DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-45-60

УДК 537.87

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

А.М. Макаров, **Л.А. Лунёва**, **К.А. Макаров**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: lunevala2008@rambler.ru

Уравнения классической электродинамики для неподвижной изотропной среды без эффектов поляризованности и намагничения с учетом возможности коллективного движения электрических зарядов (вакуум), в отличие от традиционного использования вариационного принципа наименьшего действия теории классических калибровочных полей, получены непосредственно из постулата о том, что переменное электромагнитное поле можно описать в специальной теории относительности с помощью двух векторных полей в пространстве Минковского (4-потенциала и 4-тока). Условие градиентной инвариантности "силовых" векторных полей классической электродинамики определяет антисимметричность 4-тензора электромагнитного поля. Выявлено существование двух специфических математических структур (псевдовектора и истинного вектора в пространстве трех измерений), компоненты которых являются компонентами 4-тензора электромагнитного поля. Естественным следствием двух различных математических структур в тензоре электромагнитного поля является постулат о двух различных "силовых" векторных полях классической электродинамики. Первая пара системы уравнений Максвелла (однородные уравнения) получена как следствие формального определения соответствующих векторных полей, вторая пара системы уравнений Максвелла (неоднородные уравнения) — как следствие постулата о том, что векторное поле 4-тока — векторный "источник" 4-тензора электромагнитного поля. Показано, что обращение в нуль 4-дивергенции 4-тока – это необходимое условие рассматриваемой теории. Установлен физический смысл введенных формально "силовых" векторных полей. Фундаментальные уравнения классической электродинамики (закон полного тока и закон электромагнитной индукции) в предлагаемом подходе — следствие описанных выше постулатов.

***Ключевые слова*:** система уравнений Максвелла, пространство Минковского, тензор, электромагнитное поле, градиентная инвариантность.

AXIOMATIC CONSTRUCTION OF CLASSICAL ELECTRODYNAMICS EQUATIONS

A.M. Makarov, **L.A. Lunyova**, **K.A. Makarov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: lunevala2008@rambler.ru

The classical electrodynamics equations for a stationary isotropic medium without polarization and magnetization effects with regard to possibility of collective motion for electric charges (vacuum), in contrast to traditional using the least action principle of classical theory of gage fields, are obtained from the postulate that alternating electromagnetic field can be described by a special relativity theory with two vector fields in Minkowski space (4-potential and 4-current). The condition *of gage invariance for "power" vector fields in the classical electrodynamics defines antisymmetry of the 4-tensor electromagnetic field. The existence of two specific mathematical structures (pseudo- and true vector in the three-dimensional space), whose components are the ones of the 4-tensor electromagnetic field, is determined. The postulate about two different "power" vector fields of the classical electrodynamics is a natural consequence of two different mathematical structures in the electromagnetic field tensor. The first pair of Maxwell equations (homogeneous equations) is obtained as a consequence of formal definition of corresponding vector fields. The second pair of Maxwell equations (inhomogeneous equations) is obtained as a consequence of the postulate that 4-current vector field is the vector "source" of the 4-tensor electromagnetic field. Vanishing of 4-divergence 4-current is shown to be the necessary condition of the theory concerned. The physical meaning of formally introduced "power" vector fields is determined. The fundamental equations of classical electrodynamics (Ampere's circuital law and electromagnetic induction law) in the proposed approach are the consequence of the above-mentioned postulates.*

Keywords**:** Maxwell equations system, Minkowski space, tensor, electromagnetic field, gage invariance.

Введение. Теория электромагнитных явлений формировалась в течение длительного времени [1, 2]. Ее понятия и законы лежат в основе современной теоретической физики и нашли широчайшее применение в материальной культуре человечества. В университетских курсах общей и теоретической физики обсуждается проблема ковариантности системы уравнений классической электродинамики относительно преобразований Лоренца при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую инерциальную систему отсчета и, естественно, проблема "вывода" системы уравнений Максвелла из общих современных физических представлений: строгое рассмотрение — работы [3–5], "адаптированный вариант" — работа [6], описание классической электродинамики в специальной теории относительности и аппарат тензорного исчисления — работы [7, 8].

Венцом теоретических исследований в этой области является теория классических калибровочных полей [9].

Теория электродинамики может строиться либо от частного к общему (принятая методика изложения в курсах общей физики в технических университетах), либо от общего к частному (часто используемый подход в курсах теоретической физики).

