

DOI: 10.18698/1812-3368-2015-6-25-39

УДК 537.68

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМАЛИЗМА МОНОПОЛЕЙ ДИРАКА В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ МАГНЕТИЗМА

**И.Н. Алиев, И.С. Копылов**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: i.s.kopylov@yandex.ru

*Предложена возможность детального описания магнитного поля в терминах магнитных зарядов. Выявлены различия в понимании двух характеристик магнитного поля в веществе — напряженности и индукции. Подробно рассмотрено введение понятия магнитного скалярного потенциала. Обсуждены недостатки применения в электромагнетизме системы единиц СИ по сравнению с классическими абсолютными системами. Рассмотрены некоторые задачи магнитостатики, при решении которых используются понятия скалярного магнитного потенциала и магнитных зарядов. В частности, выведены скалярные магнитные потенциалы для поля, создаваемого тонкой гибкой намагниченной нитью, и поля магнита, представляющего собой тонкую гибкую поверхность. При вычислении последнего представлен расчет градиента телесного угла. Обсуждена связь между характеристиками магнитного поля и возможность их экспериментальной регистрации. Модифицированы уравнения Максвелла с учетом плотности и плотности тока магнитных и поляризационных электрических зарядов. Полученные уравнения сведены к комплексной симметричной форме. Изложены возникающие трудности при подобном подходе.*

**Ключевые слова:** магнитные монополи, уравнения Максвелла, магнитостатика, магнитодинамика.

## USE OF DIRAC MONOPOLES FORMALISM IN SOME MAGNETISM PROBLEMS

**I.N. Aliev, I.S. Kopylov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: i.s.kopylov@yandex.ru

*The paper gives a detailed description of the magnetic field in terms of magnetic charges. There are differences in understanding intensity and induction as two magnetic field characteristics in a substance. The introduction of a term 'magnetic scalar potential' is thoroughly explained. The authors describe some limitations in the use of SI system of units in electromagnetism in comparison with the classical absolute systems of units. Some problems of magnetostatics are presented, which are solved with the help of such terms as a magnetic scalar potential and magnetic charges. In particular, the magnetic scalar potentials are determined both for the field produced by a magnetized flexible thin filament and the field of a magnet representing a thin flexible plate. In calculating the latter, an estimation of a solid angle gradient is performed. The authors also discussed the correlation between the magnetic field characteristics and the possibility of their experimental registration. Maxwell*

*equations are modified considering the current density of both magnetic and polarized electric charges. The obtained equations are reduced to a complex symmetric form. The drawbacks of this approach are discussed.*

**Keywords:** magnetic monopoles, Maxwell equations, magnetostatics, magnetodynamics.

Магнитные заряды и магнитные токи реально не существуют, точнее пока не обнаружены. Гипотеза Дирака о существовании в природе магнитных зарядов так называемых магнитных монополей экспериментально не подтверждена, но попытки их обнаружения неоднократно предпринимались и продолжаются до сих пор. Цель настоящей статьи заключается в попытке показать, как работают эти понятия в некоторых задачах магнитостатики и магнитодинамики. На примерах рассмотрено, что получаемые при этом результаты имеют достаточно прозрачный физический смысл. Предпринята попытка “сшивки” всех возможных моделей магнетизма и электричества в рамках расширенного варианта уравнений Максвелла в комплексной форме.

Традиционно описание магнитного поля в веществе начинается с введения понятия намагниченности. Спонтанная (постоянные магниты) или индуцированная магнитная поляризация описывается объемной плотностью магнитной поляризации (намагниченностью)  $\vec{M}(\vec{r})$  — магнитного момента единицы объема вещества. Затем вводят напряженность  $\vec{H}(\vec{r})$  и индукцию  $\vec{B}(\vec{r})$  магнитного поля, причем в ненамагничивающейся среде или в пустоте они связаны простым соотношением  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , где  $\mu_0$  — некоторый размерностный постоянный коэффициент, выбор которого связан с системой единиц. Что касается выражения для магнитной поляризации, то в самом общем виде (в приближении линейной электродинамики) оно имеет вид  $\vec{M}(\vec{r}) = \vec{M}_0(\vec{r}) + \chi_m(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r})$ ,  $\vec{M}_0(\vec{r})$  — спонтанная магнитная поляризация (связанная с постоянными магнитами), второе слагаемое этого уравнения описывает индуцированную магнитную поляризацию ( $\chi_m(\vec{r})$  — коэффициент магнитной восприимчивости). Тогда связь между характеристиками поля примет следующий вид:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 (\vec{M}_0 + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_0 = \mu \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_0,$$

где намагниченность, а следовательно, и все магнитные свойства вещества сводятся к феноменологической характеристике — магнитной проницаемости  $\mu = 1 + \chi_m$ .

