

ПРИЧИННОСТЬ В КВАНТОВЫХ ЗАПУТАННЫХ СОСТОЯНИЯХ

Рассмотрено приложение к запутанным состояниям нового метода квантового причинного анализа, в котором причинность определяется без ссылки на запаздывание. Это помогает понять принцип слабой причинности Крамера, допускающий обращение времени в запутанных состояниях. Получено, что конечная причинность может существовать только в смешанных асимметричных запутанных состояниях. Вычислены параметры причинности для серии трехкубитных запутанных состояний и проведено их сравнение с мерами смешанности и запутанности. В простейших случаях формальная мера причинности не противоречит интуитивным представлениям, но в несколько более сложных ситуациях интуиция может приводить к неправильному результату, в то время как причинный анализ демонстрирует нетривиальную роль асимметрии состояния при передаче квантовой информации.

E-mail: korotaev@igemi.troitsk.ru; riot_ek@mail.ru

Ключевые слова: квантовая информация, причинность, запутанные состояния.

1. Введение. Причинность — один из универсальных физических принципов, играет двоякую роль. С одной стороны, она позволяет выбирать физически адекватное решение из набора допустимых математических решений, с другой — осознание причинно-следственных взаимосвязей в сложных системах является первым этапом при построении феноменологической модели.

Обычно под принципом причинности не понимается ничего более, чем запаздывание следствия относительно причины. Однако сами понятия “причина” и “следствие” остаются неопределенными. В теоретических задачах это может привести к недоразумениям, а при исследовании сложных явлений — к серьезным ошибкам.

Исследование причинности привело к появлению причинной механики [1]. Позже из формализации ее идей развился метод причинного анализа, оказавшийся полезным в широком круге приложений [2, 3].

Недавно был предложен новый метод квантового причинного анализа [4, 5]. В отличие от классического аналога квантовая причинность может существовать только в открытых системах. Смешанные квантовые состояния также удовлетворяют принципу слабой причинности [6], допускающему обращение времени.

В работах [4, 5] анализируется набор симметричных (без причинной связи) и асимметричных (причинных) двухкубитных состояний. В настоящей работе мы рассматриваем более сложные, трехкубитные состояния. Фактически на их примере демонстрируются все ка-

чественные особенности многокубитных состояний по сравнению с двухкубитными.

В разделе 2 дается обзор квантового причинного анализа. Основные новые результаты содержатся в разделе 3, в котором рассматриваются примеры применения причинного анализа к набору трехкубитных состояний. Общие выводы формулируются в разделе 4.

2. Квантовый причинный анализ. Основная идея причинно-анализа заключается в формализации интуитивного представления о наличии асимметрии между причиной и следствием, очевидного без измерения запаздывания (которое, конечно, является необходимым условием причинной связи).

В основе классического причинного анализа лежит понятие функций независимости

$$i(B|A) = \frac{S(B|A)}{S(B)}, \quad i(A|B) = \frac{S(A|B)}{S(A)}, \quad 0 \leq i \leq 1, \quad (1)$$

где S — условные и безусловные энтропии Шеннона соответствующих классических переменных. Как показано в работах [4, 5], в классическом причинном анализе предложено две меры причинности, одна из которых основана на вычислении величины

$$\gamma(A, B) = \frac{i(B|A)}{i(A|B)}, \quad 0 \leq \gamma \leq \infty, \quad (2)$$

вторая — на определении величины, названной ходом времени,

$$c_2(A, B) = k \frac{(1 - i(A|B))(1 - i(B|A))}{i(A|B) - i(B|A)}, \quad (3)$$

где $k = \Delta r / \delta t$, Δr — расстояние между процессами, δt — время элементарного импульса.

На основании этих величин вводится формальное определение причинности: *причиной A и следствием B называются переменные, для которых $\gamma(A, B) < 1$ или $c_2(A, B) > 0$* (в работах [4, 5] показано, что использование обеих мер причинности ведет к одним и тем же результатам).

Переход на квантовый уровень связан с использованием энтропии фон Неймана для определения функций независимости в формулах (1). За счет возможности существования отрицательных условных энтропий функции независимости для квантовых переменных могут принимать значения из диапазона $-1 \leq i \leq 1$. Это приводит к тому, что мера причинности γ может давать как ложные, так и бессмысленные результаты (что продемонстрировано на многих примерах в [4, 5]). Величина же c_2 , имеющая смысл скорости необратимого потока информации и определяющая направление причинности, сохраняет свою работоспособность.

Таким образом, в квантовом причинном анализе в качестве меры причинности выступает величина c_2 , вычисляемая по формуле (3). Коэффициент k , определяемый для квантовых переменных скоростью брахистохронной эволюции и вычисляемый из гамильтониана системы [7], не влияет качественно на поведение c_2 [4, 5] и в настоящей работе полагается равным единице. Знак c_2 определяет направление причинной связи (если $c_2(A, B) > 0$, A — причина, B — следствие). Модуль c_2 определяет силу причинной связи: чем меньше $|c_2|$, тем сильнее связь.

3. Примеры. За счет симметрии, следующей из разложения Шмидта, в двухсоставных чистых состояниях причинность отсутствует. Таким образом, смешанность является необходимым условием квантовой причинности. Как и в работах [4, 5], мы рассматриваем диссипацию в качестве способа частичной декогеренции, приводящей к смешанности. Диссипации соответствует следующее преобразование матричных элементов кубита [8, 9]:

$$\begin{aligned} |0\rangle\langle 0| &\rightarrow |0\rangle\langle 0|, \\ |1\rangle\langle 1| &\rightarrow (1-p)|1\rangle\langle 1| + p|0\rangle\langle 0|, \\ |1\rangle\langle 0| &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 0|, \\ |0\rangle\langle 1| &\rightarrow \sqrt{1-p}|0\rangle\langle 1|, \end{aligned} \quad (4)$$

где $0 \leq p \leq 1$ — степень декогеренции.

Ниже рассматриваются трехкубитные системы. Первый кубит условно назовем подсистемой A , второй и третий — подсистемами B и C соответственно. В таком случае еще одним источником смешанности в двухчастичных подсистемах выступает взаимодействие с оставшейся третьей частицей. Также мы рассматриваем двухсоставные системы, в которых одним из элементов выступает подсистема, состоящая сразу из двух частиц. Таким образом, относительно простой трехкубитный случай помогает понять особенности многочастичной причинности по сравнению с двухчастичной.

Наряду с мерами причинности c_2 и функциями независимости i , для каждого примера вычисляется негативность N как мера запутанности и энтропия полной системы $S(ABC)$ (для двухчастичных подсистем $S(AC)$ и т.п.) как мера смешанности.

3.1. Состояние Гринберга–Хорна–Цайлингера (ГХЦ)

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \quad (5)$$

примечательно тем, что, несмотря на максимальную трехчастичную запутанность (ABC) , парная запутанность отсутствует. За счет сим-

метрии причинность отсутствует во всех парах и причинный анализ демонстрирует лишь максимальные классические парные корреляции.

Теперь применим преобразование (4) к одной из частиц, например C . При воздействии диссипации состояние становится смешанным, а матрица плотности приобретает вид

$$\rho_{GHZ}^{diss} = \frac{1}{2} \left[|000\rangle\langle 000| + (1-p)|111\rangle\langle 111| + p|110\rangle\langle 110| + \sqrt{1-p}(|000\rangle\langle 111| + |111\rangle\langle 000|) \right]. \quad (6)$$

На основе матрицы (6) и соответствующих редуцированных матриц был вычислен полный набор безусловных и условных энтропий. Затем были получены функции независимости (1) для каждой двухсоставной системы, которые в свою очередь использовались для получения соответствующей величины c_2 .