В первом случае приходится доказывать, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца. При этом постулируют законы преобразования трехмерных "силовых" векторов электромагнитного поля и обнаруживают в качестве результата свойство инвариантности системы уравнений Максвелла. Можно ввести 4-потенциал электромагнитного поля и 4-ток, исходя из уравнений электродинамики, записанных для потенциалов электромагнитного поля в трехмерном представлении, и потребовать в качестве постулата, что введенные 4-потенциал и 4-ток являются векторами в четырехмерном пространстве (мир Минковского): закон преобразования компонент 4-потенциала и 4-тока определяет законы преобразования “силовых” векторных полей электродинамики и обусловливает инвариантность системы уравнений Максвелла. Введение тензора электромагнитного поля как тензора второго ранга в пространстве четырех измерений позволяет записать известные изначально уравнения Максвелла в ковариантной форме.

Второй случай отличается большей сложностью: система уравнений Максвелла изначально полагается неизвестной, требуется установить ее структуру и содержание. Варианты использования вариационного принципа наименьшего действия для решения рассматриваемой проблемы можно найти в перечисленных выше классических руководствах. Существенная особенность построения вариационного функционала — необходимость постулировать вид зависимости потенциалов электромагнитного поля в трехмерном представлении и трехмерных “силовых” векторных полей электродинамики. Если в индуктивном методе построения теории это не вызывает вопросов, то в дедуктивном варианте подобные связи являются дополнительным априори заданным предположением.

Система уравнений классической электродинамики, можно сказать, породила специальную теорию относительности (СТО). Вместе с тем, по мнению авторов настоящей работы, общие закономерности СТО не в полной мере используются для теоретического обоснования системы уравнений Максвелла.

В научной и учебной литературе по классической физике имеются примеры вывода уравнений Максвелла: в работе [10] закон полного тока получен из закона Био-Савара – Лапласа; в работах [11, 12] использованы свойства симметрии уравнений электромагнетизма; оригинальные результаты изложены в работах [13–16]. Особого упоминания заслуживают работы [17, 18], в которых сделана попытка вывести уравнения Максвелла энерго- и термодинамическим методами (отметим, что пионером подобного подхода к проблеме вывода уравнений Максвелла является М. Планк [19]).

Современные исследования в области классической электродинамики затрагивают как общие вопросы теории [20, 21], так и разнообразные проблемы технической физики и прикладной математики [22–29], поскольку классическая электродинамика давно стала основанием материальной культуры современного общества.

Цель настоящей работы — аксиоматический вывод системы уравнений Максвелла для “вакуума”, исходя из постулата о том, что 4-потенциал электромагнитного поля и 4-вектор электрического тока как векторные поля в пространстве Минковского полностью описывают переменное во времени электромагнитное поле в пространстве трех измерений без использования какой-либо дополнительной экспериментальной информации. В данной работе не использован принцип наименьшего действия. Оба 4-вектора изначально рассмотрены как абсолютно произвольные векторные поля, связь между компонентами потенциалов электромагнитного поля и компонентами “силовых” векторных полей в пространстве трех измерений априори предполагается неизвестной (при использовании вариационного подхода эту связь приходится постулировать). Физическое содержание вводимых формально величин устанавливается по окончании вывода сравнением с фундаментальными экспериментальными результатами.

4-потенциал, 4-ток и 4-тензор электромагнитного поля. В рамках СТО рассмотрим пространство четырех измерений с мнимым временем (мир Минковского). Метрика этого пространства является евклидовой с сигнатурой (1, 1, 1, 1), т.е. имеются в виду отличные от нуля диагональные компоненты метрического тензора.

Радиус-вектор точки наблюдения в указанном пространстве опишем выражением

$$X_k \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict) = (\vec{r}, \tau), \tag{1}$$

обозначения в котором являются общепринятыми [7].

Произвольный 4-вектор введем с использованием его координат в 4-пространстве

$$A_k \Leftrightarrow (A_1, A_2, A_3, A_4) = (A_x, A_y, A_z, i\varphi/c) = (\vec{A}, i\varphi/c). \tag{2}$$

Эта форма записи (1) общепринята в СТО при формировании 4-вектора с использованием представлений трехмерного пространства: структура 4-вектора — векторная величина плюс дополнительно некоторая скалярная величина. Физическое содержание компонент 4-вектора A_k пока не определено.

По определению 4-вектор A_k является векторным полем $A_k = A_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$, при этом предполагается существование всех частных производных

$$\Phi_{km} = \left(\frac{\partial A_m}{\partial x_k}\right), \quad k, m = 1, \ldots, 4.$$

Тензор второго ранга Φ_{km} можно разложить на симметричную и антисимметричную составляющие:

$$\frac{\partial A_m}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_m}{\partial\, x_k} + \frac{\partial A_k}{\partial\, x_m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_m}{\partial\, x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial\, x_m}\right).$$

Используем 4-вектор A_k как 4-потенциал электромагнитного поля. "Силовые" векторные поля обычно получают из "потенциальных" полей с помощью операций дифференцирования по координатам рассматриваемого пространства. Для возможности физически обоснованного определения "силовых" векторных полей требуется условие инвариантности тензора Φ_{km} относительно градиентного преобразования 4-потенциала:

$$A'_k = A_k + \frac{\partial \psi}{\partial x_k},$$

где ψ — произвольное скалярное поле в пространстве Минковского.

