

# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

DOI: 10.18698/1812-3368-2015-6-99-120

УДК 539.3

## АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН

Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, Д.О. Яковлев

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com; gubareva\_ea@pochta.ru; yadmtr@gmail.com

*Предложена теория гармонических колебаний тонких упругих многослойных анизотропных пластин, построенная на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений установившихся колебаний упругих тел с одним малым параметром, характеризующим отношение толщины к линейному размеру пластины, без введения гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине пластины. Построено асимптотическое решение задачи о собственных колебаниях пластины. Сформулированы рекуррентные последовательности локальных задач колебаний и получены их решения в явном виде. Показано, что осредненная задача теории колебаний пластин в разработанной теории получается близкой к теории колебаний пластин Кирхгофа–Лява. Предложенный метод позволяет вычислить все шесть компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига для случая колебаний упругих тонких пластин. Приведен пример решения задачи о собственных изгибных колебаниях многослойной пластины. Осуществлено сравнение расчетов, полученных с помощью разработанного метода и с помощью конечно-элементного решения трехмерной задачи расчета собственных колебаний на основе программного комплекса ANSYS. Указанная асимптотическая теория позволяет достаточно точно находить значения собственных частот и вычислять все шесть компонент тензора напряжения в пластине с очень высокой точностью.*

**Ключевые слова:** многослойные тонкие пластины, асимптотическая теория гармонических колебаний пластин, метод асимптотического осреднения, асимптотические разложения, локальные задачи, метод конечного элемента.

## ASYMPTOTIC THEORY OF HARMONIC VIBRATION OF MULTILAYER THIN ELASTIC PLATES

Yu.I. Dimitrienko, E.A. Gubareva, D.O. Yakovlev

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com; gubareva\_ea@pochta.ru; yadmtr@gmail.com

*The paper considers a harmonic vibrations theory of thin elastic multilayer anisotropic plates proposed by the authors. The theory is based on the asymptotic research into three-dimensional general equations of steady-state vibrations of elastic bodies with a small parameter characterizing the length-to-thickness ratio. No hypothesis about both principles of distributing displacement and a stress over the*

*thickness of a plate is used. An asymptotic solution to the problem of eigen vibrations of a plate is found. Recurrent sequences of local vibration problems are formulated, and their solutions are found in the explicit form. It is shown that the averaged problem of the developed plate vibrations theory proves to be similar to the Kirchhoff–Love plate vibrations theory. This method allows us to calculate all 6 stress tensor components including both transverse normal stresses and stresses of an interlayer shift in case of vibrations of thin elastic plates. The solution to the problem of flexural eigen vibrations of a multilayer plate is illustrated by an example. The authors compare computations performed by the developed method and by the finite-element solution of the three-dimensional problem of eigen vibrations on the basis of ANSYS complex. It is shown that the asymptotic theory allows finding eigen frequencies quite accurately and calculating all 6 stress tensor components in a plate with a pinpoint accuracy.*

**Keywords:** multilayer thin plates, asymptotic plates theory, asymptotic theory for harmonic plate vibrations, asymptotic averaging method, asymptotic expansions, local problems, finite elements method.

**Введение.** Различные подходы к построению теории тонких пластин, основанных только на анализе трехмерных уравнений теории упругости были предложены в работах [1–7]. Асимптотическая теория многослойных тонких упругих пластин, которая в отличие от подавляющего большинства существующих теорий многослойных пластин не содержит никаких допущений относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине, была изложена в работах [7–9]. В указанной теории сделаны только ограничения, что пластина является тонкой и что давление на внешних поверхностях пластины мало. В результате были получены осредненные уравнения теории пластин, совпадающие с уравнениями теории пластин Кирхгофа – Лява, а также распределения всех шести компонент тензора напряжений по толщине. Проведенные в работе [10] сравнения полученных по этому методу формул для перемещений и напряжений с результатами численного трехмерного расчета пластины при изгибе на основе конечно-элементного программного комплекса ANSYS показали следующее: асимптотическая теория позволяет получать очень точные решения, которые достижимы для конечно-элементных теорий только при использовании очень мелких сеток и мощных вычислительных средств. Асимптотическая теория для вязкоупругих тонких пластин была развита в работах [11–15], а для расчета термоползучести пластин — в работе [16]. В работе [9] изложена асимптотическая теория упругих пластин с двумерной микроструктурой — сотовыми, сетчатыми конструкциями. Цель настоящей работы — дальнейшее развитие асимптотической теории для расчета напряженно-деформированного состояния многослойных упругих пластин при гармонических колебаниях.

**Основные допущения асимптотической теории тонких пластин.** Рассмотрим многослойную пластину постоянной толщины, введем малый параметр  $\kappa = h/L \ll 1$  как отношение общей толщины

пластины  $h$  к характерному размеру всей пластины  $L$  (например, к ее максимальной длине), а также глобальные  $(x_k)$  и локальную  $(\xi)$  координаты

$$x_k = \tilde{x}_k/L, \quad \xi = x_3/\kappa, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $\tilde{x}_k$  — обычные декартовы координаты, ориентированные так, что ось  $O\tilde{x}_3$  направлена по нормали к внешней и внутренней плоскостям пластины, а оси  $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2$  принадлежат срединной поверхности пластины. Полагаем, что существует два масштаба изменения перемещений  $u_k$ : один по направлениям  $O\tilde{x}_1, O\tilde{x}_2$ , а второй — по направлению  $O\tilde{x}_3$ . Координаты  $x_3$  и  $\xi$ , как обычно, в методе асимптотического осреднения рассматриваются как независимые переменные. Координата по толщине пластины изменяется в диапазоне  $-0,5 < \xi_3 < 0,5$ .

Рассмотрим для пластины трехмерную задачу линейной теории упругости при установившихся колебаниях [17]

$$\begin{aligned} \nabla_j \sigma_{ij} + \rho \omega^2 u_i &= 0; \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j); \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}; \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3} &= -\kappa^3 p_{\pm} \delta_{i3}, \Sigma_T : u_i = u_{ei}, \Sigma_S : [\sigma_{i3}] = 0, [u_3] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

состоящую из уравнений установившихся колебаний, соотношений Коши, обобщенного закона Гука, граничных условий на внешних поверхностях пластины оболочки — на внешней и внутренней поверхностях  $\Sigma_{3\pm}$  (их уравнение  $\tilde{x}_3 = \pm h/2$ ) и на торцевой поверхности  $\Sigma_T$ , а также граничных условий на поверхности контакта  $\Sigma_S$  слоев пластины ( $[u_i]$  — скачок функций), которые могут и отсутствовать, например, для однослойной пластины.

Принимаем основное допущение, состоящее в том, что давление  $\tilde{p}_{\pm}$  на внешней и внутренней поверхностях пластины имеет порядок малости  $O(\kappa^3)$  ( $\tilde{p}_{\pm} = \kappa^3 p_{\pm}$ ). Это допущение, как правило, соответствует реальным условиям нагружения тонких пластин. В уравнениях (2) введены следующие обозначения:  $\nabla_j = \partial/\partial \tilde{x}_j$  — оператор дифференцирования по декартовым координатам;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\rho(\xi)$  — плотность слоев пластины;  $\omega$  — частота вынужденных колебаний;  $u_j$  — компоненты вектора перемещений;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций;  $C_{ijkl}(\xi)$  — компоненты тензора модулей упругости, который полагается зависящим от координаты  $\xi_3 = \xi$ , так как тензор различен для разных слоев пластины. Специального допущения об анизотропии материалов слоев пока не делаем, т.е. тензоры модулей упругости имеют по 21 независимой компоненте [17, 18].

## Асимптотические разложения для многослойной пластины.

Задача (2) содержит локальную координату  $\xi$ , а также малый параметр  $\kappa$  в граничных условиях (это коэффициент при давлении), поэтому ее решение будем искать в виде асимптотических разложений по параметру  $\kappa$  в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$u_k = u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I, \xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I, \xi) + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_I, \xi) + \dots \quad (3)$$

Здесь и далее индексы, обозначенные прописными буквами “ $I, J, K, L$ ” принимают значения 1, 2, а индексы, обозначенные строчными буквами “ $i, j, k, l$ ”, — значения 1, 2, 3.

