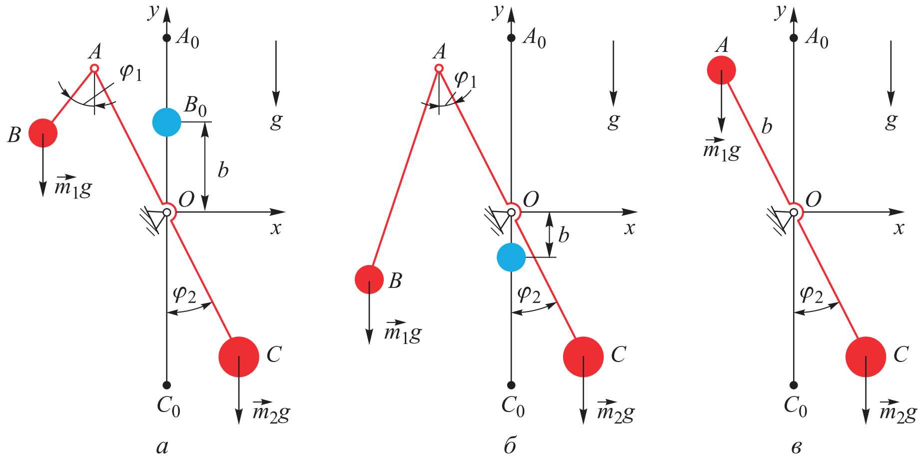

Рис. 7. Маятниковые аналоги колебаний слоев жидкости при $b > 0$ (*а*), $b < 0$ (*б*) и маятниковый аналог (*в*) двух слоев жидкостей, полностью заполняющих цилиндрический бак

Заключение. Рассмотрены вопросы моделирования колебаний дискретно-стратифицированных жидкостей. Приведена постановка задачи для определения потенциалов скоростей жидкостей, получено частотное уравнение и предложены маятниковые аналоги колебаний слоев жидкостей. Результаты расчета могут быть использованы при проектировании и расчете транспортных систем, перевозящих сложные жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чашечкин Ю.Д.* Дифференциальная механика жидкостей: согласованные аналитические, численные и лабораторные модели стратифицированных течений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 6. С. 67–95.
2. *Ай Мин Вин.* Колебания криогенной жидкости в неподвижном баке // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2014. № 9. DOI: 10.7463/0914.0726215 URL: http://technomag.bmstu.ru/doc/726215.html
3. *Методы* решения задач гидромеханики для условий невесомости / В.Г. Бабский, М.Ю. Жуков, Н.Д. Копачевский, А.Д. Мышкис, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов. Киев: Наукова думка, 1992. 592 с.
4. *Ганичев А.И., Качура В.П., Темнов А.Н.* Малые колебания двух несмешивающихся жидкостей в подвижном цилиндрическом сосуде. В кн.: Колебания упругих конструкций с жидкостью. Новосибирск: НЭТИ, 1974. С. 82–88.
5. *Темнов А.Н., Ай Мин Вин.* О движении стратифицированной жидкости в полости подвижного твердого тела // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. Вып. 7. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-291 URL: http://engjournal.ru/catalog/teormech/291.html
6. *Гончаров Д.А.* Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал. 2013. № 11. DOI: 10.7463/1113.0619258 URL: http://techonomag.bmstu/doc/619258.html

7. *Пожалостин А.А., Гончаров Д.А., Кокушкин В.В.* Малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемости разделителя // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 5. С. 109–116.
8. *Газиев Э.Л.* Моделирование собственных колебаний системы «идеальная капиллярная жидкость — баротропный газ» в цилиндрическом контейнере // Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (CIMC–2003). Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. Т. 3. С. 51–52.
9. *Колесников К.С., Пожалостин А.А., Шкапов П.М.* Задачи динамики гидромеханических систем в трудах кафедры теоретической механики имени профессора Н.Е. Жуковского // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. Вып. 7. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-285 URL: http://engjournal.ru/catalog/teormech/285.html
10. *Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А.* Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном // Прикладная гидромеханика. 2008. № 1. С. 33–38.
11. *Mikhayluk A.V., Timokha A.N.* Variational formulations for a spectral problem with parameter on the interface of two mediums // Dopov. Nats. Akad. Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki. 1995. Iss. 45. No. 10. P. 38–40.
12. *Попов Д.Н., Панаиотти С.С., Рябинин М.В.* Гидромеханика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 320 с.
13. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 185 с.
14. *Колесников К.С.* Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
15. *Калиниченко В.А., Со Аунг Наинг.* Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 12. DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1138 URL: http://engjournal.ru/catalog/teormech/1138.html

REFERENCES

[1] Chashechkin Yu.D. Fluid Mechanics: Consistent Analytical, Numerical and Laboratory Models of Stratified Flows. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 6, pp. 67–95 (in Russ.).