За счет симметрии можно выделить лишь четыре уникальных звена: $A-B$, $AB-C$, $A-C$, $AC-B$. Звено $A-B$ симметрично ($i_{A|B} = i_{B|A}$), и, следовательно, в нем причинность отсутствует. На рис. 1, a представлены меры причинности c_2 для трех остальных звеньев.

Видно, что в звеньях $AB-C$ и $A-C$ диссипирующая частица C всегда соответствует следствию ($c_2(AB, C) > 0$, $c_2(A, C) > 0$) и с ростом степени диссипации p причинность усиливается ($c_2 \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 1$). Такое поведение полностью соответствует интуитивному ожиданию — необратимый поток информации направлен к диссипирующей частице. Тот факт, что $c_2(AB, C) > c_2(A, C)$, объясняется более сильной смешанностью состояния $\rho(AC)$ по сравнению с $\rho(ABC)$: $S(AC) > S(ABC)$ (рис. 1, b), так как смешанность является необходимым условием для причинности. В свою очередь более сильная смешанность $\rho(AC)$ объясняется взаимодействием частицы A как с частицей B , так и с диссипирующей частицей C , т.е. взаимодействием с неконтролируемой окружающей средой; в то время как в $\rho(ABC)$ имеет место лишь взаимодействие с окружающей средой. Отметим, что в случае диссипации одной из частиц в двухсоставном аналоге ГХЦ-состояния (состоянии Белла) все соответствующие энтропии, а следовательно, и все другие параметры, включая c_2 [4, 5], полностью совпадают с соответствующими параметрами звена $AB-C$ ГХЦ-состояния.

Нетривиальным образом ведет себя причинность в звене $AC-B$. В отличие от рассмотренных выше случаев пара AC , содержащая диссипирующую частицу C , соответствует причине. Фактически диссипация C уменьшает $S(C)$ до 0 (при $p = 1$ $\rho(C) = |0\rangle\langle 0|$). Вместе с тем диссипация C открывает подсистему AC и $S(AC)$ достигает

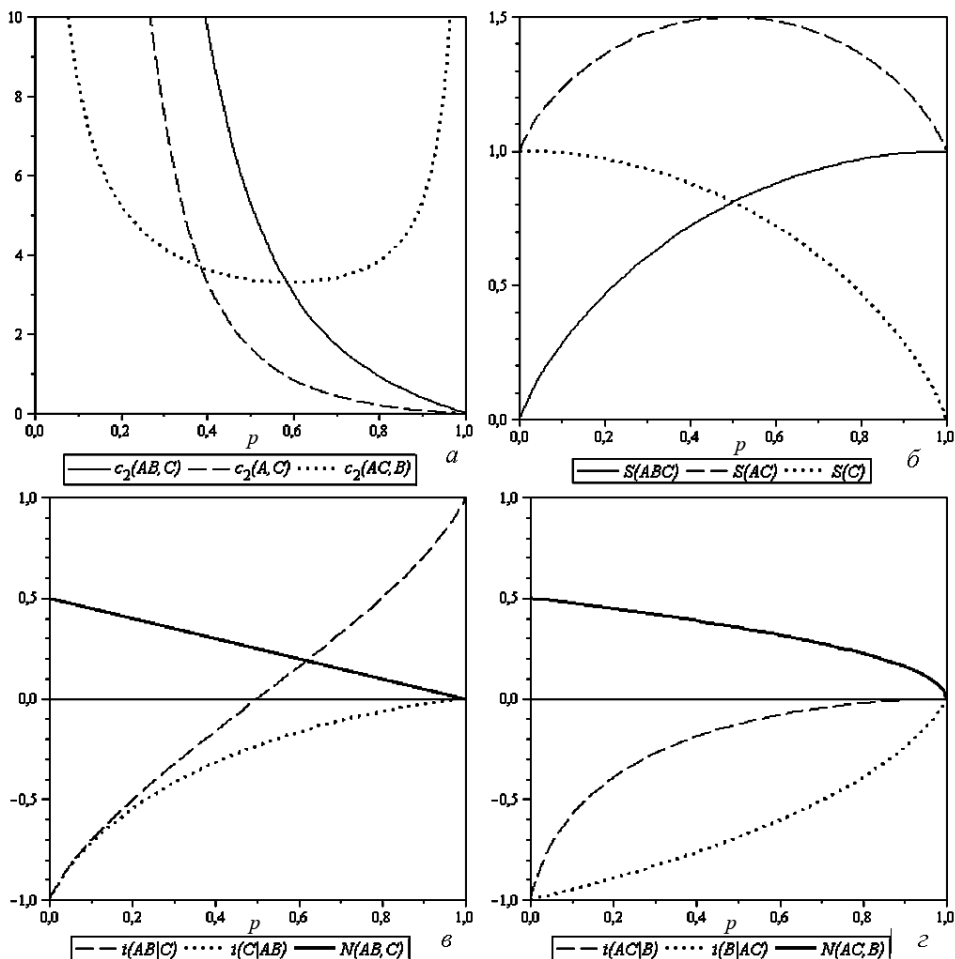


Рис. 1. Зависимость c_2 (а), S (б), i и N (в, г) от степени диссипации p частицы C для различных звеньев состояния (б)

максимума при $p = \frac{1}{2}$, равного $\frac{3}{2}$ (рис. 1, б), в то время как $S(B) = \text{const} = 1$. Частица B всегда соответствует следствию, но величина c_2 ведет себя немонотонно: она достигает минимума при $p = 0,594$. Чтобы объяснить это явление, отметим, что при $p = 0$ состояние (б) чистое и, следовательно, $c_2(AC, B) \rightarrow \infty$; при $p = 1$ состояние (б) максимально смешанное, но $S(AC) = S(B)$ (полностью диссипирующая частица C “исчезла”), поэтому вновь $c_2(AC, B) \rightarrow \infty$. Знаменатель выражения (3) для $c_2(AC, B)$, а именно $i_{AC|B} - i_{B|AC}$ имеет максимум при $p = 0,401$ (рис. 1, г), в то время как числитель, представляющий собой произведение $(1 - i_{AC|B})(1 - i_{B|AC})$, убывает с ростом p , поэтому $\min c_2$ смещен к большему, по сравнению с $\frac{1}{2}$ значению p . Как видно на рис. 1, а, причинность в звене $AC - B$ преобладает над причинностями в других звеньях при малой степени диссипации ($p < 0,387$).

Сравнение негативностей N и функций независимости i , представленных на рис. 1, *в*, *г*, показывает, что функции независимости более чувствительны к виду разбиения. Кроме того, можно ожидать, что за счет чистоты максимально запутанного состояния (а следовательно, отсутствия в нем причинности) причинность тем сильнее, чем слабее запутанность. Однако, сравнивая рис. 1, *в*, *г*, с рис. 1, *а*, видим, что это в общем случае не так.