Подставим разложения (3) в соотношения Коши в системе (2), при этом используем правила дифференцирования функций локальных координат [7] ( $\partial/\partial\tilde{x}_j \rightarrow \partial/\partial x_j + (1/\kappa)\delta_{j3}\partial/\partial\xi$ ), тогда получим асимптотические разложения для деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \kappa\varepsilon_{ij}^{(1)} + \kappa^2\varepsilon_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{IJ}^{(0)} &= \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(0)}), \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(0)}; \\ \varepsilon_{IJ}^{(1)} &= \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(2)}), \quad \varepsilon_{33}^{(1)} = u_{3/3}^{(2)}; \\ \varepsilon_{IJ}^{(2)} &= \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(2)} + u_{J,I}^{(2)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(2)} + u_{I/3}^{(3)}), \quad \varepsilon_{33}^{(2)} = u_{3/3}^{(3)} \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $u_{i/3}^{(1)} = \partial u_i^{(1)}/\partial\xi$ ,  $u_{i,j}^{(1)} = \partial u_i^{(1)}/\partial x_j$  — производные по локальной и глобальным координатам.

Подставляя выражение (4) в закон Гука в системе (2), получаем асимптотическое разложения для напряжений

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \kappa\sigma_{ij}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{ij}^{(2)} + \dots, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(0)} &= C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{IJK3}\varepsilon_{k3}^{(0)}, \quad \sigma_{i3}^{(0)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(0)}; \\ \sigma_{IJ}^{(1)} &= C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{IJK3}\varepsilon_{k3}^{(1)}, \quad \sigma_{i3}^{(1)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(1)}; \\ \sigma_{IJ}^{(2)} &= C_{IJKL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{IJK3}\varepsilon_{k3}^{(2)}, \quad \sigma_{i3}^{(2)} = C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{i3k3}\varepsilon_{k3}^{(2)} \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (7)$$

**Формулировка локальных задач.** Подставляя разложения (3), (4) и (6) в уравнения установившихся колебаний и граничные условия

системы (2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} \sigma_{i3/3}^{(0)} + (\sigma_{iJ,J}^{(0)} + \sigma_{i3/3}^{(1)} + \rho\omega^2 u_i^{(0)}) + \kappa(\sigma_{iJ,J}^{(1)} + \sigma_{i3/3}^{(2)} + \rho\omega^2 u_i^{(1)}) + \\ + \kappa^2(\sigma_{iJ,J}^{(2)} + \sigma_{i3/3}^{(3)} + \rho\omega^2 u_i^{(2)}) + \dots = 0; \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} + \kappa\sigma_{i3}^{(1)} + \kappa^2\sigma_{i3}^{(2)} + \dots = -\kappa^3 p_{\pm} \delta_{i3}; \\ \Sigma_T : u_i = u_i^{(0)} + \kappa u_i^{(1)} + \kappa^2 u_i^{(2)} + \kappa^3 u_i^{(3)} + \dots = u_{ei}. \end{aligned} \quad (8)$$

Приравнивая в уравнениях равновесия члены при  $\kappa^{-1}$  к нулю, а при остальных степенях от  $\kappa$  — к некоторым величинам  $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$ , не зависящим от координаты  $\xi_l$ , находим рекуррентную последовательность локальных задач. Задача для нулевого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{i3/3}^{(0)} = 0, \\ \sigma_{i3}^{(0)} = C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(0)}, \\ \varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(0)} + u_{I/3}^{(1)}), \quad \varepsilon_{33}^{(0)} = u_{3/3}^{(1)}, \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} = 0; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(0)}] = 0, \quad [u_i^{(1)}] = 0, \quad \langle u_i^{(1)} \rangle = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

для первого приближения —

$$\begin{aligned} \sigma_{i3/3}^{(1)} + \sigma_{iJ,J}^{(0)} + \rho\omega^2 u_i^{(0)} = h_i^{(0)}, \\ \sigma_{i3}^{(1)} = C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(1)}, \\ \varepsilon_{IJ}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(1)} + u_{J,I}^{(1)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(1)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(1)} + u_{I/3}^{(2)}), \quad \varepsilon_{33}^{(1)} = u_{3/3}^{(2)}, \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(1)} = 0; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(1)}] = 0, \quad [u_i^{(2)}] = 0, \quad \langle u_i^{(2)} \rangle = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

для второго приближения —

$$\begin{aligned} \sigma_{i3/3}^{(2)} + \sigma_{iJ,J}^{(1)} + \rho\omega^2 u_i^{(1)} = h_i^{(1)}, \\ \sigma_{i3}^{(2)} = C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(2)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(2)}, \\ \varepsilon_{IJ}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(2)} + u_{J,I}^{(2)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(2)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(2)} + u_{I/3}^{(3)}), \quad \varepsilon_{33}^{(2)} = u_{3/3}^{(3)}, \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(2)} = 0; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(2)}] = 0, \quad [u_i^{(3)}] = 0, \quad \langle u_i^{(3)} \rangle = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

для третьего приближения —

$$\begin{aligned} \sigma_{i3/3}^{(3)} + \sigma_{iJ,J}^{(2)} + \rho\omega^2 u_i^{(2)} = h_i^{(2)}, \\ \sigma_{i3}^{(3)} = C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(3)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(3)}, \\ \varepsilon_{IJ}^{(3)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(3)} + u_{J,I}^{(3)}), \quad \varepsilon_{I3}^{(3)} = \frac{1}{2}(u_{3,I}^{(3)} + u_{I/3}^{(4)}), \quad \varepsilon_{33}^{(3)} = u_{3/3}^{(4)}, \\ \Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(3)} = -p_{\pm} \delta_{i3}; \quad \Sigma_S : [\sigma_{i3}^{(3)}] = 0, \quad [u_i^{(4)}] = 0, \quad \langle u_i^{(4)} \rangle = 0 \text{ и т.д.} \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\langle u_i^{(1)} \rangle = \int_{-0,5}^{0,5} u_i^{(3)} d\xi. \quad (13)$$

— операция осреднения по толщине пластины.

Уравнения установившихся колебаний (8) после введения функций  $h_i^{(0)}, h_i^{(1)}, h_i^{(2)}$  принимают вид

$$h_i^{(0)} + \kappa h_i^{(1)} + \kappa^2 h_i^{(2)} + \dots = 0. \quad (14)$$

Решение локальной задачи нулевого приближения (9) — функции  $u_j^{(1)}, \varepsilon_{kl}^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}$ , зависящие от локальных координат  $\xi_l$  и входных данных этой задачи — перемещений  $u_j^{(0)}(x_j)$ . Решением задачи (10) являются функции  $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ , а функции  $u_j^{(1)}, \sigma_{ij}^{(0)}$  в этой задаче — входные данные. В задаче (11) функции  $u_j^{(3)}, \varepsilon_{kl}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$  неизвестны, а функции  $u_j^{(2)}, \varepsilon_{kl}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$  — входные данные и т.д.

**Решение задачи нулевого приближения.** Ввиду того, что задачи (9)–(11) являются одномерными по локальной переменной  $\xi$ , их решение можно найти аналитически. Решение уравнений равновесия с граничными условиями в локальной задаче (9) имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(0)} = 0, \quad \forall \xi : -0,5 < \xi < 0,5. \quad (15)$$

Подставляя в (15) выражение (7) для  $\sigma_{i3}^{(0)}$ , получаем

$$C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + C_{i3k3} \varepsilon_{k3}^{(0)} = 0. \quad (16)$$

Выразим из системы уравнений (16) деформации

$$\varepsilon_{k3}^{(0)} = -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \quad (17)$$

где  $C_{i3k3}^{-1}$  — матрица компонент, обратная матрице  $C_{i3k3}$ . Подставляя в (16) выражения для деформаций  $\varepsilon_{k3}^{(0)}$  из (9), после интегрирования с учетом условий  $\langle u_i^{(1)} \rangle = 0$ , находим перемещения

$$u_I^{(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)} + 2\varepsilon_{KL}^{(0)} \left( \langle \int_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \rangle - \int_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \right);$$

$$u_3^{(1)} = \varepsilon_{KL}^{(0)} \left( \langle \int_{-0,5}^{\xi} C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \rangle - \int_{-0,5}^{\xi} C_{33i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \right). \quad (18)$$

Здесь учтено, что деформации  $\varepsilon_{KL}^{(0)}(x_j)$  согласно (9) не зависят от переменной  $\xi$ .

