

ЭВОЛЮЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ**Л.К. Мартинсон, О.Ю. Чигирёва**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

e-mail: mathmod@bmstu.ru

Рассмотрена одномерная краевая задача для нелинейного уравнения теплопроводности в плоском слое, заполненном средой с объемным поглощением теплоты. Численные решения такой задачи для различных значений параметров с использованием стандартной разностной схемы подтверждают теоретические выводы о характере распространения тепловых возмущений. Установлено, что тепловые возмущения от нагретой стенки распространяются в нелинейной среде с объемным поглощением теплоты с конечной скоростью перемещения фронта. При определенных значениях параметров задачи также наблюдается эффект пространственной локализации возмущений, проникающих в среду на конечную глубину даже за бесконечный промежуток времени.

Ключевые слова: краевая задача нелинейной теплопроводности, эффект пространственной локализации тепловых возмущений.

EVOLUTION OF SPATIALLY LOCALIZED THERMAL PERTURBATIONS**L.K. Martinson, O.Yu. Chigireva**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

e-mail: mathmod@bmstu.ru

The article considers a one-dimensional boundary problem of the nonlinear heat conduction equation in a two-dimensional layer filled with a medium with bulk heat absorption. Numerical solutions to this problem for different characteristic values, while using a standard difference scheme, confirm the theoretical conclusions about the propagation mode of thermal perturbations. Thermal perturbations from the heated walls prove to propagate through the nonlinear medium with bulk heat absorption at the finite rate of the front propagation. An effect of spatial localization of thermal perturbations, which can even reach the finite depth for nonterminating time, is also observed at the defined values of the problem characteristics.

Keywords: boundary problem of nonlinear heat conduction, effect of spatial localization of thermal perturbations.

Введение. Изучение особенностей задач для нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа [1–3] показало, что нелинейности не только изменяют количественные характеристики процессов, описываемых такими уравнениями, но и качественно изменяют характер их протекания. В нелинейных процессах теплопроводности могут наблюдаться эффекты конечной скорости распространения и пространственной локализации тепловых возмущений [4, 5]. Именно эти нелинейные эффекты обуславливают необычный ход эволюции температурных полей в задачах, рассматриваемых ниже.

Физическая постановка задачи и математическая модель процесса. Рассмотрим задачу о нахождении нестационарного температурного поля $u(x, t)$ в плоском слое конечной толщиной l , заполненном средой, коэффициент теплопроводности λ которой изменяется в зависимости от температуры u по степенному закону $\lambda(u) = \lambda_0 u^\sigma$, где $\lambda_0 > 0$; $\sigma > 0$ – параметр нелинейной среды.

В начальный момент времени $t = 0$ температура слоя равна нулю. При $t > 0$ на поверхности $x = 0$ этого слоя поддерживается температура U_0 , а на поверхности $x = l$ – нулевая температура. Во внутренних точках слоя происходит поглощение теплоты, удельная мощность которой $f(u) = p_0 u^\alpha$, где $\alpha > 0$; $p_0 > 0$ – коэффициент поглощения.

Математическая модель процесса имеет вид

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} &= \lambda_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right] - p_0 u^\alpha, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < l; \\ u(0, t) &= U_0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ, c – плотность и удельная теплоемкость среды.

Согласно общей теории нелинейных тепловых процессов, при $\sigma > 0$ тепловое возмущение от нагретой поверхности $x = 0$ распространяется в виде тепловой волны с конечной скоростью перемещения ее фронта $x_*(t)$. Кроме того, при некоторых значениях параметра α в задаче (1) также наблюдается эффект пространственной локализации, когда тепловое возмущение от нагретой поверхности проникает в слой на конечную глубину L и не достигает поверхности $x = l$ даже при $t \rightarrow \infty$.