Симметричная составляющая тензора Φ_{km} не является инвариантной структурой относительно градиентного преобразования вектора A_k, а антисимметричная составляющая тензора Φ_{km} инвариантна. С учетом этого определим антисимметричный тензор второго ранга F_{ik} как тензор электромагнитного поля [7]:

$$F_{ik} = c\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial\, x_k}\right) = c e_{iklm} e_{lmpq} \frac{\partial A_q}{\partial x_p}.$$

Здесь c — скорость света в вакууме (скалярная величина, известная в СТО); e_{iklm} — единичный абсолютно антисимметричный объект четвертого ранга — символ Леви-Чивиты. Отметим, что в рассматриваемом пространстве 4-тензор второго ранга F_{ik} является "истинным тензором", в общем случае это псевдотензор второго ранга с весом $+2$. Рассмотрим некоторые свойства введенного тензора F_{ik}.

Первое свойство. 4-дивергенция тензора F_{ik} — некоторый 4-вектор, в общем случае отличный от нуля

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = s_i \neq 0.$$

Второе свойство. 4-дивергенция тензора $F^*_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} F_{lm}$, дуального антисимметричному тензору электромагнитного поля F_{ik}, является 4-вектором, тождественно равным нулю для произвольного 4-вектора A_k [8]:

$$\frac{\partial F^*_{ik}}{\partial x_k} = F_i \equiv 0.$$

Основной постулат. Электромагнитное поле можно описать в рассматриваемом пространстве Минковского с помощью 4-потенциала A_k и 4-вектора тока j_k. Определение 4-вектора электрического тока в соответствии со структурой 4-вектора в СТО

$$j_k \Leftrightarrow (j_1, j_2, j_3, j_4) = (j_x, j_y, j_z, ic\rho) = (\vec{j}, ic\rho).$$

Отметим, что компоненты 4-вектора j_k введены формально, их физическое содержание будет установлено далее.

Перейдем к определению основных уравнений классической электродинамики.

Установление связи между 4-потенциалом и "силовыми" электромагнитными векторными полями в пространстве трех измерений. Установим связь между компонентами вектора A_k, принимаемого за 4-потенциал электромагнитного поля, и "силовыми" векторными полями электромагнитного поля в пространстве трех измерений. Рассмотрим развернутую форму записи тензора F_{ik}:

$$F_{ik} = c\begin{pmatrix} 0 & \left(\dfrac{\partial A_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) & \left(\dfrac{\partial A_3}{\partial x_1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x_3}\right) & \left(\dfrac{\partial A_4}{\partial x_1} - \dfrac{\partial A_1}{\partial x_4}\right) \\ \left(\dfrac{\partial A_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial A_2}{\partial x_1}\right) & 0 & \left(\dfrac{\partial A_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) & \left(\dfrac{\partial A_4}{\partial x_2} - \dfrac{\partial A_2}{\partial x_4}\right) \\ \left(\dfrac{\partial A_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) & \left(\dfrac{\partial A_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x_2}\right) & 0 & \left(\dfrac{\partial A_4}{\partial x_3} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x_4}\right) \\ \left(\dfrac{\partial A_1}{\partial x_4} - \dfrac{\partial A_4}{\partial x_1}\right) & \left(\dfrac{\partial A_2}{\partial x_4} - \dfrac{\partial A_4}{\partial x_2}\right) & \left(\dfrac{\partial A_3}{\partial x_4} - \dfrac{\partial A_4}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты тензора F_{ik} запишем с использованием векторного ($\vec{A}$) и скалярного (φ) потенциалов в трехмерном пространстве: $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$; $\varphi = -icA_4$. В результате получаем соотношение

$$F_{ik} = c\begin{pmatrix} 0 & \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_z & -\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_y & -\left(\dfrac{\partial A_x}{ic\partial t} - \dfrac{i\partial\varphi}{c\partial x}\right) \\ -\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_z & 0 & \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_x & -\left(\dfrac{\partial A_y}{ic\partial t} - \dfrac{i\partial\varphi}{c\partial y}\right) \\ \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_y & -\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_x & 0 & -\left(\dfrac{\partial A_z}{ic\partial t} - \dfrac{i\partial\varphi}{c\partial z}\right) \\ \left(\dfrac{\partial A_x}{ic\partial t} - \dfrac{i\partial\varphi}{c\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial A_y}{ic\partial t} - \dfrac{i\partial\varphi}{c\partial y}\right) & \left(\dfrac{\partial A_z}{ic\partial t} - \dfrac{i\partial\varphi}{c\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что компонентами тензора F_{ik} служат компоненты вихря векторного потенциала $\mathrm{rot}\vec{A}$, компоненты векторов $\partial\vec{A}/\partial t$ и $\mathrm{grad}\,\varphi$. Последние два вектора выступают как единое целое. Трехмерный объект $\mathrm{rot}\,\vec{A}$, как известно, является псевдовектором:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{A})_i = e_{ikl}\frac{\partial A_l}{\partial x_k},$$

где e_{ikl} — единичный абсолютно антисимметричный объект третьего ранга (символ Леви-Чивиты в трехмерном пространстве); 4-вектор

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \operatorname{grad}\varphi\right)_k = \frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3,$$

является истинным вектором в трехмерном пространстве.