Подставляя выражение (18) в первую группу соотношений (7),

определяем, что напряжения  $\sigma_{IJ}^{(0)}$ , в отличие от напряжений  $\sigma_{i3}^{(0)}$ , являются ненулевыми

$$\sigma_{IJ}^{(0)} = C_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)}; \quad (19)$$

$$C_{IJKL}^{(0)} = C_{IJKL} - C_{IJK3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL}. \quad (20)$$

**Решение задачи первого, второго и третьего приближений.** Решение уравнений установившихся колебаний (10)–(12) вместе с граничными условиями на поверхности  $\Sigma_S$  и  $\xi = -0,5$  имеет вид

$$\sigma_{i3}^{(1)} = - \int_{-0,5}^{\xi} (\sigma_{iJ,J}^{(0)} + \rho \omega^2 u_i^{(0)}) d\xi + h_i^{(0)}(\xi + 0,5); \quad (21)$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = - \int_{-0,5}^{\xi} (\sigma_{iJ,J}^{(1)} + \rho \omega^2 u_i^{(1)}) d\xi + h_i^{(1)}(\xi + 0,5); \quad (22)$$

$$\sigma_{i3}^{(3)} = -p_- \delta_{i3} - \int_{-0,5}^{\xi} (\sigma_{iJ,J}^{(2)} + \rho \omega^2 u_i^{(2)}) d\xi + h_i^{(2)}(\xi + 0,5). \quad (23)$$

Условия существования решения (21)–(23) задач (10)–(12), удовлетворяющих граничным условиям  $\sigma_{i3}^{(1)} = 0$ ,  $\sigma_{i3}^{(2)} = 0$ ,  $\sigma_{i3}^{(1)} = -p_+$  на внешней поверхности  $\xi = 0,5$ , приводят к следующей системе уравнений для вычисления функций:

$$h_i^{(0)} = \langle \sigma_{iJ,J}^{(0)} \rangle + \langle \rho \rangle \omega^2 u_i^{(0)}; \quad (24)$$

$$h_i^{(1)} = \langle \sigma_{iJ,J}^{(1)} \rangle + \omega^2 \langle \rho u_i^{(1)} \rangle; \quad (25)$$

$$h_i^{(2)} = \langle \sigma_{iJ,J}^{(2)} \rangle + \omega^2 \langle \rho u_i^{(2)} \rangle - \Delta p \delta_{i3}, \quad \Delta p = p_+ - p_-, \quad (26)$$

так как функция  $u_i^{(0)}$  не зависит от переменной  $\xi$ . С учетом формул (24)–(26) напряжения  $\sigma_{i3}^{(m)}$  (21)–(23) принимают вид

$$\sigma_{i3}^{(1)} = \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{iJ,J}^{(0)} \rangle - \sigma_{iJ,J}^{(0)} + (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_i^{(0)}) d\xi; \quad (27)$$

$$\sigma_{i3}^{(2)} = \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{iJ,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{iJ,J}^{(1)} + \omega^2 (\langle \rho u_i^{(1)} \rangle - \rho u_i^{(1)})) d\xi; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(3)} = & -(p_- + \Delta p(\xi + 0,5)) \delta_{i3} + \\ & + \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{iJ,J}^{(2)} \rangle - \sigma_{iJ,J}^{(2)} + \omega^2 (\langle \rho u_i^{(2)} \rangle - \rho u_i^{(2)})) d\xi. \end{aligned} \quad (29)$$

Если подставить выражение (19) в (27), то с учетом (15) для напряжений получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}\sigma_{I3}^{(1)} &= \varepsilon_{KL,J}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi + \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_I^{(0)} d\xi; \\ \sigma_{33}^{(1)} &= \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_3^{(0)} d\xi.\end{aligned}\quad (30)$$

Отметим, что в отличие от квазистатической задачи [7, 8] для установившихся колебаний напряжение  $\sigma_{33}^{(1)}$  отлично от нуля. Выразим деформации  $\varepsilon_{k3}^{(1)}$  из четвертой группы соотношений (7), тогда с учетом формул (27) запишем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{k3}^{(1)} &= -C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \varepsilon_{KL}^{(1)} + \varepsilon_{KL,J}^{(0)} C_{k3I3}^{-1} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi + \\ &+ \omega^2 C_{k3i3}^{-1} u_i^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi.\end{aligned}\quad (31)$$

Если подставить (31) в третью группу соотношений (7), то найдем оставшиеся напряжения первого приближения

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ}^{(1)} &= C_{IJKL}^{(0)} \varepsilon_{KL}^{(1)} + N_{IJKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \omega^2 G_{IJi} u_i^{(0)}; \\ N_{IJKLM}^{(0)} &= C_{IJK3} C_{k3P3}^{-1} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{PMKL}^{(0)} \rangle - C_{PMKL}^{(0)}) d\xi; \\ G_{IJi} &= C_{IJK3} C_{k3i3}^{-1} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi.\end{aligned}\quad (32)$$

Деформации  $\varepsilon_{KL}^{(1)}$  с учетом формул (10), (18) можно представить в виде

$$\varepsilon_{KL}^{(1)} = \xi \eta_{KL} + \Phi_{KLMNS} \varepsilon_{MN,S}^{(0)}; \quad (33)$$

$$\eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)}, \quad \Phi_{KLMNS}(\xi) = \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) - \langle \tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) \rangle; \quad (34)$$

$$\tilde{\Phi}_{KLMNS}(\xi) = - \int_{-0,5}^{\xi} (C_{K3i3}^{-1} \delta_{SL} + C_{L3i3}^{-1} \delta_{SK}) C_{i3MN} d\xi. \quad (35)$$



С учетом формул (33) выражения (32) принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_{IJ}^{(1)} &= \xi C_{IJKL}^{(0)} \eta_{KL} + \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \omega^2 G_{IJi} u_i^{(0)}; \\ \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} &= N_{IJKLM}^{(0)} + \Phi_{IJKLM}.\end{aligned}\quad (36)$$

Вычислим перемещения  $u_i^{(2)}$  второго приближения, используя третью формулу в (7) и пятую формулу в (5):  $u_{I/3}^{(2)} = -u_{3,I}^{(1)} + 2C_{I3i3}^{-1}(\sigma_{i3}^{(1)} - C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)})$ . После интегрирования этого выражения с учетом условий  $\langle u_i^{(2)} \rangle = 0$ , находим перемещения  $u_i^{(2)}$

$$\begin{aligned}u_I^{(2)} &= \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} u_{3,I}^{(1)} d\xi \right\rangle - \int_{-0,5}^{\xi} u_{3,I}^{(1)} d\xi - 2 \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1}(\sigma_{i3}^{(1)} - C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)}) d\xi \right\rangle + \\ &+ 2 \int_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1}(\sigma_{i3}^{(1)} - C_{i3KL}\varepsilon_{KL}^{(1)}) d\xi.\end{aligned}$$

**Осредненные уравнения установившихся колебаний многослойных пластин.** Подставляя выражения (24), (25) в асимптотическое разложение (14) уравнений равновесия, получаем