Существуют еще два подхода, используемых при дальнейшем построении теории магнетизма в веществе. Если принять, что образец представляет собой совокупность молекулярных токов с объемной ( $\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \vec{M}$ ) и поверхностной ( $\vec{i}_{\text{мол}} = [\vec{M}, \vec{n}]|_s$ ,  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности) плотностями, то создаваемое

этим токми по закону Био-Савара магнитное поле характеризуется магнитной индукцией  $\vec{B}$ .

В рамках работы более подробно рассмотрим случай, когда намагниченность  $\vec{M}$ , характеризующую намагниченный образец, можно полагать связанной с совокупностью магнитных зарядов, причем поле, создаваемое этими зарядами по магнитному закону Кулона, есть напряженность  $\vec{H}$ . Следует отметить, что в классической физической литературе существует устаревшее понятие о векторе  $\vec{H}$ , как о характеристике магнитной “силы”, а о векторе  $\vec{B}$  — как магнитного “потока” [1].

Введение понятия магнитных зарядов означает, что при расчете магнитного поля, создаваемого постоянными магнитами, могут быть применены методы и понятия, заимствованные из электростатики, по полной аналогии с которой будут вводиться все величины, используемые в настоящей работе. Учитывая, что электрическими зарядами создается электрическое поле, аналогично при расчетах магнитных статических полей вводится вспомогательное формальное понятие магнитных зарядов, которые в отличие от электрических, реально не существуют (отсутствует экспериментальное подтверждение). Для тел, обладающих намагниченностью, можно ввести понятия объемной ( $\rho_m$ ) и поверхностной ( $\sigma_m$ ) плотности магнитных зарядов. Объемная плотность связана с неоднородным распределением намагниченности по объему тела, поверхностная — со скачком нормальной компоненты намагниченности на поверхности раздела. Тогда по аналогии с введенным в электростатике понятием поляризованных зарядов через намагниченность определим объемную ( $\rho_m = -\text{div } \vec{M}$ ) и поверхностную ( $\sigma_m = M_n|_s$ ) плотности магнитных зарядов. Ранее в литературе величину  $\rho_m$  — магнитный аналог плотности “связанных зарядов” — часто называли “магнитным флюидом” Пуассона (в оригинале “ideal magnetic matter” [2]).

Разберем как работает предложенный метод в магнитостатике. Для этого предположим, что магнитное поле создается именно магнитными зарядами, причем намагниченность может быть как наведенной, так и спонтанной (постоянные магниты). Далее введем понятие точечного магнитного заряда  $g$ . В этом случае плотность магнитных зарядов запишется следующим образом:  $\rho_m(\vec{r}) = g\delta(\vec{r})$ . Следовательно (с учетом сферической симметрии),

$$\int_V \rho_m(\vec{r}') dV' = \int_V g\delta(\vec{r}') dV' = \int_V g \frac{\delta(r')}{4\pi r'^2} 4\pi r'^2 dr' = g.$$

При интегрировании были использованы следующие свойства  $\delta$ -функции. В сферической системе координат  $\delta$ -функция определяется

как

$$\delta(\vec{r} - \vec{a}) = \frac{\delta(r - a) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)}{r^2 \sin \theta},$$

подобный выбор связан с условием нормировки  $\int_V \delta(\vec{r} - \vec{a}) dV = 1$ ,

$\vec{a} \in V$ . При переходе к  $\vec{a} = 0$   $\delta$ -функция становится одномерной  $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r) = -\frac{1}{4\pi r} \delta'(r)$  (так как  $\delta(r) = -r \delta'(r)$ , что легко проверяется интегрированием по частям).

В соответствии с введенным понятием магнитного заряда однозначно (как и в случае электрического поля) вытекает существование скалярного магнитного потенциала

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_m(\vec{r}')}{R} dS', \quad (1)$$

где  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$  – расстояние между точкой наблюдения  $\vec{r}$  и точками  $\vec{r}' \in V$ , расположенными внутри намагниченной среды (тела). В этом случае напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  записывается через  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\nabla\psi = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \psi(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_m(\vec{r}')}{R} dS' \right\} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \rho_m(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \frac{1}{R} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma_m(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dS' = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_V \rho_m(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma_m(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dS'. \quad (2) \end{aligned}$$

С учетом того, что  $\Delta_r \frac{1}{R} = -4\pi \delta(\vec{R})$  для  $\vec{r} \in V$  получаем уравнение Пуассона:

$$\begin{aligned} \Delta_r \psi &= \Delta_r \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\vec{r}')}{R} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\sigma_m(\vec{r}')}{R} dS' \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V \rho_m(\vec{r}') \left( -4\pi \delta(\vec{R}) \right) dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma_m(\vec{r}') \left( -4\pi \delta(\vec{R}) \right) dS' = \\ &= -\int_V \rho_m(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) dV' - \oint_S \sigma_m(\vec{r}') \delta(\vec{r}' - \vec{r}) dS' = \\ &= -\rho_m(\vec{r}) - \sigma_m(\vec{r}) = -\rho_m(\vec{r}). \quad (3) \end{aligned}$$