Рассматриваемые векторы имеют различную математическую природу. Естественно предположить, что этим векторам должны соответствовать различные “силовые” поля единого электромагнитного поля.

Постулат. Имеют место соотношения

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}; \tag{3}$$

$$-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi = \vec{E}. \tag{4}$$

Связь между компонентами 4-вектора A_k, принимаемого за 4-потенциал электромагнитного поля, и “силовыми” векторными полями электромагнитного поля в пространстве трех измерений установлена. Отметим, что в рассматриваемом подходе она не является чем-то, привнесенным из вне, и получена без использования априорной информации о структуре системы уравнений Максвелла.

Однородные уравнения классической электродинамики. Поскольку $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} \equiv 0,\ \forall\vec{a}$, из соотношения (3) формально следует

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{5}$$

а так как $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0,\ \forall\varphi$, из соотношения (4) —

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{6}$$

Совокупность уравнений (5), (6) представляет собой первую пару уравнений (однородные уравнения) системы уравнений Максвелла. Фактически еще требуется установить физическое содержание введенных выше “силовых” полей электромагнитного поля.

С учетом полученных результатов запишем выражения для тензоров F_{ik} и F^*_{ik}:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix};$$

$$F^*_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & cB_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & cB_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь компоненты тензора F_{ik} определены через компоненты "силовых" векторных полей классической электродинамики. Сначала вычислим 4-дивергенцию тензора F^*_{ik}:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F^*_{1k}}{\partial x_k} &= F_1 = -i\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\frac{\partial E_y}{\partial z} + c\frac{\partial B_x}{ic\partial t} = -i\left(\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_x = 0;\\
\frac{\partial F^*_{2k}}{\partial x_k} &= F_2 = i\frac{\partial E_z}{\partial x} - i\frac{\partial E_x}{\partial z} + c\frac{\partial B_y}{ic\partial t} = -i\left(\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_y = 0;\\
\frac{\partial F^*_{3k}}{\partial x_k} &= F_3 = -i\frac{\partial E_y}{\partial x} + i\frac{\partial E_x}{\partial y} + c\frac{\partial B_z}{ic\partial t} = -i\left(\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_z = 0;\\
\frac{\partial F^*_{4k}}{\partial x_k} &= F_4 = -c\frac{\partial B_x}{\partial x} - c\frac{\partial B_y}{\partial y} - c\frac{\partial B_z}{\partial z} = -c\operatorname{div}\vec{B} = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Выражения (7) можно записать короче:

$$\begin{aligned}
F_k &= i\left(\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_k = 0, \quad k = 1, 2, 3;\\
F_4 &= -c\operatorname{div}\vec{B} = 0.
\end{aligned}$$

Легко заметить, что полученные выражения для векторных полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ "не портят" свойств 4-потенциала A_k: условия $F_i = 0$, $i = 1, \ldots, 4$, выполнены[1].

Перейдем к построению второй пары уравнений системы уравнений Максвелла.

Неоднородные уравнения классической электродинамики. Поле 4-тензора F_{ik} должно иметь "источник" существования. Подобное утверждение справедливо для случая векторных полей в пространстве трех измерений и должно быть справедливым в пространстве Минковского. В качестве второго основного предположения принимаем следующий постулат.

Постулат. 4-дивергенция тензора электромагнитного поля F_{ik} пропорциональна 4-вектору электрического тока j_k:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, j_i, \tag{8}$$

где ε_0, μ_0 — электрическая и магнитная постоянные.

[1] В работе [5] содержится утверждение, что обсуждаемые условия выполнены, поскольку справедливы уравнения Максвелла. Еще раз имеет смысл отметить, эти условия — суть следствия постулата об инвариантности тензора F_{ik} при градиентном преобразовании 4-потенциала A_k в пространстве Минковского безотносительно какого-либо физического содержания конкретной модели явления.