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{iJ,J}^{(0)} \rangle + \langle \rho \rangle \omega^2 u_i^{(0)} + \kappa (\langle \sigma_{iJ,J}^{(1)} \rangle + \omega^2 \langle \rho u_i^{(1)} \rangle) + \\ + \kappa^2 (\langle \sigma_{iJ,J}^{(2)} \rangle + \omega^2 \langle \rho u_i^{(2)} \rangle - \Delta p \delta_{i3}) + \dots = 0.\end{aligned}\quad (37)$$

Умножим уравнения системы (8) на  $\xi \kappa$  и проинтегрируем их по толщине, далее запишем следующее вспомогательное уравнение:

$$\begin{aligned}\kappa (\langle \xi \sigma_{IJ,J}^{(0)} \rangle + \omega^2 \langle \rho u_I^{(1)} \xi \rangle - \langle \sigma_{I3}^{(1)} \rangle) + \\ + \kappa^2 (\langle \xi \sigma_{IJ,J}^{(1)} \rangle + \omega^2 \langle \rho u_I^{(2)} \xi \rangle - \langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle) + \dots = 0,\end{aligned}\quad (38)$$

В (38) учтено, что  $\langle \xi \sigma_{i3/3}^{(1)} \rangle = - \langle \sigma_{i3}^{(1)} \rangle$ ,  $\langle \xi \sigma_{i3/3}^{(2)} \rangle = - \langle \sigma_{i3}^{(2)} \rangle$  в силу граничных условий  $\Sigma_{3\pm} : \sigma_{i3}^{(0)} = 0, \sigma_{i3}^{(1)} = 0$ .

Введем обозначения для усилий  $T_{IJ}$ , моментов  $M_{IJ}$  и перерезывающих сил  $Q_I$  в пластине

$$\begin{aligned}T_{IJ} &= \langle \sigma_{IJ}^{(0)} \rangle + \kappa \langle \sigma_{IJ}^{(1)} \rangle + \dots; \\ M_{IJ} &= \kappa \langle \xi \sigma_{IJ}^{(0)} \rangle + \kappa^2 \langle \xi \sigma_{IJ}^{(1)} \rangle + \dots; \\ Q_I &= \kappa \langle \sigma_{I3}^{(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle + \dots,\end{aligned}\quad (39)$$

а также обозначения для обобщенных перемещений пластины

$$\begin{aligned}\bar{\rho} U_i &= \langle \rho \rangle u_i^{(0)} + \kappa \langle \rho u_i^{(1)} \rangle + \kappa^2 \langle \rho u_i^{(2)} \rangle + \dots; \\ \bar{\rho} \Gamma_I &= \kappa \langle \rho u_I^{(1)} \xi \rangle + \kappa^2 \langle \rho u_I^{(2)} \xi \rangle + \dots,\end{aligned}$$

где  $\bar{\rho} = \langle \rho \rangle$ .

Если в приведенных выражениях сохранить только главные члены асимптотических разложений, то с учетом (18) имеем

$$U_i = u_i^{(0)};$$

$$\bar{\rho}\Gamma_I = \kappa \langle \rho u_I^{(1)} \xi \rangle = -Ru_{3,I}^{(0)} + \varepsilon_{KL}^{(0)} R_{IKL};$$

$$R_{IKL} = 2\kappa \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \right\rangle \langle \rho \xi \rangle - 2\kappa \left\langle \rho \xi \int_{-0,5}^{\xi} C_{I3i3}^{-1} C_{i3KL} d\xi \right\rangle;$$

$$R = \kappa \langle \rho \xi^2 \rangle .$$

В результате уравнения (37), (38) можно записать в традиционном для теории пластин виде уравнений равновесия и уравнений моментов при установившихся колебаниях

$$T_{IJ,J} + \bar{\rho}\omega^2 U_I = 0, \quad Q_{J,J} + \bar{\rho}\omega^2 U_3 = \Delta \bar{p}, \quad M_{IJ,J} - Q_I + \bar{\rho}\omega^2 \Gamma_I = 0. \quad (40)$$

Это и есть искомые осредненные уравнения установившихся колебаний многослойной пластины, здесь использовано обозначение  $\Delta \bar{p} = \kappa^2 \Delta p$ . Уравнения (40) отличаются от классических уравнений колебаний пластин только наличием слагаемого  $\varepsilon_{KL}^{(0)} R_{IKL}$  при коэффициентах  $\Gamma_I$ .

### Осредненные определяющие соотношения теории пластин.

Подставляя выражения (19), (30), (36) для напряжений  $\sigma_{IJ}^{(0)}, \sigma_{IJ}^{(1)}, \sigma_{I3}^{(1)}$  в интегралы формул (39), получаем

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + B_{IJKL} \eta_{KL} + K_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \omega^2 \bar{G}_{IJi} u_i^{(0)}; \quad (41)$$

$$M_{IJ} = B_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)} + D_{IJKL} \eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \omega^2 \hat{G}_{IJi} u_i^{(0)}; \quad (42)$$

$$Q_I = K_{IJKL} \varepsilon_{KL,J}^{(0)} + \omega^2 \bar{G} u_I^{(0)} + \kappa^2 \langle \sigma_{I3}^{(2)} \rangle, \quad (43)$$

где

$$\bar{C}_{IJKL} = \langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle = \langle C_{IJKL} \rangle - \langle C_{IJK3} C_{k3i3}^{-1} C_{i3KL} \rangle; \quad (44)$$

$$B_{IJKL} = \kappa \langle \xi C_{IJKL}^{(0)} \rangle, \quad K_{IJKLM} = \kappa \langle \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \rangle, \quad \bar{K}_{IJKLM} =$$

$$= \kappa \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{IJKL}^{(0)} \rangle - C_{IJKL}^{(0)}) d\xi \right\rangle;$$

$$D_{IJKL} = \kappa^2 \langle \xi^2 C_{IJKL}^{(0)} \rangle; \quad \bar{K}_{IJKLM} = \kappa^2 \langle \xi \tilde{N}_{IJKLM}^{(0)} \rangle;$$

$$\bar{G}_{IJi} = \kappa \langle G_{IJi} \rangle = \kappa \langle C_{IJK3} C_{k3i3}^{-1} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle;$$

$$\hat{G}_{IJi} = \kappa^2 \langle \xi G_{IJi} \rangle = \kappa^2 \langle C_{IJK3} C_{k3i3}^{-1} \xi \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle;$$

$$\bar{G} = \kappa \langle \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle$$

— тензоры осредненных упругих констант пластины.

В частном случае, когда выполняются следующие условия: 1) слои пластины расположены симметрично относительно плоскости  $\xi = 0$ ; 2) толщины всех слоев одинаковы, функции вида  $\langle C_{PMKL}^{(0)} \rangle - C_{PMKL}^{(0)}$  будут симметричными относительно плоскости, а функции

$\int_{-0,5}^{\xi} (\langle C_{PMKL}^{(0)} \rangle - C_{PMKL}^{(0)})$  — антисимметричными, поэтому при-

веденные ниже функции являются нулевыми:

$$B_{IJKL} = 0, \quad K_{IJKLM} = 0, \quad K_{IJKL} = 0, \quad \bar{G}_{IJi} = 0, \quad (45)$$

а определяющие соотношения (41)–(43) принимают более простой вид

$$T_{IJ} = \bar{C}_{IJKL} \varepsilon_{KL}^{(0)}, \quad M_{IJ} = D_{IJKL} \eta_{KL} + \bar{K}_{IJKLM} \varepsilon_{KL,M}^{(0)} + \omega^2 \hat{G}_{IJi} u_i^{(0)}, \quad (46)$$

который для моментов имеет вид, отличный от вида уравнений классической теории пластин Кирхгофа–Лява и Тимошенко [20] ввиду наличия второго и третьего слагаемых.