Если  $\vec{r} \in V$ , то  $\rho_m = 0$  и  $\sigma_m = 0$ , следовательно, записываем уравнение Лапласа  $\Delta\psi = 0$ . Возникший в уравнениях (1) и (2) специфический коэффициент  $1/(4\pi)$  связан с тем, что в настоящей работе использована Международная система единиц (СИ), хотя, как нам кажется, в разделах физики, непосредственно связанных с электромагнетизмом, наиболее целесообразно было применять абсолютную (гауссову) систему единиц, поскольку последняя гораздо больше соответствует современным представлениям о природе электромагнитных явлений. Электрическое и магнитное поля связаны между собой, кроме того, их можно считать двумя симметричными характеристиками одного и того же физического объекта. При этом размерности всех величин (напряженности и индукции этих полей) разные, что само по себе уже противостоит природе. Для преодоления этого несоответствия и приходится вводить искусственные коэффициенты (типа  $1/(4\pi)$ ), о чем уже упоминалось выше), обсуждение физического смысла которых продолжается и в настоящее время. Особенно это проявляется при введении понятия скалярного магнитного потенциала и соответствующего нормирующего множителя. Дело еще в том, что понятие скалярного магнитного потенциала вводится и обсуждается в книгах и статьях по теоретической физике, квалифицированные авторы которых, как правило, придерживаются абсолютной системы, в которой получаемые результаты выглядят более естественным образом и поэтому работа с этими разделами в системе СИ постоянно приводит к подбору необходимых коэффициентов. В связи с изложенным выше возникают следующие вопросы. В чем физический смысл и отличие векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ ? Почему магнитное поле в намагниченной среде характеризуется не одним, а сразу двумя векторами? Часто на эти вопросы отвечают так, как на них ответил В. Томсон [3], и говорят, что  $\vec{B}$  — вектор, определяющий силу, действующую на точечный магнитный заряд  $g$ , помещенный в полость, вырезанную в намагничивающейся среде в виде бесконечно тонкого диска перпендикулярно силовой линии. Указанная сила равна  $\vec{F} = g\vec{B}$ . Вектор  $\vec{H}$  — вектор, определяющий силу, действующую на точечный магнитный заряд  $g$ , помещенный в полость в виде бесконечно тонкого длинного цилиндра, который вырезан в намагничивающейся среде вдоль магнитной силовой линии. В этом случае сила равна  $\vec{F} = g\vec{H}$  (рис. 1).

Такой ответ на поставленные вопросы, разумеется, нельзя полагать полным, хотя он и указывает на простые экспериментальные способы измерения векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$  внутри намагничивающейся среды. Здесь и далее речь идет о магнитных зарядах, как о физически реально существующих вещах. При этом необходимо иметь в виду, что это связанные магнитные заряды. Свободных магнитных зарядов не

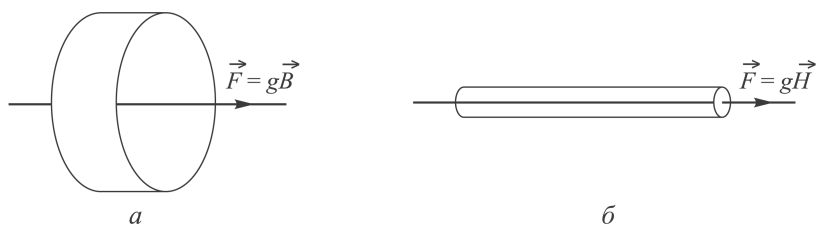


Рис. 1. Схемы экспериментального способа измерения векторов  $\vec{H}$  (а) и  $\vec{B}$  (б)

существует. Данный факт однозначно следует из системы уравнений Максвелла.

Со связанными магнитными зарядами вполне можно экспериментировать, как это показал еще Кулон, который экспериментально установил закон для взаимодействия магнитных зарядов. Для этого достаточно использовать тонкую длинную однородно намагниченную спицу. Можно принять, что удаленные друг от друга концы спицы несут равные и противоположные, почти точечные, магнитные заряды, в результате этих экспериментов можно записать закон Кулона для магнитных зарядов в виде:  $F = k' \frac{g_1 g_2}{r^2}$ , где  $k'$  — коэффициент, выбор которого вновь зависит от принятой системы единиц. Таким образом, мы видим, что в областях пространства, где отсутствуют сторонние электрические токи, намагниченность образца можно охарактеризовать либо полем векторов намагниченности, либо эквивалентным ему распределением объемных и поверхностных магнитных зарядов. При этом статическое магнитное поле является потенциальным и может быть описано с помощью магнитного скалярного потенциала. Особенно удобно использование этого подхода при расчете полей создаваемых постоянными магнитами, что рассмотрено далее. Обратим особое внимание на то, что логически очевидное представление магнитного скалярного потенциала как в научной, так и в учебной литературе не столь широко распространено в отличие от симметричного ему базового в теории электричества понятия электрического потенциала.