3.2. W-состояние. Другое, схожее с состоянием ГХЦ, состояние

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle), \quad (7)$$

называемое W-состоянием, представляет собой трехчастичное состояние с конечной парной запутанностью. Применяв преобразование (4) к третьей частице, C , получим диссипированное состояние

$$\begin{aligned} \rho_W^{diss} = & \frac{1}{3} [|010\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 100| + \\ & + (1-p)|001\rangle\langle 001| + p|000\rangle\langle 000| + \\ & + \sqrt{1-p}(|001\rangle\langle 010| + |001\rangle\langle 100| + |010\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 001|)]. \quad (8) \end{aligned}$$

Как и в случае с диссипацией ГХЦ-состояния, диссипирующая частица C всегда соответствует следствию ($c_2(AB, C) > 0$, $c_2(A, C) > 0$) и с увеличением степени диссипации p причинность усиливается ($c_2 \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 1$) (рис. 2, *а*). Тот факт, что $c_2(AB, C) > c_2(A, C)$ объясняется большей смешанностью редуцированного состояния $\rho(AC)$ по сравнению с $\rho(ABC)$: $S(AC) > S(ABC)$ (рис. 2, *б*), как и в рассмотренном выше случае. Также аналогично ГХЦ-состоянию в звене $AC-B$ пара AC , содержащая в себе диссипирующую частицу C , соответствует причине. Отличие заключается в том, что минимум достигается при $p = 0,576$ и c_2 для данного звена выше, чем в двух других звеньях, т.е. причинность слабее при любых p (рис. 2, *а*).

Сравнивая рис. 2, *в* и 2, *г* с рис. 2, *а*, получаем, что для различных звеньев соблюдается следующее правило: чем выше негативность, тем сильнее квантовые корреляции и слабее причинность: $N(AC, B) > N(AB, C) > N(A, C)$, $c_2(AC, B) > c_2(AB, C) > c_2(A, C)$. Данное правило вполне соответствует интуиции, однако внутри одного звена может не выполняться: при $p > 0,576$ $N(AC, B)$ убывает, в то время как $c_2(AC, B)$ возрастает.

Большой интерес представляет сравнение поведения негативности и функций независимости в редуцированном состоянии $\rho(AC)$. На рис. 3 видно, что при любых $p < 1$ обе i и N положительны. Это

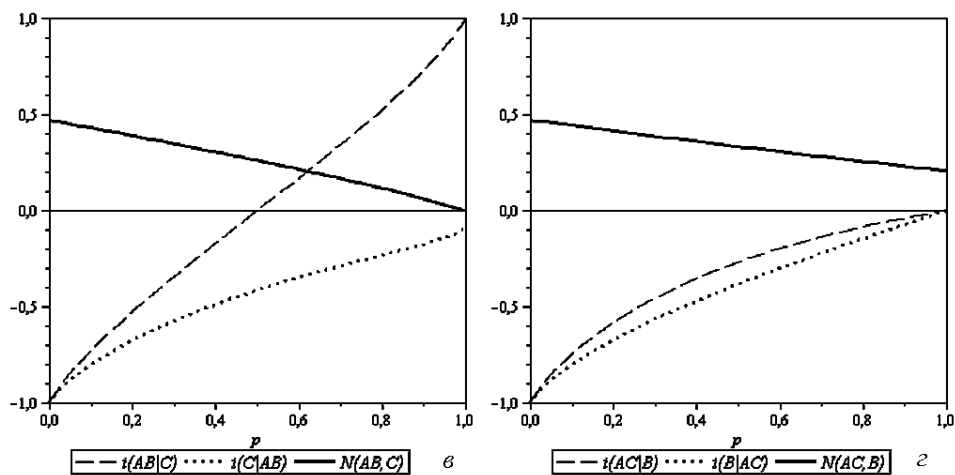
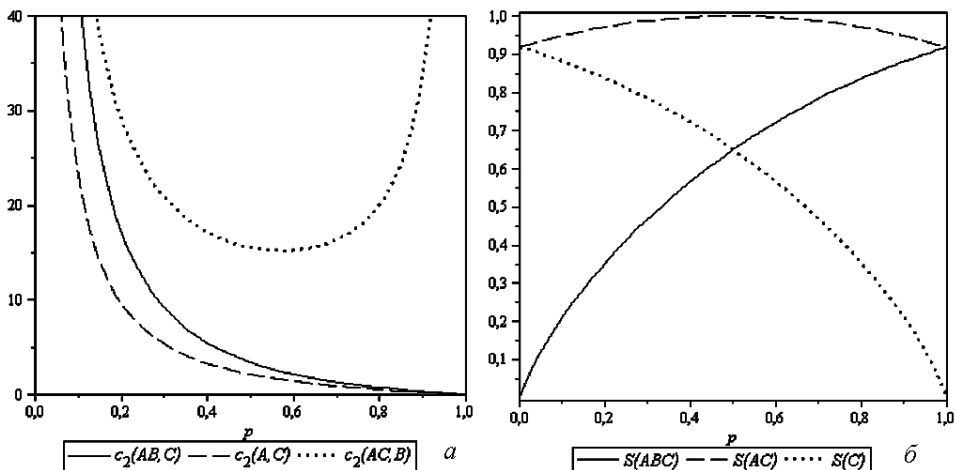


Рис. 2. Зависимость c_2 (а), S (б), i и N (в, з) от степени диссипации p частицы C для различных звеньев состояния (8)

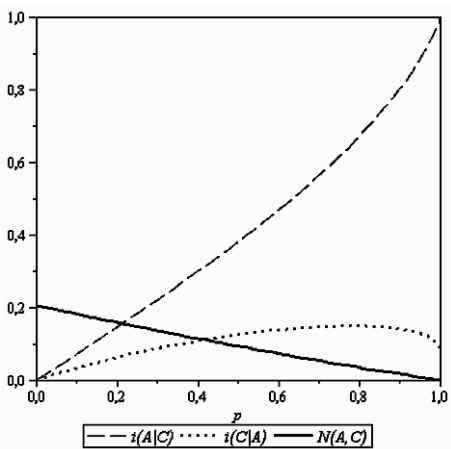


Рис. 3. Зависимость i и N от степени диссипации p частицы C для редуцированной матрицы плотности $\rho(AC)$ состояния (8)

означает, что подсистема AC в энтропийном смысле выглядит классической, но тем не менее запутана.

3.3. Состояние Коффмана–Кунду–Вутерса. Коффман, Кунду и Вутерс [10] исследовали следующее состояние (СКW-состояние):

$$|CKW\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle + \frac{1}{2}(|001\rangle + |010\rangle), \quad (9)$$

примечательное наличием максимальной парной запутанности (изменяемой согласованностью) в подсистемах AB и AC . Свойства запутанности этого состояния также были исследованы в работе [11]. В работе [4, 5] показано, что данные подсистемы причинны: частица A выступает общей причиной для B и C : $c_2(A, B) = c_2(A, C) = 5,30$ (в звене $B-C$ причинность отсутствует: $|c_2(B, C)| = \infty$).