### Осредненные кинематические соотношения теории пластин.

В систему осредненных определяющих соотношений (41)–(43) входят деформации срединной поверхности  $\varepsilon_{KL}^{(0)}$ , кривизны  $\eta_{KL}$  и градиенты деформаций  $\varepsilon_{KL,N}^{(0)}$ , которые зависят от трех функций  $u_I^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$  глобальных переменных  $x_I$ :

$$\varepsilon_{IJ}^{(0)} = \frac{1}{2}(u_{I,J}^{(0)} + u_{J,I}^{(0)}), \quad \eta_{KL} = -u_{3,KL}^{(0)}. \quad (47)$$

### Осредненная система уравнений для установившихся колебаний многослойных пластин.

Подставляя далее выражения (41)–(43) и (47) в систему (40), получаем систему относительно трех неизвестных функций  $u_I^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} & \bar{C}_{IJKL} u_{K,LJ}^{(0)} - B_{IJKL} u_{3,KLJ}^{(0)} + K_{IJKLM} u_{K,LMJ}^{(0)} + \\ & \quad + \omega^2 (\bar{G}_{IJi} + \langle \rho \rangle \delta_{i3}) u_{i,J}^{(0)} = 0; \\ & B_{IJKL} u_{K,LJI}^{(0)} - D_{IJKL} u_{3,KLJI}^{(0)} + \bar{K}_{IJKLM} u_{K,LMJI}^{(0)} + \omega^2 \hat{G}_{IJi} u_{i,IJ}^{(0)} - \\ & \quad - \omega^2 (R u_{3,II}^{(0)} - u_{K,LI}^{(0)} R_{IKL} + \bar{\rho} u_3^{(0)}) = \Delta \bar{p}. \end{aligned} \quad (48)$$

Система (48) имеет четвертый порядок относительно прогиба  $u_3^{(0)}$ , как в классической теории пластин Кирхгофа–Лява, и третий порядок производных относительно продольных перемещений  $u_I^{(0)}$ , чем отличается от теории Кирхгофа–Лява. Отличается она также наличием слагаемых при  $\hat{G}_{IJi}$ ,  $R_{IKL}$  и  $\hat{G}_{IJi}$ . Нелинейная зависимость перемещений  $u_k$  от переменной  $\xi$  обусловлена различием модулей упругости для разных слоев пластины.

**Напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения в пластине.** После того как решены осредненные уравнения (48) и найдены функции  $u_I^{(0)}$ ,  $u_3^{(0)}$ , можно вычислить деформации (47), а затем напряжения  $\sigma_{IJ}^{(0)}$  по формулам (19). Сдвиговые напряжения  $\sigma_{I3}^{(0)}$  и поперечное напряжение  $\sigma_{33}^{(0)}$ , как было установлено, в пластине тождественно равны нулю. Ненулевые значения сдвиговых напряжений появляются у следующего члена асимптотического разложения:  $\sigma_{I3}^{(1)}$  (согласно (30)). Для поперечного напряжения первое в асимптотическом ряду ненулевое значение — значение  $\sigma_{33}^{(1)}$ , которое вычисляется по (30), а члены разложения  $\sigma_{33}^{(2)}$  и  $\sigma_{33}^{(3)}$  — по (28), (29):

$$\begin{aligned} \sigma_{33} = & \kappa \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_3^{(0)} d\xi + \\ & + \kappa^2 \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(1)} + (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_i^{(1)}) d\xi + \kappa^3 (-p_- - \Delta p(\xi + 0,5) + \\ & + \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(2)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(2)} + \omega^2 (\langle \rho u_i^{(2)} \rangle - \rho u_i^{(2)})) d\xi); \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{I3} = & \kappa \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{(0)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{(0)} + (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_I^{(0)}) d\xi + \\ & + \kappa^2 \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{IJ,J}^{(1)} \rangle - \sigma_{IJ,J}^{(1)} + \omega^2 (\langle \rho u_I^{(1)} \rangle - \rho u_I^{(1)})) d\xi. \quad (50) \end{aligned}$$

Таким образом, разработанная теория тонких пластин позволяет найти все шесть компонент тензора напряжений.

**Изгибные колебания симметричной многослойной композитной пластины.** Рассмотрим в качестве примера классическую задачу об установившихся изгибных колебаниях многослойной пластины прямоугольной формы под действием равномерно распределенного

давления. Пусть слои пластины расположены симметрично относительно плоскости  $\xi = 0$ , поэтому имеют место соотношения (45). В этом случае

$$u_I^{(0)} = 0, \varepsilon_{KL}^{(0)} = 0, T_{IJ} = 0, \sigma_{IJ}^{(0)} = 0 \quad (51)$$

и ненулевыми неизвестными функциями являются только функции

$$u_3^{(0)}(x), \quad M_{11}(x), \quad Q_1(x), \quad (52)$$

где  $x = x_1$  — безразмерная продольная координата пластины. Тожественно ненулевые уравнения колебаний (40), определяющие соотношения (42) и кинематические соотношения (47) принимают вид

$$\begin{aligned} Q_{1,1} + \bar{\rho}\omega^2 u_3^{(0)} &= \Delta\bar{p}, \quad M_{11,1} - Q_1 - \omega^2 R u_{3,1}^{(0)} = 0; \\ M_{11} &= D_{1111}\eta_{11} + \omega^2 \hat{G}_{113} u_3^{(0)}, \quad \eta_{11} = -u_{3,11}^{(0)}. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь  $\hat{G}_{113} = \kappa^2 \langle C_{11k3} C_{k333}^{-1} \xi \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle$ .

Исключая из первых двух уравнений системы (53) перерезывающую силу, получаем

$$\begin{aligned} M_{11,11} + \omega^2 (\bar{\rho} u_3^{(0)} - R u_{3,11}^{(0)}) &= \Delta\bar{p}; \\ M_{11} &= -D_{1111} u_{3,11}^{(0)} + \omega^2 \hat{G}_{113} u_3^{(0)}, \end{aligned}$$

отсюда окончательное дифференциальное уравнение колебаний многослойной пластины имеет вид

$$D_{1111} u_{3,1111}^{(0)} + \omega^2 R (1 - \hat{G}_{113}/R) u_{3,11}^{(0)} - \omega^2 \bar{\rho} u_3^{(0)} + \Delta\bar{p} = 0. \quad (54)$$

Уравнение (54) почти совпадает с классическим уравнением изгибных колебаний пластины Кирхгофа – Лява и отличается от него только членом

$$\frac{\hat{G}_{113}}{R} = \frac{\kappa}{\langle \rho \xi^2 \rangle} \langle C_{11k3} C_{k333}^{-1} \xi \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) d\xi \rangle, \quad (55)$$

который мал по сравнению с единицей. Таким образом, разработанная асимптотическая теория колебаний многослойных пластин в частном случае колебаний симметричных пластин приводит к хорошо известному уравнению колебаний пластин Кирхгофа – Лява.

Рассмотрим решение уравнения (54) вместе с граничными условиями шарнирного закрепления торцов пластины

$$x = 0 \text{ и } x = 1: \quad u_3^{(0)} = 0, \quad u_{3,11}^{(0)} = 0. \quad (56)$$

Для случая  $\Delta\bar{\rho} = 0$  решение задачи (54), (56) представляет собой собственные колебания пластины  $u_3^{(0)} = W_n \sin(\pi n x)$ , где  $u_3^{(0)} = W_n \sin(\pi n x)$  – амплитуда,  $n = 1, 2, 3 \dots$ . В таком случае частота  $\omega$  является собственной частотой  $\omega_n$  колебаний пластины и вычисляется по формуле

$$\omega_n^2 = \frac{(\pi n)^4 D_{1111}}{\bar{\rho} + \pi^2 n^2 (R - \hat{G}_{113})}. \quad (57)$$

Напряжения  $\sigma_{IJ}^{(0)}$ ,  $\sigma_{k3}^{(0)}$  нулевого приближения согласно (15) и (51) являются нулевыми, а напряжения первого и второго приближений согласно (36), (30) и (29) в рассматриваемой задаче имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{IJ}^{(1)} &= -\xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)} + \omega^2 G_{IJ3} u_3^{(0)}; \\ \sigma_{I3}^{(1)} &= 0; \quad \sigma_{33}^{(1)} = u_3^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 d\xi; \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{I3}^{(2)} &= -u_{3,111}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi + \\ &+ \omega^2 u_{3,1}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle G_{IJ3} \rangle - G_{IJ3}) d\xi - \omega^2 u_{3,1}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \xi \rangle - \rho \xi) d\xi; \\ \sigma_{33}^{(2)} &= 0; \end{aligned}$$

$$\sigma_{33}^{(3)} = \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{3J,J}^{(2)} \rangle - \sigma_{3J,J}^{(2)} + \omega^2 (\langle \rho u_3^{(2)} \rangle - \rho u_3^{(2)})) d\xi,$$

так как  $u_I^{(1)} = -\xi u_{3,I}^{(0)}$ ,  $u_2^{(1)} = u_3^{(1)} = 0$  в соответствии с (18).