Учет токов проводится следующим образом. В этом случае намагниченность образца можно охарактеризовать либо векторным полем намагниченности  $\vec{M}$ , либо эквивалентным ему распределением объемных и поверхностных молекулярных токов  $\vec{j}_{\text{мол}}$  и  $\vec{i}_{\text{мол}}$ . Тогда можно записать основные уравнения магнитостатики как следствие исходных эмпирических законов Кулона и Био-Савара. Приведем уравнения, определяющие характеристики статических магнитных полей:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H} &= \vec{j}; \\ \text{div } \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

С учетом  $\vec{B}/\mu_0 = \vec{H} + \vec{M}$  и  $\vec{j}_{\text{мол}} = \text{rot } \vec{M}$  легко получаются уравнения,

которым подчиняется магнитная индукция:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_{\text{полн}}; \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь  $\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{мол}}$ , откуда следует, что единственным источником магнитного поля  $\vec{B}$  является полный электрический ток, который есть сумма обычного тока проводимости, текущего в среде, предлагаемой электропроводящей, и молекулярного тока. Для вектора  $\vec{H}$  с учетом  $\rho_m = -\operatorname{div} \vec{M}$  получается система

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}; \\ \operatorname{div} \vec{H} &= \rho_m,\end{aligned}$$

из которой следует, что источниками магнитного поля  $\vec{H}$  являются связанные магнитные заряды и токи проводимости.

Анализируя приведенные системы, можно попытаться сформулировать физический смысл магнитных векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  следующим образом. Какое из этих магнитных полей следует полагать истинным магнитным полем намагниченного образца? Часто на этот вопрос в современной физической литературе отвечают так. Намагниченность образца согласно гипотезе Ампера — это проявление имеющихся внутримолекулярных и внутриатомных электрических токов, т.е. в конечном счете намагниченность связана с магнетизмом токов. Поэтому магнитное поле  $\vec{B}$  — истинное магнитное поле, имеющее реальный физический смысл, в то время как магнитное поле  $\vec{H}$  внутри образца физического смысла не имеет. Это формальное математическое поле. Такой категоричный ответ, по-видимому, не верен, поскольку с атомно-молекулярной точки зрения кроме магнетизма внутримолекулярных и внутриатомных электрических токов существует магнетизм спиновых магнитных дипольных моментов электронов и атомных ядер. Последний, как известно, к магнетизму электрических токов свести нельзя. Для того чтобы ответить на вопрос о том, как следует определять истинное магнитное поле внутри намагничивающегося материала, необходимо покинуть феноменологический подход и заняться выяснением в каждой конкретной ситуации микроскопической атомно-молекулярной физической природы вектора намагничивания  $\vec{M}$ . Только так можно надеяться понять истинную физику векторов  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ .

Рассмотрим задачи магнитостатики, при решении которых будем использовать понятия скалярного магнитного потенциала и магнитных зарядов.

1. Сначала напомним решение хорошо известной задачи о магнитном диполе, записав ее через объемную плотность магнитных зарядов.

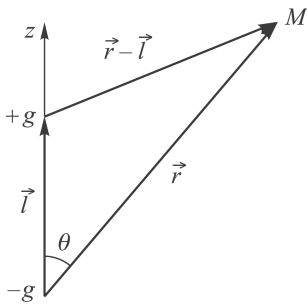


Рис. 2. Схема к выводу напряженности поля магнитного диполя

Найдем магнитный потенциал и напряженность магнитного поля, создаваемого на больших расстояниях магнитной стрелкой с магнитным дипольным моментом  $\vec{m}$ . Исходя из (1), получим выражение для скалярного магнитного потенциала точечного магнитного заряда

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dV' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{g\delta(\vec{r}' - \vec{l})}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dV' = \frac{g}{4\pi r}. \end{aligned}$$

Применим этот результат к вычислению поля магнитного диполя — двух магнитных разноименных зарядов, разнесенных вектором  $\vec{l}$  (рис. 2):

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{g}{4\pi |\vec{r} - \vec{l}|} - \frac{g}{4\pi r}; \\ |\vec{r} - \vec{l}|^{-1} &= [(\vec{r} - \vec{l}, \vec{r} - \vec{l})]^{-\frac{1}{2}} = [r^2 - 2\vec{r}\vec{l} + l^2]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{2\vec{r}\vec{l}}{r^2} + \dots \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r}\vec{l}}{r^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{l}}{r^3}; \\ \psi &= \frac{g}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{l}}{r^3} \right) - \frac{g}{4\pi r} = \frac{g}{4\pi} \frac{\vec{r}\vec{l}}{r^3}. \end{aligned}$$