Фронт тепловой волны. Непосредственной проверкой можно убедиться в существовании точного стационарного решения дифференциального уравнения в задаче (1), имеющего вид

$$u_{st}(x) = \begin{cases} U_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\frac{2}{\sigma+1-\alpha}}, & x < L; \\ 0, & x \geq L. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь

$$L = \left[\frac{2U_0^{\sigma+1-\alpha} a^2 (\sigma + 1 + \alpha)}{p(\sigma + 1 - \alpha)^2} \right]^{\frac{1}{2}}; \quad (3)$$

$$a^2 = \lambda_0 / (\rho c), \quad p = p_0 / (\rho c).$$

Отметим, что формула (3) имеет смысл при $\alpha < \sigma + 1$. Форма профиля стационарного решения зависит от соотношения параметров σ и α . Качественный вид стационарных температурных профилей (2) в слое при заданном значении σ и различных значениях α представлен на рис. 1.

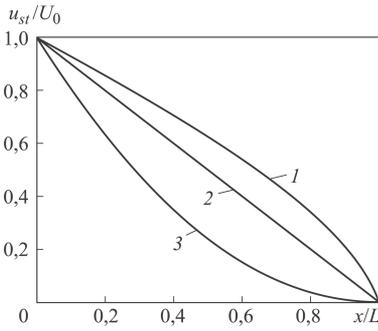


Рис. 1. Качественный вид стационарных температурных профилей в слое при $\sigma = 5/2$ и значениях $\alpha = 1/2$ (1), $3/2$ (2), $5/2$ (3)

Это позволяет записать приближенное решение задачи (1) в форме тепловой волны с конечной скоростью перемещения ее фронта

$$u(x, t) = \begin{cases} U_0 \left(1 - \frac{x}{x_*(t)}\right)^{\frac{2}{\sigma+1-\alpha}}, & 0 \leq x < x_*(t); \\ 0, & x_*(t) \leq x \leq l. \end{cases} \quad (4)$$

Для нахождения закона движения фронта тепловой волны запишем интегральное условие теплового баланса

$$\int_0^{x_*(t)} \frac{\partial u}{\partial t} dx = a^2 \int_0^{x_*(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left[u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx - p \int_0^{x_*(t)} u^\alpha(x, t) dx. \quad (5)$$

Подставим предполагаемую форму решения (4) в соотношение (5) и вычислим интегралы в обеих частях равенства (5). Учитывая, что на фронте $x = x_*(t)$ тепловой поток равен нулю, приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d(x_*^2(t))}{dt} = b_0 - b_1 x_*^2(t), \quad (6)$$

где $b_0 = 4U_0^\sigma a^2 \frac{\sigma + 3 - \alpha}{(\sigma + 1 - \alpha)^2}$; $b_1 = 2U_0^{\alpha-1} p \frac{\sigma + 3 - \alpha}{\sigma + 1 + \alpha}$.

Очевидно, что искомая функция должна удовлетворять начальному условию

$$x_*(0) = 0. \quad (7)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (6) и учитывая начальное условие (7), находим

$$x_*(t) = \sqrt{\frac{b_0}{b_1}} (1 - \exp(-b_1 t)).$$

Далее будем исследовать задачи, для которых $L < l$, когда в (1) наблюдается эффект пространственной локализации тепловых возмущений.

С учетом теорем сравнения, приведенных в работе [6], существование стационарного решения (2) означает следующее: для любого $t \in [0, \infty)$ решение задачи (1) мажорируется стационарным решением, т.е. $u(x, t) \leq u_{st}(x)$.

Принимая во внимание (3), вычисляем отношение b_0/b_1 , в результате получаем

$$x_*(t) = L\sqrt{1 - \exp(-b_1 t)}. \quad (8)$$

Переходя в равенстве (8) к пределу при $t \rightarrow \infty$, видим, что x_* стремится к конечному значению L при $\alpha < \sigma + 3$. Очевидно, что этому неравенству удовлетворяют такие значения параметров σ и α , при которых имеет смысл формула (3).

Решение (4) описывает тепловое возмущение, распространяющееся в виде тепловой волны, фронт $x_*(t)$ которой перемещается с конечной скоростью. Изменение положения фронта тепловой волны подчиняется закону (8) (рис. 2). Следует отметить, что согласно (8) характерное время установления стационарного распределения температуры в слое можно оценить как $t_{уст} = b_1^{-1}$.

Разностная схема. Рассмотрим задачу (1) в постановке, когда начальное распределение температуры в слое задает функция $\varphi(x)$: $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(x) \in C[0, l]$, таким образом

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - f(u), & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 < x < l; \\ u(0, t) = U_0, \quad u(l, t) = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (9)$$

где $k(u) = a^2 u^\sigma$, $f(u) = pu^\alpha$.