Следовательно, изгибные напряжения, напряжения межслойного сдвига и поперечные напряжения согласно (6) при сохранении главных членов в асимптотических разложениях вычисляются по формулам

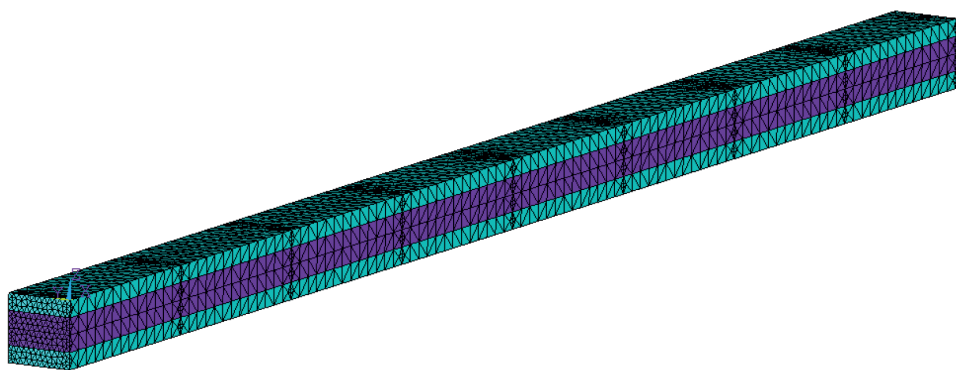
$$\begin{aligned} \sigma_{IJ} &= -\kappa (\xi C_{IJ11}^{(0)} u_{3,11}^{(0)} + \omega^2 G_{IJ3} u_3^{(0)}); \\ \sigma_{I3} &= -\kappa^2 u_{3,111}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{I111}^{(0)} \rangle - \xi C_{I111}^{(0)}) d\xi + \kappa^2 \omega^2 u_{3,1}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle G_{IJ3} \rangle - \\ &- G_{IJ3}) d\xi - \kappa^2 \omega^2 u_{3,1}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \xi \rangle - \rho \xi) d\xi; \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \kappa \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho \rangle - \rho) \omega^2 u_3^{(0)} d\xi - \kappa^3 (p_- + \Delta p (\xi + 0,5) - \\ &\quad - \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \sigma_{31,1}^{(2)} \rangle - \sigma_{31,1}^{(2)}) d\xi - \omega^2 \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \rho u_3^{(2)} \rangle - \rho u_3^{(2)}) d\xi); \\ \sigma_{31,1}^{(2)} &= -u_{3,1111}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} [\langle \sigma^{(2)} \rangle - \sigma^{(2)}] d\xi + \omega u_{3,11}^{(0)} \times \\ &\quad \times \int_{-0,5}^{\xi} \left[ \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} (\langle G_{113} \rangle - G_{113}) d\xi \right\rangle - \int_{-0,5}^{\xi} (\langle G_{113} \rangle - G_{113}) d\xi \right] d\xi - \\ &\quad - \omega^2 u_{3,11}^{(0)} \int_{-0,5}^{\xi} \left[ \left\langle \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi \rho \rangle - \xi \rho) d\xi \right\rangle - \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi \rho \rangle - \xi \rho) d\xi \right] d\xi; \\ \sigma^{(2)} &= \int_{-0,5}^{\xi} (\langle \xi C_{1111}^{(0)} \rangle - \xi C_{1111}^{(0)}) d\xi. \end{aligned}$$

**Численная реализация аналитического решения и сравнение с трехмерной теорией упругости.** Для анализа точности асимптотической теории многослойных пластин сравним результаты расчетов напряжений по формулам (59) с результатами расчетов, полученных с помощью точной трехмерной теории упругости. Для нахождения численного решения по трехмерной теории используем программный конечно-элементный пакет ANSYS с тетраэдральным десятиузловым конечным элементом SOLID187. В этом случае пластина рассматривается как трехмерное тело (параллелепипед), торцы которого ( $x = 0$  и  $x = 1$ ) шарнирно закреплены, внешние поверхности ( $\xi = 0,5$ ,  $\xi = -0,5$ ) полагаются свободными, а боковые грани  $x_2 = \pm b/(2L)$  ( $b$  — ширина пластины) защемлены со свободным скольжением  $u_2 = 0$ ,  $\sigma_{12} = 0$ ,  $\sigma_{13} = 0$ . Пластина состояла из трех слоев с симметричным их расположением относительно срединной плоскости (рис. 1): толщина средней пластины в 2 раза больше толщины внешних слоев. Числа  $\kappa = h/L$  и  $b/L$  были выбраны равными  $\kappa = b/L = 0,04$ , что обеспечивало условие “тонкости” пластины. Материалы слоев ортотропны, главные оси ортотропии совпадают с осями симметрии пластины, значения упругих характеристик слоев соответствуют характеристикам двух типов стеклопластика и приведены ниже:

№	$E_1$ , ГПа	$E_2$ , ГПа	$E_3$ , ГПа	$G_{12}$ , ГПа	$G_{13}$ , ГПа	$G_{23}$ , ГПа	$\nu_{12}$	$\nu_{31}$	$\nu_{23}$
1	14	14	5,3	1,8	0,75	0,75	0,08	0,14	0,15
2	21	21	7,95	2,7	1,125	1,125	0,12	0,21	0,225

В процессе проведения трехмерных конечно-элементных расчетов с помощью пакета ANSYS была установлена существенная зависимость решения от использованной при расчетах конечно-элементной сетки. В начале расчеты проводились с равномерной конечно-элементной сеткой с числом элементов по толщине пластины, равным  $N = 12$  (соответствует минимум трем конечным элементам по толщине на каждый слой пластины). Общее число конечных элементов для всей пластины в такой сетке составило 492 544 (или 693 634 узла). Однако точность определенного на сетке решения, оцениваемая по отклонению от решения (60), которое получено с помощью асимптотической теории (далее АТ-решение), оказалась крайне не удовлетворительной. Для повышения точности конечно-элементного решения потребовалось существенное измельчение сетки с 80 конечными элементами по толщине пластины. При этом резко возросло общее число конечных элементов — примерно до 50 млн, что сделало затруднительным не только решение задачи на персональном компьютере, но и само хранение конечно-элементной сетки в оперативной памяти компьютера. Для того чтобы избежать необходимости применения параллельных вычислений, было предложено создать специальную неравномерную конечно-элементную сетку, для которой сгущение реализуется только вблизи девяти нормальных сечений пластины, названных “опорными”, для остальных частей пластины использовалась существенно более крупная сетка. Так, для  $N = 12$  число конечных элементов по толщине и ширине пластины вне областей опорных сечений составило 4 (9 узлов, см. рис. 1).



**Рис. 1. Неравномерная конечно-элементная сетка трехслойной пластины**



Для сравнения АТ-решения и решения, полученного с помощью пакета ANSYS, число конечных элементов по толщине и ширине пластины в опорных сечениях, было выбрано равным  $N = 12$  (по три элемента на слой). Общее число конечных элементов в такой неравномерной сетке оставалось относительно небольшим — 24 677 (или 38 735 узла), что позволяло быстро проводить расчеты на этой сетке.