За счет асимметричности исходного состояния (9) общая картина причинных связей выглядит богаче. Пусть, как и в вышеизложенных примерах, диссипирует частица C . Тогда состояние приобретает вид

$$\begin{aligned} \rho_{CKW}^{dissC} = & \frac{1}{4}|010\rangle\langle 010| + \frac{1}{2\sqrt{2}}(|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010|) + \frac{1}{2}|100\rangle\langle 100| + \\ & + \frac{1}{4}(1-p)|001\rangle\langle 001| + \frac{1}{4}p|000\rangle\langle 000| + \sqrt{1-p}\left(\frac{1}{4}|001\rangle\langle 010| + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}}|001\rangle\langle 100| + \frac{1}{4}|010\rangle\langle 001| + \frac{1}{2\sqrt{2}}|100\rangle\langle 001|\right). \quad (10) \end{aligned}$$

Можно ожидать, что в результате диссипации C величина $c_2(A, C)$ будет убывать, в то время как $c_2(A, B)$ — оставаться константной; во всех остальных звеньях должна появляться конечная причинность. Результаты вычислений представлены на рис. 4, кроме звена $A-B$, в котором все параметры остаются постоянными: $c_2(A, B) = 5,30$, $S(AB) = 0,811$, $i_{B|A} = -0,233$, $i_{A|B} = 0$, $N(A, B) = \frac{1}{4}$.

На рис. 4, *a* видно, что действительно $c_2(A, C)$ убывает с ростом p от 5,30 до 0 при $p \rightarrow 1$ и имеет минимальные значения среди c_2 остальных звеньев при любом p . Действительно, только в звене $A-C$ направленность собственной причинной связи, обусловленной исходной асимметрией, совпадает с приобретенной за счет диссипации. В звене $B-C$ причинность возникает только за счет диссипации и соответственно слабее: $c_2(B, C) > c_2(A, C)$ при любых p . Далее, из рис. 4, *a* следует, что причинность в двух двухчастичных звеньях $A-C$ и $B-C$ сильнее (c_2 меньше), чем в трехчастичных звеньях $AB-C$, $A-BC$ и $AC-B$. Это объясняется тем, что смешанность в двухчастичных состояниях выше ($S(AC)$ и $S(BC)$ больше $S(ABC)$ на рис. 4, *b*). Следует отметить, что взаимосвязь причинности и смешанности является

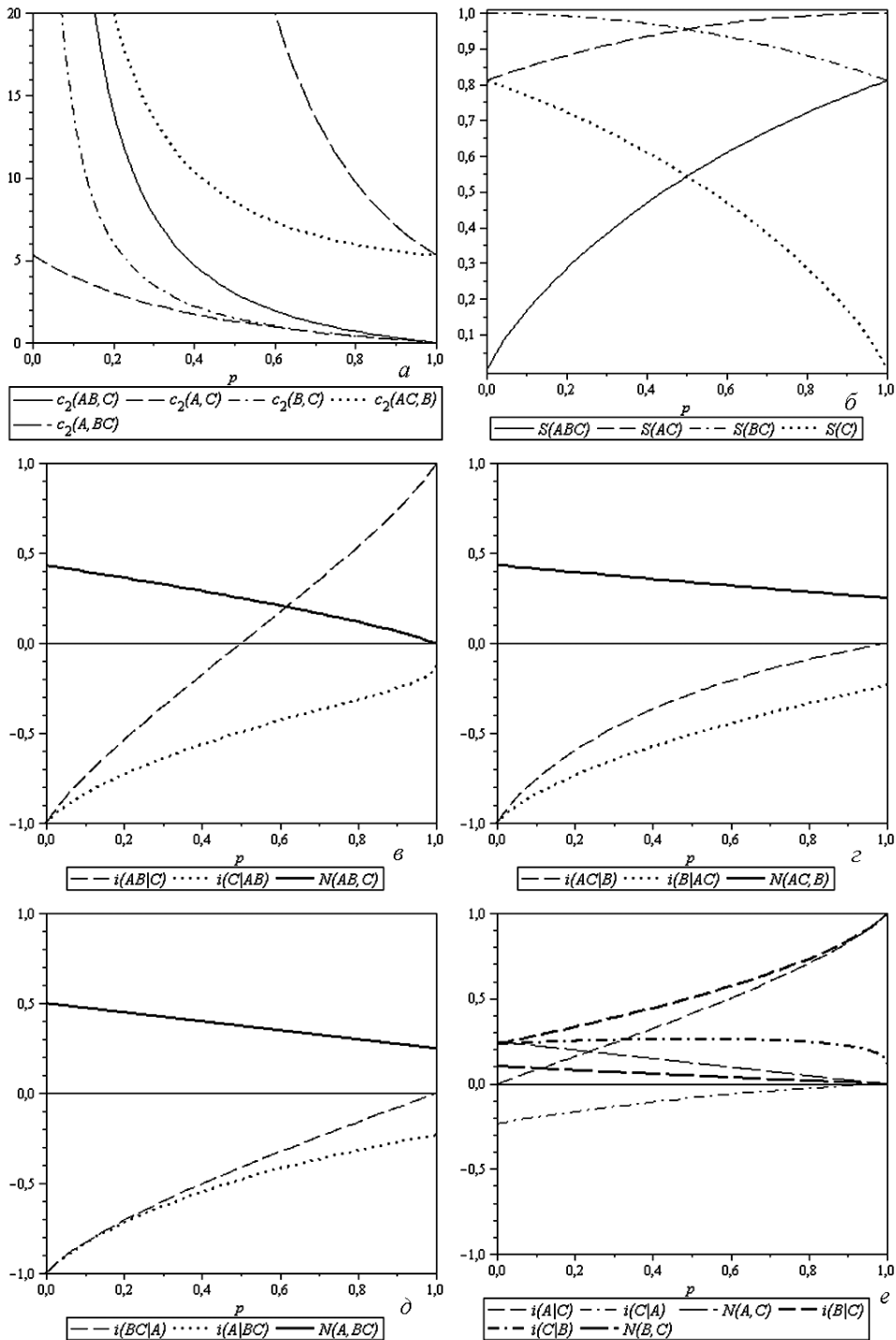


Рис. 4. Зависимость c_2 (а), S (б), i и N (в-е) от степени диссипации p частицы C для различных звеньев состояния (10)

общей тенденцией, но не правилом. Например, обе величины $c_2(B, C)$ и $S(BC)$, убывают с ростом p .

Нетривиальный результат, как и в случае ГХЦ- и W-состояний, заключается в том, что диссипирующая частица C может принадлежать не только следствию (например, в звеньях $AB-C$ и $A-BC$), но и причине (звено $AC-B$). При полной диссипации ($p = 1$) частица C “исчезает” из двухчастичных подсистем и в результате получаем $c_2(AC, B) = c_2(A, BC) = c_2(A, B) = 5,30$.

Сравнивая рис. 4, а с рис. 4 в-д, получаем, что для большинства звеньев чем сильнее запутанность, тем сильнее причинность: $N(A, C) < N(AB, C) < N(AC, B) < N(A, BC)$ соответствует $c_2(A, C) < c_2(AB, C) < c_2(AC, B) < c_2(A, BC)$. Однако звенья $A-B$ и $B-C$ не удовлетворяют этому соотношению. Таким образом, взаимосвязь причинности и запутанности также представляет собой лишь общую тенденцию, но не правило.

На рис. 4, е видно: в звене $B-C$ при любых $p < 1$ обе i и N положительны. Подсистема BC является запутанной, несмотря на энтропийную классичность.

