DOI: 10.18698/1812-3368-2015-6-3-15

УДК 519.6:531.66:532.516

СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КВАНТОВЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

А.А. Гурченков

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
Москва, Российская Федерация
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: challenge2005@mail.ru

Исследован спектр собственных значений квантовых систем, допускающих в классическом пределе существование квадратичных по импульсам первых интегралов. Показано, что переход от классической интегрируемой модели к квантовой является однозначным, если интегралы классической динамической системы зависят от импульсов квадратично. В этом случае квантовая интегрируемая модель допускает те же три класса интегрируемых потенциалов, что и классическая. Рассмотрены классы многопараметрических потенциалов, первый из которых асимптотически изотропен и представляет собой бесконечно глубокую яму с конечным числом критических точек, сосредоточенных в конечной области плоскости. Второй класс многопараметрических потенциалов является двумерным потенциальным барьером. Третий класс многопараметрических потенциалов — это двумерная потенциальная яма конечной глубины, которая рассмотрена в качестве примера.

Ключевые слова: многопараметрические потенциалы, скобки Пуассона, уравнение Шредингера, теорема Штурма – Лиувилля.

EIGENVALUES SPECTRUM OF QUANTUM INTEGRABLE SYSTEMS

A.A. Gurchenkov

Dorodnitsyn Computing Centre, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: challenge2005@mail.ru

The paper considers the eigenvalues spectrum of quantum systems admitting the existence of the first integrals quadratic in momenta within the classical limits. It is stated that a transfer from the classical integrable model to the quantum one is unique, if the integrals of the classical dynamic system depend on momenta quadratically. In this case, both the quantum integrable model and the classical model admit the same three sets of integrable potentials. The sets of multiparameter potentials are studied. The first set is asymptotically isotropic. It represents an infinite-depth well with a finite number of critical points concentrated on the finite area. The second set of multiparameter potentials is a two-dimensional potential barrier. The third set of multiparameter potentials is a two-dimensional potential well with a finite depth. The latter is given as an example.

Keywords: multiparameter potentials, Poisson brackets, Schrödinger equation, Sturm – Liouville theorem.

Введение. В последние годы развитие физики нелинейных явлений возродило интерес к проблеме построения вполне интегрируемых динамических систем с конечным числом степеней свободы. О возрождении интереса к этой классической проблеме свидетельствует увеличение числа работ, посвященных как попыткам конструктивного решения, так и поискам новых признаков интегрируемости [1–7].

Конечномерные модели динамики нелинейных полей и сплошных сред широко используются в современной физике и вопрос об их интегрируемости является определяющим при построении соответствующей вполне интегрируемой модели поля или сплошной среды, а также для определения степени сложности поведения системы (или степени сложности существенно нелинейных объектов).

Одна из новых тенденций — привлечение качественной теории динамических систем для исследования общей структуры фазового пространства вполне интегрируемых систем, выделения существенно нелинейных объектов, отвечающих особым решениям, и определения их структурной устойчивости. Наибольший интерес с этой точки зрения представляют интегрируемые модели со структурными параметрами, при изменении которых происходит существенная перестройка фазового пространства (меняется число и тип особых точек, рождаются или исчезают иные особые объекты) при сохранении интегрируемости модели [7–9].

Переход к соответствующим квантовым интегрируемым моделям открывает возможности для более полного исследования зависимости спектра собственных значений от структурных параметров систем с несколькими степенями свободы, а также для уточнения соответствия понятий интегрируемости в классических и квантовых системах. Анализ поведения квантовых интегрируемых моделей при учете возмущений, разрушающих их интегрируемость, должен привести к ответу на вопрос: что является аналогом утверждения классической теории Колмогорова – Арнольда – Мозера [10] для квантовых систем с несколькими степенями свободы.

Классы многопараметрических потенциалов, допускающих разделение переменных в уравнении Гамильтона – Якоби. Обратимся к уравнению Шредингера, определяющему спектр собственных значений энергии E частицы на плоскости в потенциале $U(x_1, x_2)$:

$$H\psi\left(x_1, x_2\right) = E\psi\left(x_1, x_2\right); \tag{1}$$

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + U\left(x_1, x_2\right), \quad p_j = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1,\, 2. \tag{2}$$

Рассмотрим задачу построения эрмитова оператора K, квадратичного по импульсам и коммутирующего с оператором Гамильтона H.