Сравнение значений распределений напряжений, рассчитанных по АТ-решению, с решением, полученным с помощью пакета ANSYS, приведено на рис. 2 для двух различных сечений  $x = x_1 = [0, 25; 0,5]$ , ( $y = x_2, z = x_3$ ). Как и ранее, поперечная безразмерная координата  $\xi$  изменяется в пределах  $[-0,5; 0,5]$ : значение  $\xi = 0,5$  соответствует верхней плоскости, а значения  $\xi = \pm 0,25$  — плоскостям стыка слоев. Поскольку материалы слоев выбраны ортотропными, два касательных напряжения отсутствуют во всех слоях:  $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$ .

Распределения остальных четырех напряжений ( $\sigma_{13}, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ ), соответствующие низшей частоте собственных колебаний, которые рассчитаны с использованием разработанной асимптотической теории по формулам (59) и с помощью пакета ANSYS для сетки с  $N = 12$  достаточно хорошо совпадают (см. рис. 2).

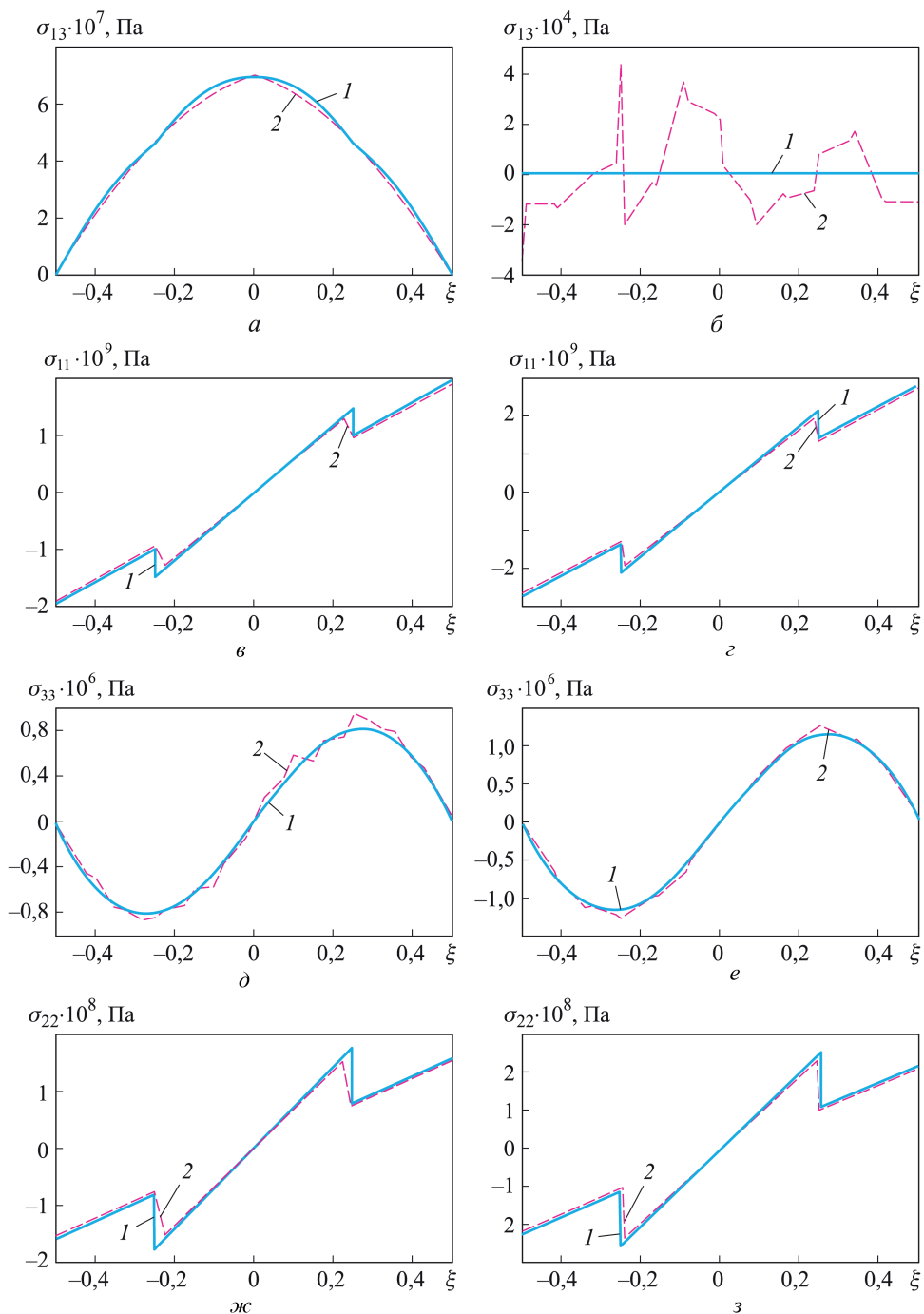
Значения низших собственных частот, определенные с помощью АТ-решения (57) (числитель) и пакета ANSYS (знаменатель), приведены ниже:

$$\begin{array}{l} 41,9/42,2 \\ 158,9/162,9 \\ 330,7/347,1 \end{array}$$

Распределение напряжения  $\sigma_{13}$  (рис. 2, б) отражает тот факт, что теоретически нулевое распределение касательного напряжения  $\delta$  ( $\sigma_{13}$ ) в центральном сечении  $x_1 = 0,5$  при численной конечно-элементной реализации близко к машинному нулю, максимальное значение отклонений от нуля примерно в 3 раза меньше максимального значения касательных напряжений в сечении  $x_1 = 0,25$  (рис. 2, а).

**Заключение.** Разработана теория собственных колебаний тонких упругих многослойных анизотропных пластин, которая построена на основе асимптотического анализа общих трехмерных уравнений упругих колебаний тел, без введения гипотез относительно характера распределения перемещений и напряжений по толщине.

Сформулированы рекуррентные последовательности локальных задач квазистатического равновесия для задачи колебаний и получены их решения в явном виде. Показано, что осредненная задача теории колебаний пластин в разработанной теории получается близкой к теории пластин Кирхгофа – Лява, но отличается от нее наличием третьего



**Рис. 2.** Распределения напряжений  $\sigma_{13}$  (*a*, *б*),  $\sigma_{11}$  (*в*, *г*),  $\sigma_{33}$  (*д*, *е*) и  $\sigma_{22}$  (*ж*, *з*) по толщине трехслойной пластины, полученные с помощью асимптотической теории (1) и пакета ANSYS (2) для  $x_1 = 0,25$  (*a*, *в*, *д*, *ж*),  $x_1 = 0,5$  (*б*, *г*, *е*, *з*)

порядка производных продольных перемещений пластины. Слагаемые с этими производными отличны от нуля только для пластин с несимметричным расположением слоев по толщине.

Предложенный метод позволяет вычислить все шесть компонент тензора напряжений, включая поперечные нормальные напряжения и напряжения межслойного сдвига для случая колебаний упругих тонких пластин.

Приведен пример решения задачи о собственных изгибных колебаниях многослойных пластин. Проведено сравнение расчетов, полученных с помощью разработанного метода и конечно-элементного решения трехмерной задачи расчета собственных колебаний на основе пакета ANSYS. Предложенная асимптотическая теория позволяет находить значения собственных частот и вычислять все шесть компонент тензора напряжения в пластине с очень высокой точностью, достичь которой с помощью конечно-элементного трехмерного решения удастся только с использованием очень мелких сеток с большим числом конечных элементов по толщине пластины. Последнее является серьезным ограничением при расчетах тонкостенных пластин и оболочек.