Теперь рассмотрим диссипацию частицы A :

$$\begin{aligned} \rho_{CKW}^{dissA} = & \frac{1}{4}(|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + \\ & + |010\rangle\langle 010|) + \frac{1-p}{2}|100\rangle\langle 100| + \frac{p}{2}|000\rangle\langle 000| + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-p}{2}}(|001\rangle\langle 100| + \\ & + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|). \quad (11) \end{aligned}$$

Можно ожидать, что в результате диссипации A начальная причинная связь $A \rightarrow C$ будет ослабевать до исчезновения при определенном p , после чего причинность изменит свое направление и будет усиливаться в направлении $C \rightarrow A$ при p , стремящемся к единице. Конечные результаты вычислений представлены на рис. 5, кроме звена $B-C$, для которого все параметры остаются постоянными: $c_2(B, C) \rightarrow \pm\infty$, $S(BC) = 1$, $i_{B|C} = i_{C|B} = 0,233$, $N(B, C) = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$ (частицы B и C запутаны и классически коррелированы благодаря наличию общей причины). Звено $AB-C$ эквивалентно представленному звену $AC-B$.

На рис. 5, а действительно видно, что $c_2(A, C)$ меняет знак при $p = \frac{1}{2}$. Но при положительных значениях $c_2(A, C)$ (соответствующих направленности причинной связи $A \rightarrow C$) функция ведет себя немонотонно; у нее появляется неожиданный минимум, равный 5,08, при $p = 0,103$. Монотонное возрастание отрицательной $c_2(A, BC)$ соответствует усилению причинности с увеличением степени диссипации

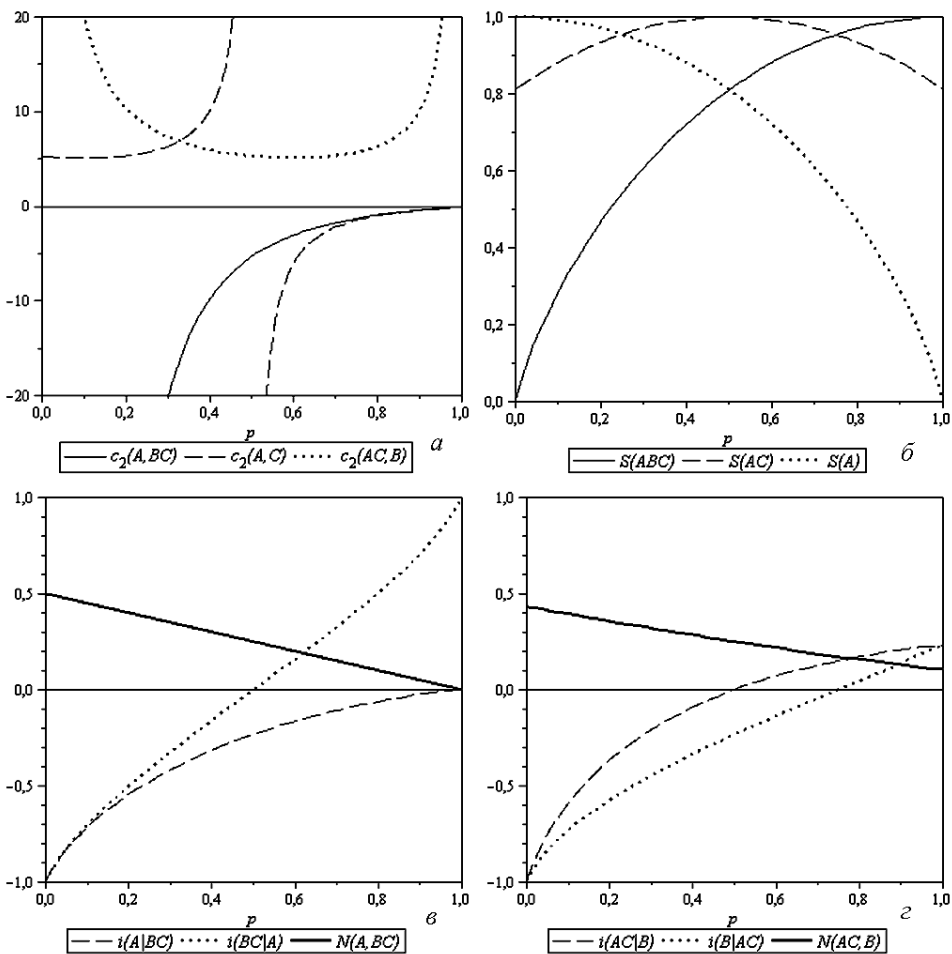


Рис. 5. Зависимость c_2 (а), S (б), i и N (в, г) от степени диссипации p частицы A для различных звеньев состояния (11)

следствия A . Нетривиальное поведение причинности в звене $AC-B$ объясняется аналогичным образом, как в случае ГХЦ- и W-состояний. Следует отметить, что $\min c_2(AC, B) = \min c_2(A, C)$. Имеется интересное соотношение, справедливое не только для данного примера: $p(\min c_2(AC, B)) = 1 - p(|c_2(A, C)| = \infty) + p(\min c_2(A, C))$.

Для данного состояния отсутствует взаимосвязь между различными c_2 и степенью смешанности (рис. 5, б). Существует лишь взаимосвязь $c_2(AC, B)$ и $c_2(A, BC)$ со степенью запутанности (рис. 5, в и г): при $p < \frac{1}{2}$ $N(AC, B) < N(BC, A)$ соответствует $|c_2(AC, B)| < |c_2(A, BC)|$; при $p > \frac{1}{2}$ $N(AC, B) > N(BC, A)$ соответствует $|c_2(AC, B)| > |c_2(A, BC)|$.

На рис. 5, г видно, что на интервале $\frac{3}{4} < p < 1$ звено $AC-B$ классически коррелировано (обе i положительны), но остается запутанным.

Аналогичное явление наблюдается для подсистемы AC (рис. 6), но на более широком интервале $\frac{1}{4} < p < 1$.

Сравнение случаев $AB-C^{diss}$ и $BC-A^{diss}$ показывает следующее:

1) $|c_2(AB, C^{diss})| \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 1$ быстрее, чем $|c_2(A^{diss}, BC)|$. Это отражает влияние исходной (при $p = 0$) причинной связи в звене $A-C$ (где A — причина и C — следствие);

2) $S(A^{diss}BC)$ возрастает быстрее $S(ABC^{diss})$ с ростом p . Это означает, что диссипация исходной причины усиливает смешанность сильнее, чем диссипация следствия. Таким образом, открытие системы через причину (информационный источник) более драматично, чем через следствие (информационный сток);

3) $i(A^{diss}|BC) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 1$ быстрее, чем $i(C^{diss}|AB)$. Поэтому диссипация исходной причины быстрее разрушает квантовые корреляции, чем диссипация следствия;

4) при $0 < p < \frac{1}{2}$ имеем $N(AB, C^{diss}) < N(BC, A^{diss})$, но при $\frac{1}{2} < p < 1$, $N(AB, C^{diss}) > N(BC, A^{diss})$. Поэтому диссипация исходной причины разрушает запутанность сильнее, чем диссипация следствия.

3.4. WRr-состояние. В работах [12, 13] исследованы различные трехсоставные состояния, связанные преобразованиями симметрии, частными случаями которых являются ГХЦ- и W -состояния. В частности, получен дуплет

$$|WRr\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|001\rangle + |010\rangle - 2|100\rangle). \quad (12)$$

В работе [4, 5] показано, что, как и в случае СКW-состояния, подсистемы AB и AC связаны причинной связью: частица A является общей причиной для B и C . Однако количественно эта причинность проявляет себя сильнее: $c_2(A, B) = c_2(A, C) = 3,43$ (в звене $B-C$ причинность отсутствует: $|c_2(B, C)| = \infty$).