Возможны два представления такого оператора

$$K \to \begin{cases} K_1 = \dfrac{1}{2}\left(ap_1^2 + p_1^2 a\right) + bp_1p_2 + p_1p_2b + \dfrac{1}{2}\left(cp_2^2 + p_2^2 c\right) + V; \\ K_1 = p_1ap_1 + p_1bp_2 + p_2bp_1 + p_2cp_2 + V. \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь a, b, c и V — функции координат x_1, x_2, а условие тождественного обращения классической скобки Пуассона в нуль приводит к дополнительному интегралу классической задачи [6]. Условие тождественного обращения квантовой скобки Пуассона в нуль, например для пары операторов H и K_1, приводит к выражениям для функций a, b, c

$$a = 2\lambda x_2^2 + 2a_1x_2 + a_0,\ b = -a_1x_1 - c_1x_2 + b_0 - 2\lambda x_1x_2,\ c = 2\lambda x_1^2 + 2c_1x_1 + c_0$$

и к уравнению для потенциала $U(x_1, x_2)$, тождественно найденному для классической системы. В приведенных уравнениях λ, a_0, a_1, c_0, c_1 — произвольные постоянные. Нетрудно убедиться, что

$$K_2 = K_1 - \frac{1}{2}\hbar^{-2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 b}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 c}{\partial x_2^2}\right). \qquad (4)$$

Если квантовая скобка Пуассона пары операторов H и K_1 тождественно равна нулю, то и для пары операторов H и K_2 квантовая скобка Пуассона обращается в нуль в силу соотношений, определяющих величины a, b, c. Кроме того, в силу (4) $K_2 - K_1 = \text{const}$. Таким образом, переход от классической интегрируемой модели к квантовой является однозначным, если интегралы классической динамической системы зависят от импульсов квадратично.

Очевидно, что в этом случае квантовая интегрируемая модель допускает те же три класса интегрируемых потенциалов $U(x_1, x_2)$, что и классическая система. Первые два класса достаточно подробно описаны в работе [6], поэтому ограничимся лишь их общей характеристикой.

Первый класс многопараметрических потенциалов асимптотически изотропен $U(x_1, x_2; C_1, \ldots, C_N) \to C_N\left(x_1^2 + x_2^2\right)^N$ при $x_1^2 + x_2^2 \to \infty$. Здесь C_n — произвольные структурные параметры; N — число учитываемых параметров. При $C_N > 0$ потенциал представляет собой бесконечно глубокую яму с конечным числом критических точек (максимумов, минимумов и седел), сосредоточенных в конечной области плоскости (x_1, x_2). Усложнение потенциального рельефа в конечной области плоскости может быть достигнуто при увеличении числа учитываемых параметров C_n. Движение классической частицы для такого класса потенциалов является строго финитным. Примитивный представитель — потенциал двумерного изотропного осциллятора.

Второй класс многопараметрических потенциалов представляет собой двумерный потенциальный барьер, локальная структура поверхности которого определяется конечным числом критических точек. Крутизна барьера возрастает при увеличении числа структурных параметров. Возможность существования локальных минимумов потенциала (“карманов” на фоне барьера) приводит к возможности сосуществования финитного и инфинитного движений для некоторых значений энергии. Примитивный представитель — линейный потенциальный барьер.

Третий класс многопараметрических потенциалов представляет собой двумерную потенциальную яму конечной глубины с конечным числом критических точек, определяющих локальный рельеф ямы, и асимптотическим поведением

$$U(x_1, x_2; \ldots, C_n, \ldots) \to u(\varphi) \big/ \left(x_1^2 + x_2^2\right) \text{ при } x_1^2 + x_2^2 \to \infty, \qquad (5)$$

где $u(\varphi)$ — ограниченная функция полярного угла φ. Движение частицы в таком потенциале либо строго финитно, либо инфинитно. Явное выражение для соответствующего примитивного потенциала будет приведено ниже. Следует отметить, что третий класс потенциалов в действительности шире, так как наряду с подклассом двумерных потенциальных ям конечной глубины он включает в себя подкласс сингулярных многопараметрических потенциалов, для которых носителем сингулярности является кривая второго порядка.

Для всех выделенных многопараметрических интегрируемых потенциалов, связанных с существованием пары коммутирующих операторов H и K вида (2) и (3), справедливо утверждение.