[2] Ai Min Vin. Cryogenic Liquid Fluctuations in a Motionless Tank. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2014, no. 9. DOI: 10.7463/0914.0726215 Available at: http://technomag.bmstu.ru/en/doc/726215.html

[3] Babskiy V.G., Zhukov M.Yu., Kopachevskiy N.D., Myshkis A.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti [Methods for Solving Fluid Mechanics Problems for Weightless Conditions]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1992. 592 p.

[4] Ganichev A.I., Kachura V.P., Temnov A.N. Malye kolebaniya dvukh nesmeshivayushchikhsya zhidkostey v podvizhnom tsilindricheskom sosude. V kn.: Kolebaniya uprugikh konstruktsiy s zhidkost'yu [Small Oscillations of Two Immiscible Liquids in a Movable Cylindrical Vessel. In: The Oscillations of Elastic Structures with Liquid]. Novosibirsk, NETI Publ., 1974, pp. 82–88.

[5] Temnov A.N., Ai Min Vin. On the Motion of Stratified Liquid in the Cavity of Movable Solid. *Jelektr. nauchno-tekh. izd. «Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii»* [El. Sci.-Tech. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2012, iss. 7. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-291 Available at: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/291.html

[6] Goncharov D.A. Dynamics of two-layer liquid divided by an elastic dividing wall with an allowance for surface tension forces (with corrections). *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.E. Baumana* [Science & Education of the Bauman MSTU. Electronic Journal], 2013, no. 11. DOI: 10.7463/1113.0619258 Available at: http://technomag.bmstu.ru/en/doc/619258.html

[7] Pozhalostin A.A., Goncharov D.A., Kokushkin V.V. Small Oscillations of Two-Layer Liquid in View Permeability of Separator. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 5, pp. 109–116 (in Russ.).
[8] Gaziev E.L. Simulation of Natural Oscillations of the "Ideal Capillary Liquid — Barotropic Gas" System in a Cylindrical Container. *Book of Abstracts of Crimean International Mathematics Conference (CIMC–2003)*. Simferopol': KNTs NANU, 2013, vol. 3, pp. 51–52 (in Russ.).
[9] Kolesnikov K.S., Pozhalostin A.A., Shkapov P.M. Problems of Hydromechanical Systems Dynamics in Proceedings of the Zhukovsky Theoretical Mechanics Department. *Jelektr. nauchno-tekh. izd. «Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii»* [El. Sci.-Tech. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2012, iss. 7. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-7-285 Available at: http://engjournal.ru/catalog/eng/ teormech/285.html
[10] Kononov Yu.N., Tatarenko E.A. Free oscillations of elastic membranes and two-layer liquid in rectangular channel with elastic bottom. *Prikladnaya gidromekhanika* [Applied Hydromechanics], 2008, no. 1, pp. 33–38 (in Russ.).
[11] Mikhayluk A.V., Timokha A.N. Variational formulations for a spectral problem with parameter on the interface of two mediums. *Dopov. Nats. Akad. Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki*, 1995, iss. 45, no. 10, pp. 38–40.
[12] Popov D.N., Panaiotti S.S., Ryabinin M.V. Gidromekhanika [Hydromechanics]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2014. 320 p.
[13] Martinson L.K., Malov Yu.I. Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki [Differential Equations of Mathematical Physics]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2002. 185 p.
[14] Kolesnikov K.S. Dinamika raket [Rocket Dynamics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2003. 520 p.
[15] Kalinichenko V.A., Aung Naing Soe. Faraday waves in a movable tank and their mechanical analog. *Jelektr. nauchno-tekh. izd. «Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii»* [El. Sci.-Tech. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2013, iss. 12. DOI: 10.18698/2308-6033-2013-12-1138 Available at: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1138.html

Статья поступила в редакцию 25.12.2015

Вин Ко Ко — аспирант кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Win Ko Ko — post-graduate student of Spacecrafts and Launch Vehicles Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Темнов Александр Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Temnov A.N. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Professor of Spacecrafts and Launch Vehicles Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:
Вин Ко Ко, Темнов А.Н. Колебания дискретно-стратифицированных жидкостей в цилиндрическом сосуде и их механические аналоги // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 3. С. 57–69.
DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-57-69

Please cite this article in English as:
Win Ko Ko, Temnov A.N. Oscillations of immiscible liquids in a stationary cylindrical vessel and their mechanical analogs. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 3, pp. 57–69. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-3-2016-57-69