Вновь сначала подвергнем частицу C диссипации. Тогда состояние примет вид

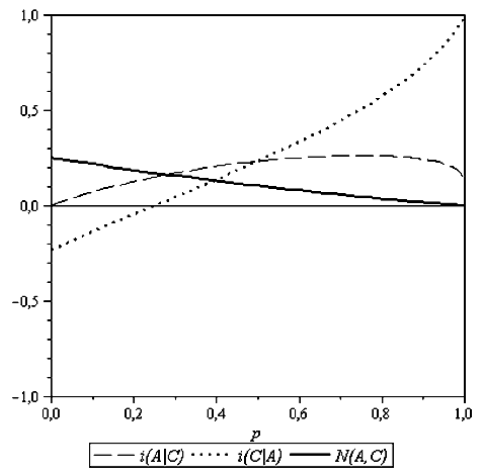


Рис. 6. Зависимость i и N от степени диссипации p частицы A для редуцированной матрицы плотности $\rho(AC)$ состояния (11)

$$\rho_{W R r}^{diss C} = \frac{1}{6} |010\rangle\langle 010| - \frac{1}{3} (|010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 010| - 2|100\rangle\langle 100|) + \\ + \frac{1-p}{6} |001\rangle\langle 001| + \frac{1}{6} p |000\rangle\langle 000| + \frac{\sqrt{1-p}}{6} (|001\rangle\langle 010| - 2|001\rangle\langle 100| + \\ + |010\rangle\langle 001| - 2|100\rangle\langle 001|). \quad (13)$$

Результаты вычислений представлены на рис. 7, кроме звена $A-B$, для которого вся параметры постоянны: $c_2(A, B) = 3.43$, $S(AB) = 0,650$, $i_{B|A} = -0,413$, $i_{A|B} = 0$, $N(A, B) = \frac{\sqrt{17}-1}{12}$.

Легко видеть, что состояние (13) качественно аналогично состоянию (10). Количественные различия следуют из более сильной причинности в (13).

Теперь рассмотрим диссипацию частицы A :

$$\rho_{W R r}^{diss A} = \frac{1}{6} (|001\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 001| + \\ + |010\rangle\langle 010|) + \frac{2}{3} (1-p) |100\rangle\langle 100| + \frac{2}{3} p |000\rangle\langle 000| - \frac{1}{3} \sqrt{1-p} (|001\rangle\langle 100| + \\ + |010\rangle\langle 100| + |100\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 010|). \quad (14)$$

Результаты вычислений представлены на рис. 8, кроме звена $B-C$, для которого все параметры постоянны: $c_2(B, C) \rightarrow \pm\infty$, $S(BC) = 0,918$, $i_{B|C} = i_{C|B} = 0,412$, $N(B, C) = \frac{\sqrt{5}-2}{6}$. И вновь частицы B и C запутаны и классически коррелированы благодаря наличию общей причины. Звено $AB-C$ эквивалентно звену $AC-B$.

По сравнению со случаем, когда диссипирует частица C , диссипация A ведет к ряду качественных различий между рис. 8 и рис. 5. Особенность данного состояния заключается в том, что энтропия диссипирующей частицы $S(A)$ не уменьшается монотонно, а имеет максимум при $p = \frac{1}{4}$, в то время как смешанность всей системы $S(ABC)$ увеличивается не монотонно и имеет максимум при $p = \frac{3}{4}$ (рис. 8, б). В свою очередь $S(AC)$ по-прежнему имеет максимум при $p = \frac{1}{2}$.

Поведение причинности, изображенной на рис. 8, а, заметно отличается от изображенной на рис. 5, а. Величина $c_2(A, C)$ изменяет свой знак при $p = \frac{3}{4}$. Это означает, что исходная парная причинность в WRr -состоянии более устойчива по сравнению с $СКW$ -состоянием. Минимум $\min c_2(A, C) = 2,12$ глубже и наблюдается уже при $p = 0,377$. В отличие от диссипированного $СКW$ -состояния $c_2(A, BC)$ меняет свой знак при $p = \frac{1}{2}$. При малых p

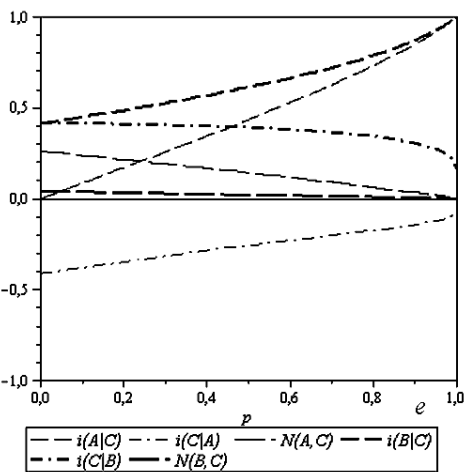
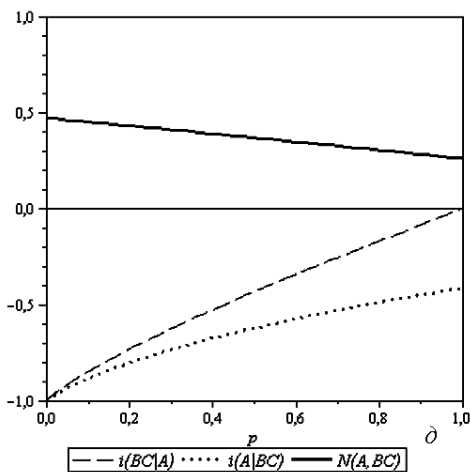
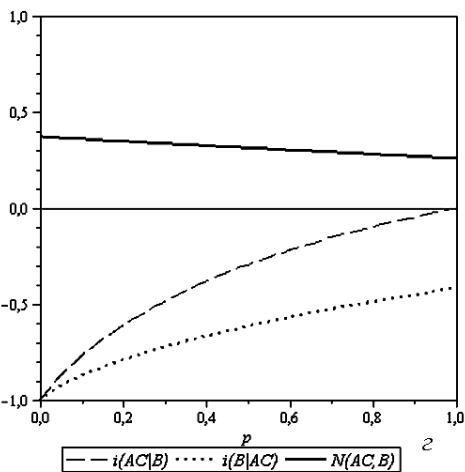
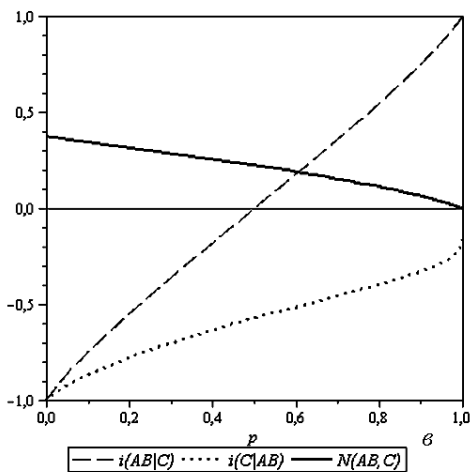
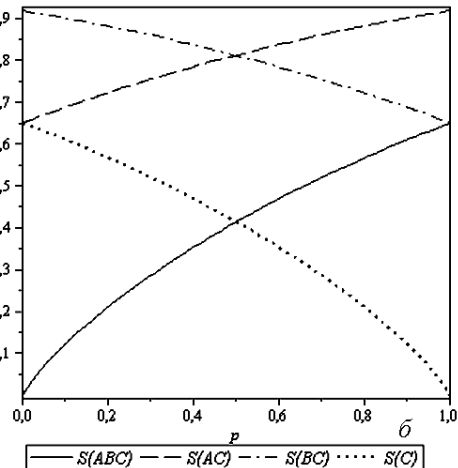
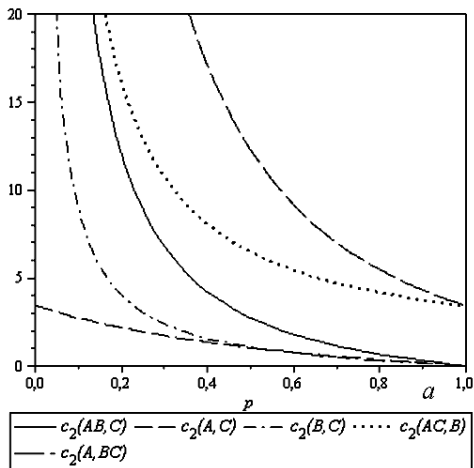