Согласно стандартной процедуре, введем магнитный дипольный момент  $\vec{m} = g\vec{l}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\vec{m}\vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2} = \frac{mz}{4\pi r^3}; \quad \vec{H} = -\nabla\psi; \quad H_x = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{mz}{4\pi} \frac{3xz}{r^5}; \\ H_y &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{mz}{4\pi} \frac{3yz}{r^5}; \quad H_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{m}{4\pi r^3} + \frac{m}{4\pi} \frac{3z^2}{r^5}. \end{aligned}$$

Объединим все компоненты вектора  $\vec{H}$ :

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\frac{\vec{m}}{4\pi r^3} + \frac{3(\vec{m}, \vec{r})\vec{r}}{4\pi r^5}; \quad H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2 = \left(\frac{m}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{3z^2}{r^8} + \frac{1}{r^6}\right); \\ H &= \frac{m}{4\pi r^3} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Схема силовых линий, описываемых полученными уравнениями, показана на рис. 3.



2. Применим полученные результаты к нахождению поля постоянного магнита, представляющего собой тонкую гибкую нить конечной длины. Во всех точках нити переменный вектор намагниченности  $\vec{M}$  направлен по касательной к ней. Примем, что имеет место постоянство произведения  $MS = g = \text{const}$ , где  $S$  — площадь поперечного сечения в соответствующей точке нити. Последняя комбинация взята для наглядности трактовки

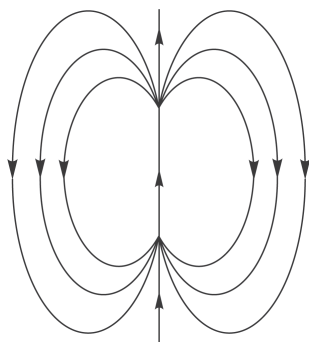


Рис. 3. Схема силовых линий магнитного поля, созданного магнитным диполем

полученных результатов. Магнитный момент элементарного объема  $dV$  равен  $dm = MdV = MSdl = gdl$ . В векторном виде  $d\vec{m} = gdl\vec{l}$ .

Тогда с учетом результата, полученного в задаче 1:  $d\psi = \frac{\vec{r}d\vec{m}}{4\pi r^3} = \frac{g\vec{r}d\vec{l}}{4\pi r^3}$ .

Полный потенциал вычисляется по формуле:  $\psi = \frac{g}{4\pi} \int_L \frac{\vec{r}d\vec{l}}{r^3}$ , где интегрирование ведется вдоль всей нити длиной  $L$ :

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{g}{4\pi} \int_L \left( \nabla \left( \frac{1}{r} \right), d\vec{l} \right) = -\frac{g}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} dl \frac{d}{dl} \left( \frac{1}{r} \right) = \\ &= \frac{g}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{g}{4\pi r_1} - \frac{g}{4\pi r_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, скалярный потенциал магнитного поля не зависит от конкретной формы нити, а эквивалентен магнитному полю двух точечных магнитных зарядов, расположенных на ее начальном и конечном торцах.

3. Рассмотрим постоянный магнит, представляющий собой тонкую гибкую поверхность, ограниченную замкнутым контуром  $C$ . Во всех точках поверхности переменный вектор намагничивания  $\vec{M}$  направлен по нормали к ней, причем имеет место постоянство произведения  $Mh = I = \text{const}$ , где  $h$  — толщина поверхности в соответствующей точке. Магнитный момент элементарного участка поверхности  $dS$  равен  $dm = MhdS = IdS$ . В векторном виде  $d\vec{m} = Id\vec{S}$ . Тогда с учетом результата, полученного в задаче 1, имеем  $d\psi = \frac{\vec{r}d\vec{m}}{4\pi r^3} = \frac{I\vec{r}d\vec{S}}{4\pi r^3}$ . Отметим, что вектор  $\vec{r}$  направлен от элемента поверхности  $dS$  в точку наблюдения.

4. Далее удобнее ввести противоположный вектор  $\vec{r}_1 = -\vec{r}$ , направленный от фиксированной точки наблюдения к переменной точке

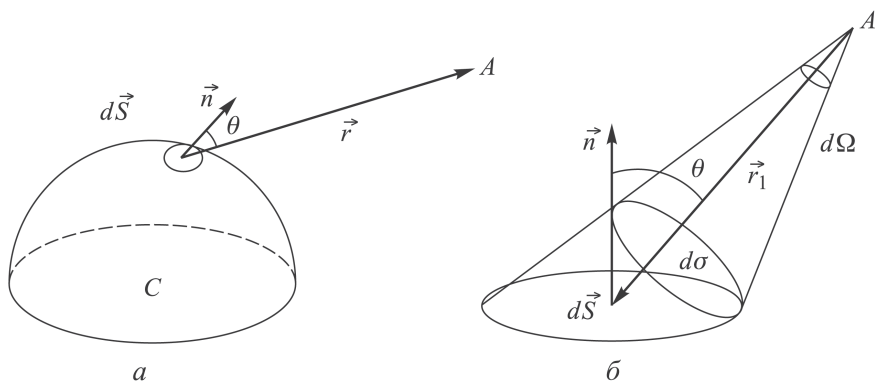


Рис. 4. Схемы к выводу поля магнитной поверхности

поверхности. Следовательно (рис. 4),

$$d\sigma = dS \cos \theta; \quad d\Omega = \frac{d\sigma}{r_1^2} = dS \frac{\cos \theta}{r_1^2} =$$

$$= -dS \frac{\cos(\pi - \theta)}{r_1^2} = -dS \frac{(\vec{n}, \vec{r}_1)}{r_1^3} = -\frac{(d\vec{S}, \vec{r}_1)}{r_1^3}.$$