Уравнения (8) можно записать с использованием 4-потенциала электромагнитного поля

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)=\mu_0 j_i. \qquad (9)$$

Если для 4-потенциала потребовать выполнения условия калибровки

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k}=0, \qquad (10)$$

то уравнения (9) упрощаются

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)A_i=-\mu_0 j_i.$$

Условие калибровки (10) эквивалентно условию калибровки Лоренца в трехмерном пространстве:

$$\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0, \qquad (11)$$

а уравнения для потенциалов электромагнитного поля в пространстве трех измерений принимают вид

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}=-\mu_0\vec{j}; \qquad (12)$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (13)$$

Отметим, что полученная система уравнений классической электродинамики для потенциалов электромагнитного поля в пространстве трех измерений содержит три равноправных уравнения: 1) уравнение калибровки Лоренца (11); 2) уравнение для векторного потенциала (12); 3) уравнение для скалярного потенциала электромагнитного поля (13). Если приведенная система уравнений решена (найдены распределения векторного и скалярного потенциалов), то “силовые” векторные поля определяются по соотношениям (3), (4).

Запишем второй постулат через компоненты трехмерных векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$, по первой строке тензора электромагнитного поля получаем

$$c\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)-i\frac{\partial E_x}{ic\partial t}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}j_x.$$

С помощью соотношений

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H};\quad \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}, \qquad (14)$$

справедливых для неподвижной изотропной среды без эффектов поляризованности и намагничения (“вакуум”), находим

$$\left(\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)_x = (\vec{j})_x.$$

Аналогичные зависимости можно получить, рассматривая вторую и третью строки тензора электромагнитного поля, что дает право записать окончательный результат

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{15}$$

Анализ дифференциальных операций с компонентами четвертой строки тензора электромагнитного поля приводит к соотношению

$$\operatorname{div}\vec{E} = c\rho\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}},$$

что эквивалентно уравнению $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$.

Закон сохранения электрического заряда. В классической электродинамике (аксиоматическая теория, в основе которой лежат уравнения Максвелла) закон сохранения электрического заряда рассматривается как следствие (важное, но следствие) системы уравнений Максвелла. В настоящей работе априори использован аксиоматический подход к выводу системы уравнений Максвелла. В этом случае необходимо показать, что закон сохранения электрического заряда действительно имеет место.

Выше в качестве исходной посылки было принято предположение, что 4-вектор потенциала электромагнитного поля и 4-вектор электрического тока как векторные поля в пространстве Минковского описывают электромагнитное поле. Также было принято, что имеет место соотношение (8). Вычислим 4-дивергенцию левой и правой частей этого уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\partial j_i}{\partial x_i}. \tag{16}$$

Преобразуем левую часть соотношения (16) к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} &= c\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right) = \\ &= c\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right)\right\} \equiv 0.\end{aligned} \tag{17}$$

Из соотношения (17) следует, что 4-дивергенция электрического тока должна обращаться в нуль (при этом калибровка 4-потенциала электромагнитного поля не обязательна). В трехмерном пространстве условие обращение в нуль 4-дивергенции 4-тока имеет вид $\operatorname{div}\vec{j}+$ $+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$. Закон сохранения электрического заряда в рассматриваемом подходе действительно имеет место.

Физическое содержание формально введенных величин. Рассмотрим напряженность электростатического поля в вакууме, образованного известной объемной плотностью электрического заряда в соответствии с законом Кулона:

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{grad}\int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'. \qquad (18)$$

Вычислим дивергенцию поля

$$\operatorname{div}\vec{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\operatorname{div}\operatorname{grad}\int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \rho(\vec{r}')\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'=$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \rho(\vec{r}')(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}'))dV'=\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}.$$

Полученный результат дает представление о ясном физическом смысле введенных векторного $(\vec{E})$ и скалярного (ρ) полей.

Рассмотрим стационарное векторное поле магнитной индукции в вакууме, образованное известной объемной плотностью электрического тока в соответствии с законом Био-Савара

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'. \qquad (19)$$

Вычислим ротор поля

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\,\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'=$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'-\frac{\mu_0}{4\pi}\Delta\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'. \qquad (20)$$

Отметим, что имеет место следующее соотношение:

$$\Delta\int\limits_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dV'=\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}')\Delta\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\,V'=$$

$$=-4\pi\int\limits_V \vec{j}(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}')d\,V'=-4\,\pi\vec{j}(\vec{r}).$$

Первое слагаемое результирующей части соотношения (20) обращается в нуль, если рассматривается безграничный объем, а объемная плотность тока либо достаточно быстро убывает с расстоянием, либо имеет место в ограниченной области пространства [9]. В результате получается соотношение

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}. \tag{21}$$

Переписывая уравнение (15) с использованием векторного поля магнитной индукции для стационарного случая с учетом уравнений (14), приходим к уравнению (21). Это обстоятельство позволяет установить физический смысл формально введенных выше векторного поля $\vec{B}$ и векторного поля объемной плотности тока $\vec{j}$. Однако если установлен физический смысл "силовых" векторных полей, то становится определенным и физическое содержание "потенциальных" полей классической электродинамики.