Рис. 7. Зависимость c_2 (а), S (б), i и N (в–е) от степени диссипации p частицы C для различных звеньев состояния (13)

причинная связь имеет направление $A \rightarrow BC$, при больших — направление $A \leftarrow BC$. Минимум $c_2(A, BC) = 15,2$ соответствует $A \rightarrow BC$ и наблюдается при $p = 0,288$. Кривая $c_2(AC, B)$ на рис. 8, *a* аналогична соответствующей кривой на рис. 5, *a*, однако $\min c_2(AC, B) = 1,97$ при $p = 0,627$ не равен $\min c_2(A, C)$, но их положения по-прежнему удовлетворяют соотношению $p(\min c_2(AC, B)) = 1 - p(|c_2(A, C)| = \infty) + p(\min c_2(A, C))$.

Прежняя связь $c_2(AC, B)$ и $c_2(A, BC)$ с соответствующими негативностями наблюдается на рис. 8, *в* и *г*: при $p < 3/4$ $N(AC, B) < N(BC, A)$ соответствует $|c_2(AC, B)| < |c_2(A, BC)|$; при $p > 3/4$ $N(AC, B) > N(BC, A)$ соответствует $|c_2(AC, B)| > |c_2(A, BC)|$. Отметим, что точки обращения $p = 3/4$ для данного состояния и $p = 1/2$ для случая диссипированного СКВ-состояния совпадают с точками разрыва $c_2(A, C) \rightarrow \pm\infty$.

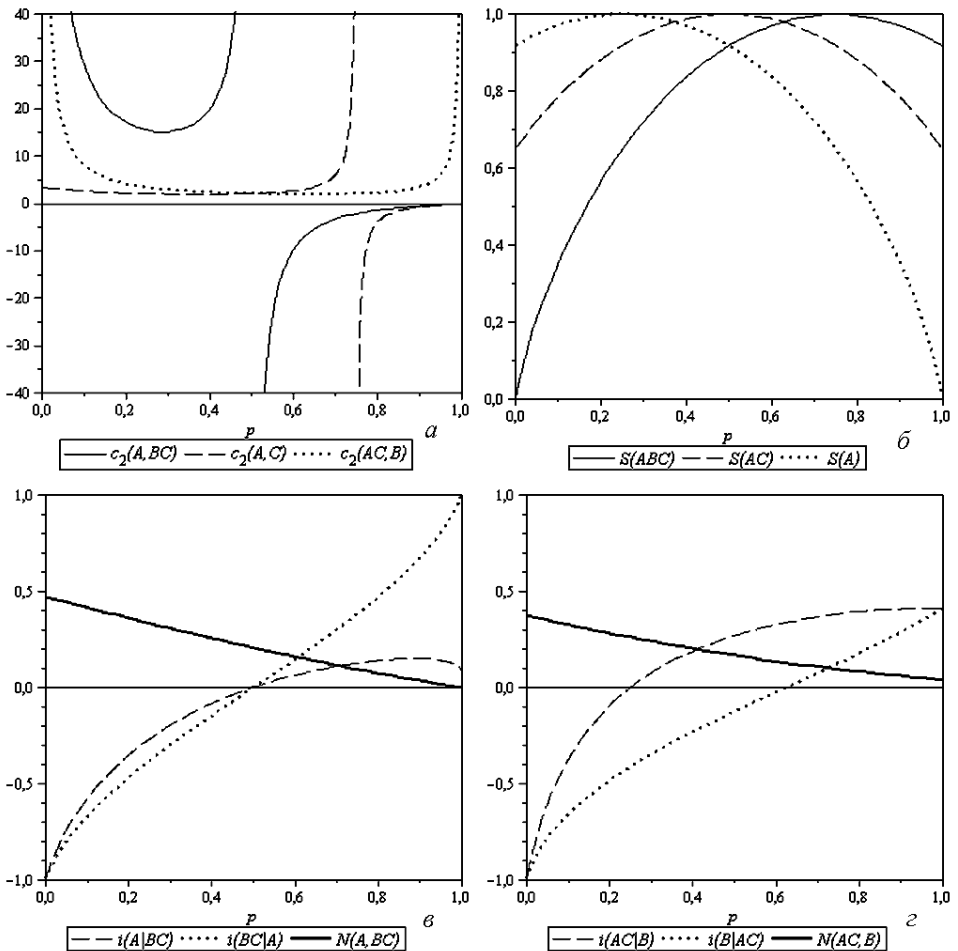


Рис. 8. Зависимость c_2 (*a*), S (*б*), i и N (*в*, *г*) от степени диссипации p частицы A для различных звеньев состояния (14)

На рис. 8, в видно, что на интервале $\frac{1}{2} < p < 1$ звено $A-BC$ классически коррелировано (обе i положительны, в отличие от рис. 5, в), но запутано. Аналогичная ситуация наблюдается на рис. 8, г при $p > 0,625$ для звена $AC-B$. Подсистема AC (рис. 9) классически коррелирована и при этом запутана, но на более широком интервале $0,375 < p < 1$.

Выводы 1–4, сделанные для диссипированного СКW-состояния остаются справедливыми для WR-состояния (с учетом меньшего значения $p = 0,390$ в количественной формулировке последнего вывода).

4. Заключение. Классический причинный анализ, имеющий уже богатую историю применения, дает две эквивалентные меры причинности. Одна из них, ход времени c_2 , оказывается применимой на квантовом уровне. Направление причинной связи находится как направление необратимого потока информации, определяемое знаком c_2 ; количественная мера этой связи определяется модулем c_2 : отсутствие причинности соответствует $|c_2| \rightarrow \infty$, т.е. чем меньше $|c_2|$, тем сильнее причинность. Это формальное определение причинности справедливо при любом направлении времени.

Возможности применения причинного анализа были продемонстрированы на серии примеров трехкубитных состояний. Примеры упорядочены согласно степени возрастания асимметрии. Вычисленные параметры причинности сравнивались со степенями смешанности и запутанности. В простейшем случае результаты формального причинного анализа соответствуют ожидаемым, но уже при малом усложнении квантовой системы интуиция не срабатывает. Таким образом, его применение ведет к нетривиальным следствиям относительно распространения квантовой информации.