Для численного решения задачи (9) применим разностный метод. В области $D = [0 \leq x \leq l] \times [0 \leq t \leq T]$ зададим равномерную сетку $\omega_{ht} = \{(x_n, t_m) : x_n = nh, t_m = m\tau, n = \overline{0, N}, m = \overline{0, M}\}$ с шагами $h = l/N$ и $\tau = T/M$ по переменным x и t .

Обозначим $y_n = y(x_n, t_m)$, $\hat{y}_n = y(x_n, t_{m+1})$, $\varphi_n = \varphi(x_n)$, $\hat{f}_n = f(\hat{y}_n)$, $\hat{k}_n = k\left(\frac{\hat{y}_{n-1} + \hat{y}_n}{2}\right)$, используя четырехточечный шаблон (рис. 3), запишем неявную разностную схему [7, 8]:

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[\hat{k}_{n+1} (\hat{y}_{n+1} - \hat{y}_n) - \hat{k}_n (\hat{y}_n - \hat{y}_{n-1}) \right] - \hat{f}_n, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (10)$$

Из граничных условий определяем $\hat{y}_0 = U_0$, $\hat{y}_N = 0$.

При решении системы (10) на временном слое t_1 полагаем $y_n = \varphi_n$ в соответствии с начальным условием. Разностная схема (10)

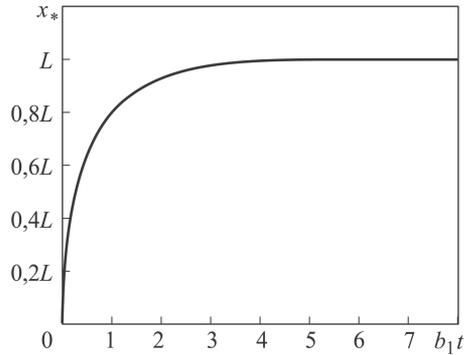


Рис. 2. Характер изменения положения фронта тепловой волны

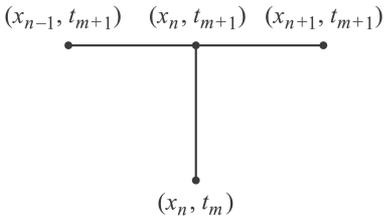


Рис. 3. Четырехточечный шаблон разностной схемы

монотонна, имеет погрешность аппроксимации $O(h^2 + \tau)$ и нелинейна относительно \hat{y}_n .

Для отыскания решения полученной системы нелинейных уравнений (10) на временном слое t_{m+1} применим метод последовательных приближений

$$\frac{\hat{y}_n^{(s)} - y_n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[\hat{k}_{n+1}^{(s-1)} \left(\hat{y}_{n+1}^{(s)} - \hat{y}_n^{(s)} \right) - \hat{k}_n^{(s-1)} \left(\hat{y}_n^{(s)} - \hat{y}_{n-1}^{(s)} \right) \right] - \hat{f}_n^{(s-1)}, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (11)$$

где $s = 1, 2, \dots$ – номер итерации.

В качестве начального приближения $\hat{y}_n^{(0)}$ примем значение y_n с предыдущего временного слоя и вычислим величины $\hat{k}_n^{(0)}$ и $\hat{f}_n^{(0)}$. Решая систему (11) методом прогонки [9], находим $\hat{y}_n^{(1)}$ – первое приближение решения \hat{y}_n и т.д. Условие окончания итерационного процесса имеет вид $\max_{1 \leq n \leq N-1} |\hat{y}_n^{(s)} - \hat{y}_n^{(s-1)}| < \varepsilon$, где ε – заданное значение абсолютной погрешности.

Выбор величин h и τ осуществляется на основе методики, предложенной в работе [10].

Результаты численных расчетов. Приведем примеры численного расчета температуры в слое при следующих значениях параметров: $U_0 = 1$; $l = 1$; $a^2 = 1$; $\sigma = 5/2$. Начальное распределение температуры $\varphi(x) \equiv 0$.