Заключение. Система уравнений классической электродинамики для неподвижной изотропной среды (система уравнений Максвелла) является прямым непосредственным следствием постулата о возможности описания электромагнитного поля с помощью двух 4-векторов в пространстве Минковского (СТО) без использования дополнительной экспериментальной информации или дополнительных допущений. Требование градиентной инвариантности для тензора электромагнитного поля обусловливает антисимметричную структуру этого тензора. Установлено, что компоненты тензора электромагнитного поля представляют собой либо компоненты псевдовектора, либо истинного вектора в пространстве трех измерений. Это предопределяет существование двух типов векторных полей в трехмерном пространстве, для которых с необходимостью оказываются справедливыми однородные уравнения Максвелла.

Постулат о линейной зависимости 4-дивергенции тензора электромагнитного поля от 4-тока (совокупный источник электромагнитного поля) приводит к неоднородным уравнениям Максвелла и закону сохранения электрического заряда.

Уравнения классической электродинамики для неподвижной однородной изотропной среды без эффектов поляризованности и намагничения (вакуум) получены как в виде для потенциалов электромагнитного поля в пространстве трех или четырех измерений, так и в виде системы дифференциальных уравнений для "силовых" (и вспомогательных) векторных полей.

Соотнесение полученных результатов с фундаментальными законами Кулона и Био-Савара (электро- и магнитостатика) позволило выявить физическое содержание формально введенных векторных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уиттекер Э.* История теории эфира и электричества. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 512 с.
2. *Нугаев Р.М.* Генезис электродинамики Максвелла: интертеоретический контекст // Философия науки. 2014. № 2 (61). С. 66–80.
3. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. 2. Теория поля. М.: Физматлит, 2012. 536 с.
4. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005. 656 с.
5. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ГИФМЛ, 563 с.
6. *Савельев И.В.* Основы теоретической физики. В 2 т. Т. 1. Механика и электродинамика. М.: Наука, 1991. 496 с.
7. *Угаров В.А.* Специальная теория относительности. М.: Едиториал УРСС, 2005. 384 с.
8. *Коренев Г.В.* Тензорное исчисление. М.: Изд-во МФТИ, 1995. 240 с.
9. *Рубаков В.А.* Классические калибровочные поля. М.: Едиториал УРСС, 1999. 335 с.
10. *Макаров А.М.*, *Лунёва Л.А.*, *Макаров К.А.* Теория и практика классической электродинамики. М.: Едиториал УРСС, 2014. 784 с.
11. *Фушич В.И.*, *Никитин А.Г.* Симметрия уравнения Максвелла. Киев: Наукова думка, 1983, 200 с.
12. *Макаров А.М.*, *Лунёва Л.А.*, *Макаров К.А.* О структуре системы уравнений классической электродинамики // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 3. С. 39–52.
13. *Mansuripur M.* On the Foundational Equations of the Classical Electrodynamics // Resonance. 2013. No. 2. P. 130–150.
14. *Пономарев Ю.И.* Вывод уравнений Максвелла из функций состояния. Зарядовая функция состояния и ее связь с законом сохранения заряда // Успехи современного естествознания. 2009. № 1. С. 6–9.
15. *Lutfullin M.* Symmetry Reduction of Nonlinear Equations of Classical Electrodynamics // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics. 1997. Vol. 1.
16. *Lu Q.Z.*, *Norris S.*, *Su Q.*, *Grobe R.* Self-interactions as Predicted by the Dirac – Maxwell Equations // Phys. Rev. A. 2014. Vol. 90. P. 034101.
17. *Эткин В.А.* Энергодинамический вывод уравнений Максвелла // Доклады независимых авторов. Сер. Физика и астрономия. 2013. Вып. 23. С. 165–174.
18. *Эткин В.А.* Термодинамический вывод уравнений Максвелла URL: http://www.etkin.iri-as.org/napravlen/09elektr/Termod%20vyvod%20uravn%20Maxvela.pdf (дата обращения: 15.05.2015).
19. *Планк М.* Введение в теоретическую физику. Теория электричества и магнетизма. М.: УРСС, 2004. 184 с.
20. *Sindelka M.* Derivation of Coupled Maxwell – Schredinger Equations Describe Matter-laser Interaction from First Principles of Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. A. 2010. Vol. 81. P. 033833.
21. *Воронцов А.С.*, *Козлов В.И.*, *Марков М.Б.* Об уравнениях Максвелла в собственном времени // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. URL: http://keldysh.ru/papers/2005/prep28/prep2005_28.html (дата обращения: 05.05.2015).
22. *Кулябов Д.С.*, *Королькова А.В.*, *Севастьянов Л.А.* Простейшая геометризация уравнений Максвелла // Вестник РУДН. Сер. Математика, информатика, физика. 2014. № 2. С. 115–172.
23. *Darrigol O.* James MacCullagh‘s Ether: an Optical route to Maxwell Equations? // Eur. Phys. J.H. 2010. Vol. 35. P. 133–172. DOI: 10.1140/epjh/e2010-00009-3