Зайковский и Городецкие [14] впервые поставили вопрос об особенностях передачи квантовой информации в асимметричных системах в зависимости от ее направления. Именно решению этого вопроса и посвящена данная статья. По сравнению с первой работой по квантовому причинному анализу [4, 5], где рассматриваются лишь простые двухкубитные состояния, в данной статье мы продемонстрирова-

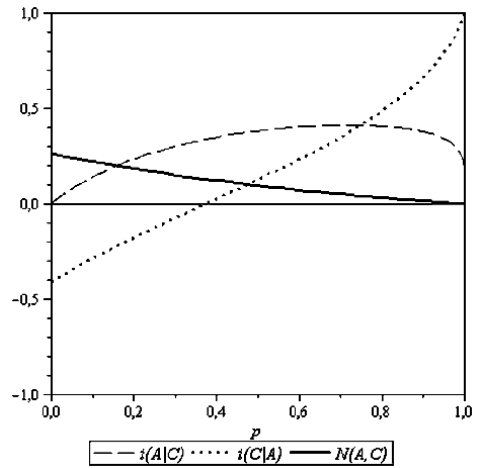


Рис. 9. Зависимость i и N от степени диссипации p частицы A для редуцированной матрицы плотности $\rho(AC)$ состояния (14)

ли специфические свойства причинности многосоставных квантовых систем.

В отличие от классического случая конечная причинность может существовать только в открытых системах, так как необходимым условием квантовой причинности является смешанность. Соответственно рассмотрение различных причинных звеньев различных квантовых состояний показало, что обычно (однако не всегда) наблюдается соотношение: чем больше смешанность, тем меньше c_2 . Смешанность асимметричных подсистем даже внутри закрытых квантовых систем ведет к появлению причинности внутри них. В случае асимметричного взаимодействия систем с окружающей средой, например за счет диссипации одной из частиц, причинность появляется даже внутри изначально симметричной системы. В системах, где уже присутствует изначально причинность, диссипация ведет к нетривиальному поведению причинности. Раскрытие системы со стороны причины (информационного источника) ведет к большей смешанности состояния, чем в случае раскрытия системы со стороны следствия (информационного стока). Диссипация общей причины разрушает квантовые корреляции, и запутанность сильнее, чем диссипация общего следствия.

Кроме того, получено, что некоторые состояния могут быть запутанными и классически коррелированными. Данный факт является очень важным для теоретического обоснования результатов экспериментов по макроскопической запутанности диссипативных систем [15–19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К о з у р е в N. A. On the possibility of experimental investigation of the properties of time // In: Time in Science and Philosophy. – Prague, Academia, 1971. – P. 111–132.
2. К о р о т а е в С. М. О возможности причинного анализа геофизических процессов. // Геомагнетизм и аэрономия. – 1992. – Т. 32. – № 1. – С. 27–33.
3. К о р о т а е в С. М. Роль различных определений энтропии в причинном анализе геофизических процессов и их приложение к электромагнитной индукции в морских течениях // Геомагнетизм и аэрономия. – 1995. – Т. 35. – № 3. – С. 116–125.
4. К о р о т а е в С. М., К и к т е н к о Е. О. Причинный анализ квантовых запутанных состояний // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2010. Ч. I – № 3. – С. 35–55. Ч. II – № 4. – С. 29–47.
5. К о р о т а е в S. M., К и к т е н к о E. O. Causal analysis of the quantum states // Search for Fundamental Theory. AIP Proceedings. – 2010. – Vol. 295. – P. 1316.
6. С р а м е р J. G. Generalized absorber theory and Einstein–Podolsky–Rosen paradox // Phys. Rev. D. – 1980. – Vol. 22. – P. 362–376.
7. B o r r a s A., P l a s t i n o A. R., C a s a s M., P l a s t i n o A. Quantum brachistochrone evolution of systems of two identical particles: The role of entanglement // Phys. Rev. A. – 2008. – Vol. 78. – P. 052104.

8. J a n g S. S., C h e o n g Y. W., K i m J. L e e H. -W. Robustness of multiparty nonlocality to local decoherence // *Phys. Rev. A.* – 2006. – Vol. 74. – P. 062112.
9. S o n g W., C h e n Z. -B. Invariant information and complementarity in high-dimensional states // *Phys. Rev. A.* – 2007. – Vol. 76. – P. 014307.
10. C o f f m a n V., K u n d u J., W o o t t e r s W. K. Distributed entanglement // *Phys. Rev. A.* – 2000. – Vol. 61. – P. 052306.
11. D ü r W. Multipartite entanglement that is robust against disposal of the particles // *Phys. Rev. A.* – 2001. – Vol. 63. – P. 020303.
12. R a j a g o p a l A. K., R e n d e l l R. W. Robust and fragile entanglement of three qubits: Relation to permutation symmetry // *Phys. Rev. A.* – 2002. – Vol. 65. – P. 032328.
13. R a j a g o p a l A. K., R e n d e l l R. W. Separability and correlation in composite states based on entropy methods // *Phys. Rev. A.* – 2002. – Vol. 66. – P. 022104.
14. Ż y c z k o w s k i K., H o r o d e c k i P., H o r o d e c k i M., H o r o d e c k i R. Dynamics of quantum entanglement // *Phys. Rev. A.* – 2002. – Vol. 65. – P. 012101.
15. K o r o t a e v S. M., S e r d y u k V. O., N a l i v a i k o V. I. N o v y s h A. V., G a i d a s h S. P., G o r o k h o v Y u. V., P u l i n e t s S. A., K a n o n i d i K h. D. Experimental estimation of macroscopic nonlocality effect in solar and geomagnetic activity // *Phys. of Wave Phenomena.* – 2003. – Vol. 11. – No. 1. – P. 46–55.
16. K o r o t a e v S. M., M o r o z o v A. N., S e r d y u k V. O., G o r o h o v J. V., M a c h i n i n V. A. Experimental study of macroscopic nonlocality of large-scale geomagnetic dissipative processes // *NeuroQuantology.* – 2005. – Vol. 3. – P. 275–294.
17. K o r o t a e v S. M. Experimental study of advanced correlation of some geophysical and astrophysical processes // *Int. J. of Computing Anticipatory Systems.* – 2006. – Vol. 17. – P. 61–76.
18. K o r o t a e v S. M., S e r d y u k V. O., G o r o h o v J. V. Forecast of solar and geomagnetic activity on the macroscopic nonlocality effect // *Hadronic Journal.* – 2007. – Vol. 30. – No. 1. – P. 39–56.
19. K o r o t a e v S. M., S e r d y u k V. O. The forecast of fluctuating large-scale natural processes and macroscopic correlations effect // *Int. J. of Computing Anticipatory Systems.* – 2008. – Vol. 20. – P. 31–46.

Статья поступила в редакцию 18.04.2011

Сергей Маратович Коротаев родился в 1950 г., окончил ЛГМИ в 1972 г. Д-р. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией ЦГЭМИ ИФЗ РАН, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 190 научных работ в области физики необратимых процессов, физических приложений теории информации, электродинамики и геофизики.

S.M. Korotaev (b. 1950) graduated from the Leningrad Hydro-Meteorological Institute in 1972. D. Sc. (Phys.-Math.), head of laboratory of the Earth’s Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 190 publications in the field of physics of irreversible processes, physical applications of theory of information, electrodynamics, and geophysics.

Евгений Олегович Киктенко родился в 1988 г., студент МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор семи научных работ в области физики квантовой информации.

Ye.O. Kiktenko (b. 1988) – student of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 7 publications in the field of physics of quantum information.