Тогда  $d\psi = \frac{I}{4\pi} \frac{(\vec{r}_1, d\vec{S})}{r_1^3} = -\frac{I}{4\pi} d\Omega$   $\psi = -\frac{I}{4\pi} \Omega$ , где  $\Omega$  – телесный угол, образованный с центром в точке наблюдения и опирающийся на искомый контур. Таким образом, установлено, что магнитный скалярный потенциал в рассматриваемой задаче не зависит от формы поверхности, а зависит только от пространственного расположения ограничивающей поверхность контура. Напряженность магнитного поля вычисляется стандартно:  $\vec{H} = -\nabla\psi = \frac{I}{4\pi} \nabla\Omega$ . Для определения градиента телесного угла воспользуемся следующей процедурой. Сместим точку наблюдения на некоторый малый вектор  $\delta\vec{s}$  и вычислим изменение телесного угла. Из определения градиента можно записать:  $d\Omega = (\nabla\Omega, \delta\vec{s})$ . Полагая точку наблюдения неподвижной, все элементы  $d\vec{l}$  контура смещаются на одинаковый вектор  $-\delta\vec{s}$ , причем каждый из них описывает площадь  $d\vec{S} = -[\delta\vec{s}, d\vec{l}]$ . Следовательно, изменение телесного угла, связанное с дополнительным изменением поверхности, на которую опирается этот угол, равно

$$d\Omega = -\oint_C \frac{(-[\delta\vec{s}, d\vec{l}], \vec{r})}{r^3} = \oint_C \frac{([\vec{d}\vec{l}, \vec{r}], \delta\vec{s})}{r^3} = \left( \delta\vec{s}, \oint_C \frac{[\vec{d}\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \right).$$

Сравнивая два выражения для малого изменения телесного угла, полу-

чаем:  $\nabla\Omega = \oint_C \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$ . Откуда запишем выражение  $\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$ , согласно которому полученное магнитное поле поверхности можно определить по закону Био-Савара, полагая, что ток  $I$  протекает по замкнутой кривой, на которую опирается рассматриваемая поверхность, причем направление тока и внешней нормали согласованы.

Выше были рассмотрены некоторые задачи магнитостатики. Модифицируем уравнения Максвелла, включив в них объемную плотность и плотность тока магнитных зарядов. Как было отмечено, объемная плотность магнитных зарядов связана с намагниченностью соотношением  $\rho_m = -\operatorname{div} \vec{M}$ . Примем, что для магнитных зарядов по аналогии с электрическими выполняется уравнение непрерывности  $\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0$ . Тогда  $\operatorname{div} \vec{j}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{M}$ , откуда с точностью до несущественного постоянного слагаемого имеем  $\vec{j}_m = \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}$ . Последнее соотношение можно полагать определением плотности тока магнитных зарядов. Таким образом, можно преобразовать систему уравнений Максвелла к виду

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}); & \operatorname{div} \vec{H} &= -\operatorname{div} \vec{M} = \rho_m; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} [\mu_0 (\vec{H} + \vec{M})] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \vec{M} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu_0 \vec{j}_m. \end{aligned}$$

Окончательно запишем полную систему уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{H} &= \rho_m; \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_e; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu_0 \vec{j}_m; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_e. \end{aligned}$$

Для того чтобы записать полученную систему в терминах комплексного векторного поля необходимо разобраться в динамике поляризованных зарядов. Запишем соотношения, связывающие электрическое смещение и объемную плотность связанных зарядов с поляризованностью  $\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_p$ ,  $\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})$ , и подставим их в полученную систему

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}_e + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \vec{j}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) &= \rho_e.\end{aligned}$$

Полагая, что для электрически поляризованных зарядов выполняется закон сохранения  $\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_p = 0$ , по аналогии с магнитными зарядами определяем  $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ . Полученный результат можно объяснить следующим образом: если поляризованность в некоторой точке меняется со временем, то это можно трактовать как ток поляризованных зарядов от этой точки (или к ней). Видоизмененная система уравнений Максвелла приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{j}_m; \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}_e + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \vec{j}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}_p; \\ \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} &= \rho_e + \rho_p; \\ \operatorname{div} \vec{H} &= \rho_m.\end{aligned}$$