Пример 1. Для значений параметров $\alpha = 1/2$ и $p = 32/9$, используя формулу (3), находим $L = 1/2$. Следовательно, стационарное распределение температуры в слое имеет вид

$$u_{st}^{(1)}(x) = \begin{cases} (1 - 2x)^{\frac{2}{3}}, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

Распределения температуры в фиксированные моменты времени $t_1 = 0,01$ с, $t_2 = 0,1$ с и $t_3 = 0,5$ с представлены на рис. 4, а. Расчеты показали, что при $t > 1,0$ с процесс выходит на стационарный режим (12).

Пример 2. При значениях $\alpha = 3/2$ и $p = 10$ получаем $L = 1/2$. В этом случае стационарное распределение температуры представляет

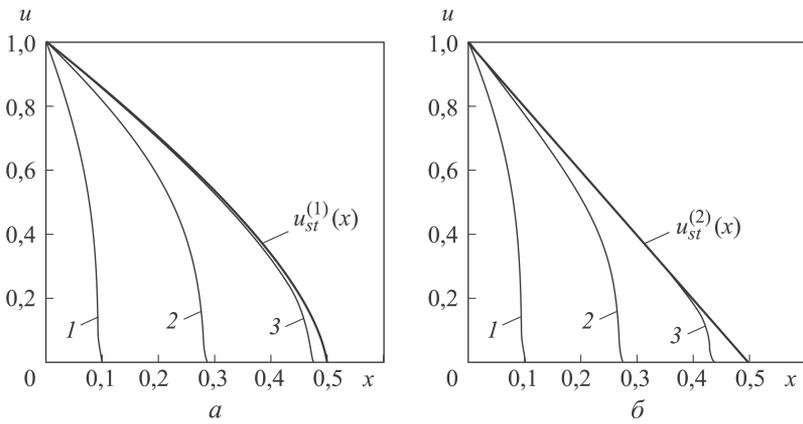


Рис. 4. Распределения температуры в слое в фиксированные моменты времени $t_1 = 0,01$ с (1), $t_2 = 0,1$ с (2) и $t_3 = 0,5$ с (3) и стационарные профили $u_{st}^{(1)}(x)$ и $u_{st}^{(2)}(x)$

собой “линейный” профиль

$$u_{st}^{(2)}(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Распределения температуры в моменты времени $t_1 = 0,01$ с, $t_2 = 0,1$ с и $t_3 = 0,5$ с приведены на рис.4, б. При $t > 1,2$ с процесс выходит на стационарный режим (13).

В рассмотренных примерах тепловое возмущение, распространяющееся от левой поверхности $x = 0$, проникает в слой на конечную глубину $L = 1/2$ (за пределами этой глубины температура равна нулю) и не достигает правой поверхности $x = 1$ даже при $t \rightarrow \infty$.

Устойчивость стационарного решения. Для значений параметров задачи, рассмотренных в примере 1, выясним, как будет вести себя решение краевой задачи (9), если начальное распределение температуры в слое имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{L_0}\right)^{\frac{2}{3}}, & 0 \leq x < L_0; \\ 0, & L_0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

где $L_0 > L$. В рассматриваемом примере полагаем $L_0 = 3/4$.

Расчеты показали (рис. 5), что в этом случае фронт $x_*(t)$ тепловой волны движется от точки $x_*(0) \equiv L_0$ в противоположном направлении, и решение $u(x, t)$ также стремится к стационарному решению $u_{st}^{(1)}(x)$ в процессе эволюции теплового возмущения. Этот важный результат доказывает, что стационарный профиль (2) является устой-

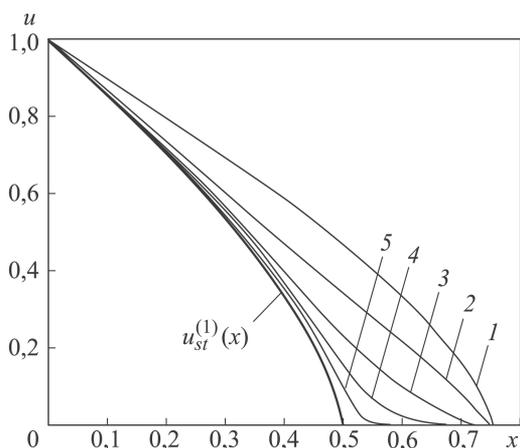


Рис. 5. Эволюция теплового возмущения в слое, когда $\varphi(x) > u_{st}^{(1)}(x)$ при $t_1 = 0,01$ с (1), $t_2 = 0,1$ с (2), $t_3 = 0,2$ с (3), $t_4 = 0,3$ с (4) и $t_5 = 0,4$ с (5) и стационарный профиль $u_{st}^{(1)}(x)$

чивым предельным распределением температуры в слое при любых начальных условиях.