24. *Kusnetsov I.V.*, *Zotov K.H.* Improving Accuracy of Positioning Mobile Station based on the Calculation of Static Parameters Electromagnetic Field with Maxwell's Equations // Electrical and Data processing facilities system. 2013. Vol. 9. No. 1. P. 89–92.
25. *Галев Р.В.*, *Ковалев О.Б.* Использование уравнений Максвелла при численном моделировании взаимодействия лазерного излучения с материалами // Вестник НГУ. Сер. Физика. 2014. Т. 9. С. 53–64.
26. *Алексеев Г.В.*, *Бризицкий Р.В.* Теоретический анализ экстремальных задач граничного управления для уравнений Максвелла // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т. 14. № 1 (45). С. 3–16.
27. *Barbas A.*, *Velarde P.* Development of a Godunov Method for Maxwell's Equations with Adaptive Mesh Refinement // Journal of Computational Physics. 2015. Vol. 300. P. 188–201. DOI: 10.1016/j.jcp.2015.07.048
28. *Markel V.*, *Schotland J.C.* Homogenization of Maxwell's Equations in Periodic Composites: Boundary Effects and Dispersion Relation // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. P. 066603-1–066603-23.
URL: http://journals.aps.org/pre/pdf/10.1103/PhysRevE.85.066603
DOI: 10.1103/PhysRevE.85.066603
29. *Petrov E.Yu.*, *Kudrin A.V.* Exact Axisymmetric Solution of the Maxwell Equations in a Nonlinear Nondispersive Medium // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 104. P. 190404. URL: http://arxiv.org/pdf/1306.0874v1.pdf DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.190404

REFERENCES

[1] Sir Edmund Whittaker f.r.s. A History of the Theories of Aether and Electricity. The Classical Theories. London, Edinburg, Paris, Melbourne, Toronto and New York, Thomas Nelson and Sons Ltd., 1953.
[2] Nugaev R.M. The genesis of maxwellian electrodynamics: the inter-theoretic context. *Filosofiya nauki* [Philosophy of Sciences], 2014, no. 2 (61), pp. 66–80 (in Russ.).
[3] Landau L.D., Lifshits E.M. Course of theoretical physics. Ten-volume set. Vol. 2. The Classical Theory of Fields. Oxford, New York, Pergamon, 1984. 460 p. (Russ. ed.: Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 2. Teoriya polya. Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 536 p.).
[4] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. V 10 t. T. 8. Elektrodinamika sploshnykh sred [Theoretical Physics. Vol. 8. Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005. 656 p.
[5] Fock V. The Theory of Space Time & Gravitation. Pergamon Press Ltd., 1964 (Russ. ed.: Fok V.A. Teoriya prostranstva, vremeni i tyagoteniya. Moscow, GIFML Press, 1961. 563 p.).
[6] Savelyev I.V. Osnovy teoreticheskoy fiziki. V 2 t. T. 1. Mekhanika i elektrodinamika [Fundamentals of Theoretical Physics. In 2 vol. Vol. 1: Mechanics and Electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1991. 496 p.
[7] Ugarov V.A. Spetsial'naya teoriya otnositel'nosti [Special Theory of Relativity]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2005. 384 p.
[8] Korenev G.V. Tenzornoe ischislenie [Tensor calculus]. Moscow, MFTI Publ., 1995. 240 p.
[9] Rubakov V.A. Klassicheskie kalibrovochnye polya [Classical Theory of Gauge Fields]. Moscow, Editorial URSS Publ., 1999. 335 p.
[10] Makarov A.M., Luneva L.A., Makarov K.A. Teoriya i praktika klassicheskoy elektrodinamiki [Theory and Practice of Classical Electrodynamics]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2014. 784 p.
[11] Fushchych W.I., Nikitin A.G. On the new symmetries of Maxwell equations. W.I. Fushchych, Scientific Works, 2000, vol. 2, pp. 165–169 (Russ. ed.: Fushich V.I., Nikitin A.G. Simmetriya uravneniya Maksvella. Kiev: Naukova dumka Publ., 1983. 200 p.).

[12] Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Concerning Structure of Simultaneous Equations of the Classical Electrodynamics. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 3, pp. 39–52 (in Russ.).

[13] Mansuripur M. On the Foundational Equations of the Classical Electrodynamics. *Resonance*, 2013, no. 2, pp. 130–150.

[14] Ponomarev Yu.I. The Elusion of Maxwell Equations from the State Function. Charge State Function and Its Connection with the Charge Conservation Law. *Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya* [Advances in Current Natural Sciences], 2009, no. 1, pp. 6–9.