Второе уравнение умножим на мнимую единицу  $i$ , четвертое — на  $i/c$  и попарно их сложим:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \operatorname{rot} \varepsilon_0 \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{j}_m; & c \operatorname{rot} \varepsilon_0 \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{j}_m; \\ ic \operatorname{rot} \frac{\vec{H}}{c} &= i \vec{j}_e + i \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + i \vec{j}_p; & c \operatorname{rot} \frac{i}{c} \vec{H} &= i \vec{j}_e + i \frac{\partial \varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t} + i \vec{j}_p; \\ \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} &= \rho_e + \rho_p; & \operatorname{div} \varepsilon_0 \vec{E} &= \rho_e + \rho_p; \\ \operatorname{div} \frac{i}{c} \vec{H} &= \frac{i}{c} \rho_m; & \operatorname{div} \frac{i}{c} \vec{H} &= \frac{i}{c} \rho_m;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{crot} \left( \varepsilon_0 \vec{E} + \frac{i}{c} \vec{H} \right) &= i \frac{\partial \varepsilon_0 \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} i \vec{j}_e + i \vec{j}_p - \frac{1}{c} \vec{j}_m; \\ \operatorname{div} \left( \varepsilon_0 \vec{E} + \frac{i}{c} \vec{H} \right) &= \rho_e + \rho_p + \frac{i}{c} \rho_m.\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что диэлектрические свойства среды (традиционно описываемые электрической проницаемостью  $\varepsilon$ ) уже учтены в вводимых понятиях объемной плотности  $\rho_p$  и плотности тока  $\vec{j}_p$  поляризованных зарядов, можно задать универсальные комплексные

характеристики (в рассматриваемом случае  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ ):

$$\vec{F} = \vec{D} + \frac{i}{c} \vec{H}; \quad \rho^* = \rho_e + \rho_p + \frac{i}{c} \rho_m; \quad \vec{j}^* = \vec{j}_e + \vec{j}_p + \frac{i}{c} \vec{j}_m.$$

Окончательно получаем искомые уравнения Максвелла в комплексном виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= i \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + i \vec{j}^*; \\ \text{div } \vec{F} &= \rho^*. \end{aligned} \tag{4}$$

Подобная запись уравнений Максвелла через комплексные характеристики позволяет ввести 4-тензор поля и 4-тензор тока, что показано в работах [4, 5]. Отметим, что неучет слагаемых, связанных с поляризационно-диэлектрическими эффектами, приводит к досадным недоразумениям при выписывании системы (3) [6]. Некоторая некорректность в записи решения связана, видимо, с тем, что в подавляющем числе классических работ расчеты проводились в абсолютной системе единиц и при переходе к изложению в системе СИ таких нетрадиционных разделов, как электромагнитная теория монополей, возникают трудности с коэффициентами.

Попытка к трем парам плотностей зарядов и токов:  $(\vec{j}_e, \rho_e)$   $(\vec{j}_p, \rho_p)$   $(\vec{j}_m, \rho_m)$  добавить объемную плотность  $\vec{j}_{\text{МОЛ}}$ , присовокупив к ней формальную плотность  $\rho_{\text{МОЛ}}$ , не приводит к понятным физическим результатам ввиду  $\frac{\partial \rho_{\text{МОЛ}}}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}_{\text{МОЛ}} = -\text{div rot } \vec{M} = 0$ .

Это обстоятельство указывает на то, что в рамках рассматриваемого подхода не удастся свести к единой модели законы Кулона и Био-Савара, хотя природа магнетизма, естественно, общая и, поэтому не очень ясно, почему не удастся, хотя бы чисто формально, не ввести в полученные уравнения дополнительную пару  $(\vec{j}_{\text{МОЛ}}, \rho_{\text{МОЛ}})$ . Видимо здесь требуется дополнительное исследование с ревизией базовых понятий.

В заключение отметим, что рассматриваемые вопросы в течение длительного времени постоянно находятся в поле зрения исследователей, начиная с пионерской работы [7], в которой были собраны большинство из известных к тому времени результатов по обсуждаемой проблеме до самых современных [8–13]. Авторы понимают, что некоторые положения предлагаемой работы являются дискуссионными и поэтому будут признательны за любые замечания по сути изложения. Авторы также будут благодарны всем читателям, которые, невзирая на все более купиремый курс физики в МГТУ им. Н.Э. Баумана, сохранили интерес к проблемам магнетизма в рамках фундаментальных физических понятий.