*Исследования выполнены при поддержке гранта Президента РФ № МК-5961.2015.8.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Шешенин С.В.* Асимптотический анализ периодических в плане пластин // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 71–79.
2. *Шешенин С.В., Ходос О.А.* Эффективные жесткости гофрированной пластины // Вычислительная механика сплошной среды. 2011. Т. 4. № 2. С. 128–139.
3. *Kohn R.V., Vogelius M.* A new model of thin plates with rapidly varying thickness // Int. J. Solids and Struct. 1984. Vol. 20. No. 4. P. 333–350.
4. *Панасенко Г.П., Резцов М.В.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // ДАН СССР. 1987. Т. 294. № 5. С. 1061–1065.
5. *Levinski T., Telega J.J.* Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. Singapore, London: World Sci. Publ., 2000. 739 p.
6. *Kolpakov A.G.* Homogenized models for thin-walled nonhomogeneous structures with initial stresses. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 228 p.
7. *Димитриенко Ю.И.* Асимптотическая теория многослойных тонких пластин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 86–100.
8. *Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О.* Асимптотическая теория термоупругости многослойных композитных пластин // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20. № 2. С. 260–282.
9. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В.* Асимптотическая теория конструктивно-ортогортропных пластин с двухпериодической структурой // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 36–57.
10. *Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О.* Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 12. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html>

11. *Моделирование* и разработка трехслойных композиционных материалов с соевым наполнителем / Ю.И. Димитриенко, Н.Н. Федонюк, Е.А. Губарева, С.В. Сборщиков, А.А. Прозоровский, В.С. Ерасов, Н.О. Яковлев // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2014. № 5. С. 66–82.
12. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Федонюк Н.Н., Яковлев Д.О.* Метод расчета рассеяния энергии в конструкциях из гибридных композитов // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2014. № 11. С. 23–34.
13. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В.* Моделирование упругодиссипативных характеристик слоисто-волоконистых композитов // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2014. Вып. 4 (28). URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1234.html>
14. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Федонюк Н.Н.* Моделирование вязкоупругих характеристик слоисто-волоконистых полимерных композиционных материалов // *Наука и образование. Электронное научно-техническое издание*. 2014. № 11. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/734246.html> DOI: 10.7463/1114.0734246
15. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О.* Асимптотическая теория вязкоупругости многослойных тонких композитных пластин // *Наука и образование. Электронное научно-техническое издание*. 2014. № 10. С. 359–382. URL: <http://technomag.edu.ru/doc/730105.html> DOI: 10.7463/1014.0730105
16. *Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В., Губарева Е.А.* Асимптотическая теория термоползучести многослойных тонких пластин // *Математическое моделирование и численные методы*. 2014. № 4. С. 36–57.
17. *Димитриенко Ю.И.* Основы механики твердого тела. Т. 4. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 580 с.
18. *Димитриенко Ю.И.* Тензорный анализ. Т. 1. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 463 с.
19. *Димитриенко Ю.И.* Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 576 с.
20. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1980. 324 с.

## REFERENCES

- [1] Sheshenin S.V. Asymptotic Analysis for Periodic in Plane Plates. *Izv. RAN. MTT* [Proc. of the Russ. Acad. Sci. Mech. Rigid Body], 2006, no. 6, pp. 71–79 (in Russ.).
- [2] Sheshenin S.V., Khodos O.A. Effective Stiffness of Corrugated Plates. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnoi sredy* [Computational Continuum Mechanics], 2011, vol. 4, no. 2, pp. 128–139 (in Russ.).
- [3] Kohn R.V., Vogelyus M. A New Model of Thin Plates with Rapidly Varying Thickness. *Int. J. Solids and Struct.*, 1984, vol. 20, no. 4, pp. 333–350.
- [4] Panasenko G.P., Reztsov M.V. Averaging the Three-Dimensional Problem of Elasticity Theory in an Inhomogeneous Plate. *Dokl. AN SSSR* [Reports of Acad. Sci. USSR], 1987, vol. 294, no. 5, pp. 1061–1065 (in Russ.).
- [5] Levinski T., Telega J.J. Plates, laminates and shells. Asymptotic Analysis and Homogenization. Singapore, London, World Sci. Publ., 2000. 739 p.
- [6] Kolpakov A.G. Homogenized Models for Thin-Walled Nonhomogeneous Structures with Initial Stresses. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004. 228 p.
- [7] Dimitrienko Yu.I. Asymptotic Theory of Multilayer Thin Plates. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2012, no. 3, pp. 86–100 (in Russ.).
- [8] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. Asymptotic Theory of Thermoelasticity of Multilayer Composite Plates. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii* [Composite Mechanics and Design], 2014, vol. 20, no. 2, pp. 259–282.

- [9] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sbornschikov S.V. Asymptotic Theory of Constructive-Orthotropic Plates with Two-Periodic Structures. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody* [Mathematical Modeling and Computational Methods], 2014, no. 1, pp. 36–57 (in Russ.).
- [10] Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. Comparison Analysis of Asymptotic Theory of Multilayer Composite Plates and Three-Dimensional Theory of Elasticity. *Jelekt. nauchno-tekh. izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii"* [El. Sc.-Tekh. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2013, iss. 12. Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html>
- [11] Dimitrienko Yu.I., Fedonyuk N.N., Gubareva E.A., Sbornschikov S.V., Prozorovskiy A.A., Erasov V.S., Yakovlev N.O. Modeling and Development of Three-Layer Sandwich Composite Materials with Honeycomb Core. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 5, pp. 66–82 (in Russ.).
- [12] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Fedonyuk N.N., Yakovlev D.O. A Method of Calculation of Energy Dissipation in Hybrid Composite Structures. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinostr.* [Proc. Univ., Mech. Eng.], 2014, no. 11. pp. 23–34 (in Russ.).
- [13] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Fedonyuk N.N., Sbornschikov S.V. Modeling of Elastic-Dissipative Properties of Laminated Fibrous Composites. *Jelekt. nauchno-tekh. izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii"* [El. Sc.-Techn. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2014, no. 4 (28). Available at: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/material/1234.html>
- [14] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sbornschikov S.V., Fedonyuk N.N. Simulation of Viscoelastic Properties of Fibrous Laminated Polymer Composite Materials. *Jelekt. nauchno-tekh. Izd. "Nauka i obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. Science and Education], 2014, no. 11. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/734246.html> DOI: 10.7463/1114.0734246
- [15] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. Asymptotic Theory of Viscoelastic Multilayer Thin Composite Plates. *Jelekt. nauchno-tekh. izd. "Nauka i obrazovanie"* [El. Sc.-Tech. Publ. Science and Education], 2014, no. 10, pp. 359–382. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/730105.html> DOI: 10.7463/1014.0730105
- [16] Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. Asymptotic Theory of Thermocreeep for Multilayer Thin Plates. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody* [Mathematical Modeling and Computational Methods], 2014, no. 4, pp. 36–57 (in Russ.).
- [17] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 t. T. 4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela [Continuum mechanics. In 4 Vol. Vol. 4. Fundamentals of Solid Mechanics]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2013, 624 p.
- [18] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoi sredy. V 4 t. T. 1 Tenzornyi analiz [Continuum Mechanics. In 4 vol. Vol. 1. Tensor analysis]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ. 367 p.
- [19] Dimitrienko Yu.I. Tenzornoye ischislenie [Tensor Calculus]. Moscow, Vish. shk. Publ., 2001. 576 p.
- [20] Alfutov N.A., Zinoviev P.A., Popov B.G. Raschet mnogosloynnih plastin i obolochek iz kompozitsionnih materialov [Calculation of Multilayer Composite Plates and Shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 324 p.

Статья поступила в редакцию 26.02.2015

Димитриенко Юрий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Научно-образовательного центра “Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов” МГТУ им. Н.Э. Баумана, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Dimitrienko Yu.I. — D.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Director of the Scientific-Educational Center for Supercomputer Engineering Modeling and Program Software Development, Bauman Moscow State Technical University. Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Губарева Елена Александровна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Gubareva E.A. — Ph.D. (Phys.-Math.), Associated Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics. Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Яковлев Дмитрий Олегович — аспирант кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Yakovlev D.O. — Ph.D. student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Bauman Moscow State Technical University. Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

#### **Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Яковлев Д.О. Асимптотическая теория гармонических колебаний многослойных тонких упругих пластин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 6. С. 99–120.

#### **Please cite this article in English as:**

Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yakovlev D.O. Asymptotic theory of harmonic vibration of multilayer thin elastic plates. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 6, pp. 99–120.