[15] Lutfullin M. Symmetry Reduction of Nonlinear Equations of Classical Electrodynamics. *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics*, 1997, vol. 1.

[16] Lu Q.Z., Norris S., Su Q., Grobe R. Self-interactions as Predicted by the Dirac – Maxwell Equations. *Phys. Rev. A*, 2014, vol. 90, p. 034101.

[17] Etkin V.A. Energodynamic Derivation of Maxwell's Equations. *Dokl. nezavisimykh avtorov. Ser. Fizika i astronomiya* [The Papers of Independent Authors, physics, astronomy], 2013, iss. 23, pp. 165–174 (in Russ.).

[18] Etkin V.A. Thermodynamic Derivation of Maxwell's Equations. Available at: http://www.etkin.iri-as.org/napravlen/09elektr/Termod %20vyvod%20uravn%20Maxvela.pdf (accessed 15.05.2015).

[19] Planck Max. Introduction to Theoretical Physics: Theory of electricity and magnetism, vol. 3. Macmillan, 1932. 247 p. (Russ. ed.: Plank M. Vvedenie v teoreticheskuyu fiziku. Teoriya elektrichestva i magnetizma. Moscow, URSS Publ., 2004. 184 p.).

[20] Sindelka M. Derivation of Coupled Maxwell – Schredinger Equations Describe Matter-laser Interaction from First Principles of Quantum Electrodynamics. *Phys. Rev. A*, 2010, vol. 81, p. 033833.

[21] Vorontsov A.S., Kozlov V.I., Markov M.B. On the Maxwell's equations in the self-time. Preprint, Inst. Appl. Math., Russian Academy of Science. Available at: http://keldysh.ru/papers/2005/prep28/prep2005_28.html (accessed 05.05.2015).

[22] Kulyabov D.S., Korolkova A.V., Sevastyanov L.A. The Simplest Geometrization of Maxwell's Equations. *Vestn. RUDN. Ser. Matematika, informatika, fizika*, 2014, no. 2, pp. 115–172 (in Russ.).

[23] Darrigol O. James MacCullagh's Ether: an Optical route to Maxwell Equations? *Eur. Phys. J. H.*, 2010, vol. 35, pp. 133–172. DOI: 10.1140/epjh/e2010-00009-3

[24] Kusnetsov I.V., Zotov K.H. Improving Accuracy of Positioning Mobile Station based on the Calculation of Static Parameters Electromagnetic Field with Maxwell's Equations. *Electrical and Data Processing Facilities System*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 89–92.

[25] Galev R.V., Kovalev O.B. About the Use Maxwell Equations in Numerical Simulation of Interaction of Laser Radiation with Materials. *Vestnik NGU. Ser. Fizika* [Vestnik of NSU: Physics Series], 2014, vol. 9, pp. 53–64 (in Russ.).

[26] Alekseev G.V., Brizitskiy R.V. Theoretical analysis of boundary control extremal problems for Maxwell's equations. *Sib. Zh. Ind. Mat.,* 2011, vol. 14, no. 1 (45), pp. 3–16 (in Russ.).

[27] Barbas A., Velarde P. Development of a Godunov Method for Maxwell's Equations with Adaptive Mesh Refinement. *Journal of Computational Physics*, 2015, vol. 300, pp. 188–201. DOI: 10.1016/j.jcp.2015.07.048

[28] Markel V., Schotland J.C. Homogenization of Maxwell's Equations in Periodic Composites: Boundary Effects and Dispersion Relation. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, pp. 066603-1–066603-23. Available at: http://journals.aps.org/pre/pdf/10.1103/PhysRevE.85.066603
DOI: 10.1103/PhysRevE.85.066603

[29] Petrov E.Yu., Kudrin A.V. Exact Axisymmetric Solution of the Maxwell Equations in a Nonlinear Nondispersive Medium. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol. 104, p. 190404. Available at: http://arxiv.org/pdf/1306.0874v1.pdf
DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.190404

Статья поступила в редакцию 28.04.2014

Макаров Анатолий Макарович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Makarov A.M. — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Physics department, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Лунёва Любовь Александровна — канд. техн. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Lunyova L.A. — Cand. Sci. (Eng), Assoc. Professor of Physics department, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Макаров Константин Анатольевич — канд. техн. наук, доцент кафедры “Гидромеханика, гидромашины и гидропневмоавтоматика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Makarov K.A. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Hydromechanics, Hydromachines and Hydropneumoautomatics department, Bauman Moscow State Technical University.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Аксиоматическое построение системы уравнений классической электродинамики // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 45–60. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-45-60

Please cite this article in English as:

Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Axiomatic construction of classical electrodynamics equations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2016, no. 1, pp. 45–60. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-1-45-60