Выводы. Численное решение краевой задачи (1) подтверждает теоретический вывод о том, что при некоторых значениях параметров задачи в процессе эволюции тепловых возмущений от нагретой стенки наблюдаются нелинейные эффекты конечной скорости распространения фронта тепловой волны и пространственной локализации тепловых возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с.
2. Мартинсон Л.К. Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением. В кн.: Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. С. 279–309.
3. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987. 362 с.
4. Мартинсон Л.К., Чигирёва О.Ю. Пространственная локализация тепловых возмущений в нелинейном процессе теплопроводности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 4. С. 27–33.
5. Мартинсон Л.К., Чигирёва О.Ю. Краевые задачи для квазилинейных уравнений параболического типа // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Седьмой Всероссийской конференции. В 3 ч. М., 2013. Ч. II. С. 32–33.
6. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
7. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
9. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченкова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.

10. Матус П.П. О корректности разностных схем для полулинейного параболического уравнения с обобщенными решениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2155–2175.

REFERENCES

- [1] Martinson L.K., Malov Yu.I. *Differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Differential equations of mathematical physics]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2002. 368 p.
- [2] Martinson L.K. *Issledovanie matematicheskoy modeli protsessa nelineynoy teploprovodnosti v sredakh s ob'emnym pogloshcheniem*. V kn.: *Matematicheskoe modelirovanie. Protsessy v nelineynykh sredakh* [Research into the process mathematical model of nonlinear thermal conductivity in spatial absorption media. In the book: *Mathematic Simulation. Processes in Nonlinear Media*]. Moscow, Nauka Publ., 1986, pp. 279–309.
- [3] Maslov V.P., Danilov V.G., Volosov K.A. *Matematicheskoe modelirovanie protsessov teplomassoperenosa* [Mathematic simulation of heat and mass transfer processes]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 362 p.
- [4] Martinson L.K., Chigireva O.Yu. *Spatial Localization of Thermal Perturbations in Nonlinear Process of Heat Conduction*. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2013, no. 4, pp. 27–33 (in Russ.).
- [5] Martinson L.K., Chigireva O.Yu. *Boundary-value problems for quasilinear equations of the parabolic type. Irreversible processes in nature and engineering: Proceedings of the Seventh Russian National Conference. Neobratimye protsessy v prirode i tekhnike: Tr. Sed'moy Vseross. konf. V 3 ch.* Moscow, 2013. Part II, pp. 32–33 (in Russ.).
- [6] Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Blow-up regimes in problems for quasilinear parabolic equations]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 480 p.
- [7] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, MGU Publ., 2004. 798 p.
- [8] Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Difference scheme theory]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 656 p.
- [9] Amosov A.A., Dubinskiy Yu.A., Kopchenova N.V. *Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov* [Computational approaches for engineers]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1994. 544 p.
- [10] Matus P.P. *Correctness of difference schemes for the semilinear parabolic equation with generalized solutions*. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* [Comput. Math. Math. Phys.], 2010, vol. 50, no. 12, pp. 2155–2175 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 22.06.2015

Мартинсон Леонид Карлович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Martinson L.K. — D.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Department of Physics, Bauman Moscow State Technical University.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Чигирёва Ольга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Chigireva O.Yu. — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Mathematical Simulation, Bauman Moscow State Technical University.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Мартинсон Л.К., Чигирёва О.Ю. Эволюция пространственно локализованных тепловых возмущений // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 6. С. 16–24.

Please cite this article in English as:

Martinson L.K., Chigireva O.Yu. Evolution of spatially localized thermal perturbations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 6, pp. 16–24.