Авторы выражают благодарность В.В. Толмачёву, при обсуждении с которым работы [14] и родилась идея настоящего исследования, А.М. Макарову и А.Н. Морозову за постоянный интерес к работе, С.О. Юрченко, дискуссии с которым явно обогатили рассматриваемый материал.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 3.1526.2014/К).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Stratton J.A.* Electromagnetic Theory. N.Y.: McGraw-Hill, 1941.
2. *Green G.* Mathematical papers. London: MacMillan, 1871.
3. *Thomson K.W.* Reprint of papers on electrostatics and magnetism. 1872.
4. *Arbab A.I.* Complex Maxwell's equations // *Chinese Physics B*. 2013. Vol. 22. No. 3. P. 030301–1–030301-6.
5. *Макаров А.М., Лунева Л.А., Макаров К.А.* Система уравнений Максвелла как следствие специальной теории относительности // Необратимые процессы в природе и технике: Труды восьмой всероссийской конференции. 2015. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Ч. 1. С. 212–216.
6. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. Интеллект. Долгопрудный–2013. 381 с.
7. *Пановский В., Филлипс М.* Классическая электродинамика; пер. с англ. М.: ГИФМЛ, 1963. 432 с.
8. *Баряхтар В.Г., Богданов А.Н., Яблонский Д.А.* Физика магнитных доменов // УФН. 1988. Т. 156. Вып. 9. С. 47–92.
9. *Panat P.V.* A new derivation of Dirac's magnetic monopole strength // *European Journal of Physics*. 2003. Vol. 24. No. 2. P. 111–114.
10. *Kimball A. Milton.* Theoretical and experimental status of magnetic monopoles // *Reports on Progress in Physics*. 2006. Vol. 69. No. 6. P. 1637–1712.
11. *Сидоренков В.В.* Обобщение физических представлений о векторных потенциалах в классической электродинамике // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 1 (20). С. 28–37.
12. *Юрасов Н.И.* Нелокальная электродинамика и релятивистские инварианты // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 1 (58). С. 56–62.
13. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика; под ред. Э.Л. Бурштейна; пер. с англ. М.: Мир, 1965. 702 с.
14. *Llano M. de, Tolmachev V.V.* Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity // *Physica A*. 2003. Vol. 317. P. 546–564.

## REFERENCES

- [1] Stratton J.A. Electromagnetic Theory. N.Y., McGraw-Hill, 1941.
- [2] Green G. Mathematical papers. London, MacMillan, 1871.
- [3] Thomson K.W. Reprint of papers on electrostatics and magnetism, 1872.
- [4] Arbab A.I. Complex Maxwell's equations. *Chinese Physics B*, 2013, vol. 22, no. 3, pp. 030301–1–030301-6.
- [5] Makarov A.M., Luneva L.A., Makarov K.A. Maxwell's Equation System as a Consequence of Special Theory of Relativity. *Tr. 8-y Vseross. Konf. "Neobratimye protsessy v prirode i tekhnike"* [Proc. of the 8th national conference "Irreversible Processes in Nature and Technology"], 2015. MGTU im. N.E. Bauman. Part. 1, pp. 212–216 (in Russ.).

- [6] Belousov Yu.M., Burmistrov S.N., Ternov A.I. Zadachi po teoreticheskoy fizike [Problems in Theoretical Physics]. Dolgoprudnyy, Intellect Publ., 2013. 381 p.
- [7] Panofsky W.K.H., Phillips M. Classical electricity and magnetism. Cambridge, Addison-Wesley Publ., 1955.
- [8] Baryakhtar V.G., Bogdanov A.N., Yablonskiy D.A. The Physics of Magnetic Domains. *Usp. Fiz. Nauk* [Physics-Uspekhi], 1988, vol. 156, iss. 9, pp. 47–92 (in Russ.).
- [9] Panat P.V. A new derivation of Dirac's magnetic monopole strength. *European Journal of Physics*, 2003, vol. 24, no. 2, pp. 111–114.
- [10] Kimball A. Milton. Theoretical and experimental status of magnetic monopoles. *Reports on Progress in Physics*, 2006, vol. 69, no. 6, pp. 1637–1712.
- [11] Sidorenkov V.V. Generalization of Physical Notions about Vector Potentials in Classic Electrodynamics. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2006, no. 1 (20), pp. 28–37 (in Russ.).
- [12] Yurasov N.I. Nonlocal Electrodynamics and Relativistic Invariants. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 1 (58), pp. 56–62 (in Russ.).
- [13] Jackson John David. Classical Electrodynamics. New York–London–Sydney, John Wiley & Sons Ltd., 1962.
- [14] Llano M.de, Tolmachev V.V. Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of superconductivity. *Physica A*, 2003, vol. 317, pp. 546–564.

Статья поступила в редакцию 10.03.2015

Алиев Исмаил Новруз оглы — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Aliiev I.N. — D.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Копылов Иван Станиславович — студент МГТУ им. Н.Э. Баумана.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kopylov I.S. — student, Bauman Moscow State Technical University.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

### **Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Алиев И.Н., Копылов И.С. Использование формализма монополей Дирака в некоторых задачах магнетизма // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 6. С. 25–39.

### **Please cite this article in English as:**

Aliiev I.N., Kopylov I.S. Use of Dirac monopoles formalism in some magnetism problems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 6, pp. 25–39.