Утверждение. Уравнение Шредингера (1) допускает разделение переменных в определенной ниже ортогональной сетке переменных q_1, q_2 и приводит к двухпараметрической задаче на собственные значения

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sqrt{-m(q_1)}\frac{d}{dq_1}\left(\sqrt{-m(q_1)}\,\frac{d\psi_1}{dq_1}\right) - U(q_1)\,\psi_1 + Eq_1\psi_1 = \Lambda\psi_1; \\ -\frac{1}{2}\sqrt{m(q_2)}\frac{d}{dq_2}\left(\sqrt{m(q_2)}\,\frac{d\psi_2}{dq_2}\right) + U(q_2)\,\psi_2 - Eq_2\psi_2 = -\Lambda\psi_2. \end{aligned} \qquad (6)$$

Здесь Λ — параметр разделения; $U(q) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n q^n$; C_n — структурные параметры описанных выше интегрируемых потенциалов;

$$m(q) = 8\lambda\left(q^2 - (A_0 + C_0)\,q + A_0 C_0 - B_0^2\right), \qquad (7)$$

$\psi(x_1, x_2) = \psi_1(q_1)\,\psi_2(q_2)$. Новые переменные q_1, q_2 определены корнями уравнения $q^2 - (a + c)\, q + ac - b^2 = 0$, в котором

$$\begin{aligned}&a = 2\lambda X_2^2 + A_0,\ b = -2\lambda X_1 X_2 + B_0,\ c = 2\lambda X_1^2 + C_0;\\&X_1 = x_1 + c_1/2\lambda,\ X_2 = x_2 + a_1/2\lambda;\\&A_0 = a_0 - a_1^2/2\lambda,\ B_0 = b_0 + a_1 c_1/2\lambda,\ C_0 = c_0 - c_1^2/2\lambda.\end{aligned}$$

Нет необходимости в проведении подробного доказательства утверждения, так как алгебраическая структура соответствующих классических интегралов H и K предопределяет возможность приведения функции Гамильтона к лиувиллевскому виду и разделению переменных в уравнении Гамильтона – Якоби. Последнее влечет за собой разделение переменных в уравнении Шредингера. Вопросом, требующим более внимательного рассмотрения, является задача расширения локальной ортогональной сетки переменных q_1, q_2 до глобальной системы координат.

При произвольном заданном значении энергии E система (6) определяет две одномерные задачи Штурма – Лиувилля для собственных значений параметра разделения Λ. На плоскости параметров (Λ, E) для каждой одномерной задачи (6) сравнительно просто может быть найдена область существования точечного и сплошного спектров параметра Λ.

Точечный спектр исходной двумерной задачи представлен на плоскости (Λ, E) узлами решетки, образованной пересечениями двух семейств кривых $\Lambda_n^{(1)}(E)$ и $\Lambda_n^{(2)}(E)$, каждое из которых связано с зависимостью точечного спектра параметра Λ от энергии E для одномерных задач (6).

Непрерывный параметр на плоскости (Λ, E) может быть представлен пересечением семейства кривых точечного спектра одной из одномерных задач (6) с областью сплошного спектра другой из задач (6). В этом случае возникает сплошной конечнократно вырожденный спектр двумерной задачи. Пересечение областей сплошного спектра одномерных задач (6) приводит к бесконечнократно вырожденному сплошному спектру двумерной задачи. Реализация типа сплошного спектра определяется принадлежностью интегрируемого потенциала ко второму или третьему классу. Первый класс потенциалов приводит к строго точечному спектру двумерной задачи.

Отметим, что возможность упорядочения собственных значений одномерных задач (6) на основе теорем Штурма – Ливувилля (исключающая, например, пересечения кривых $\Lambda_n^{(i)}(E)$, принадлежащих одному семейству) в значительной степени предопределяет общую структуру спектра двумерной интегрируемой системы.

Замечание. К двухпараметрической задаче на собственные значения типа (6) приводят интегрируемые потенциалы задачи о движении точки на сфере, связанные с существованием дополнительного интеграла, квадратичного по обобщенным импульсам [7]. При этом сохраняется представление интегрируемого потенциала в виде (6), но в отличие от вида (7) функция является многочленом третьей степени.

В силу того, что рассматриваемое уравнение Шредингера допускает разделение переменных $\psi\left(x_1, x_2\right) = \psi_1\left(q_1\right)\psi_2\left(q_2\right)$, нулевой уровень собственной функции образован пересекающимися координатными линиями ($q_1 =$ const). Такая ситуация не является случаем общего положения и может быть разрушена малым возмущением — при переходе к потенциалу, не допускающему разделения переменных. Это может стать основой алгоритма (например, численного) для определения возможности разделения переменных. Такой алгоритм представляет собой аналог метода Хенона – Хейлеса для установления интегрируемости гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [11–16].

Спектр собственных значений энергии частицы в двумерной потенциальной яме. В качестве примера рассмотрим задачу о спектре собственных значений энергии частицы в двумерной потенциальной яме конечной глубины. Соответствующий примитивный потенциал

$$U\left(x_1, x_2\right) = -\frac{U_0}{ac - b^2} = -\frac{U_0}{q_1 q_2} = \\ = -\frac{U_0}{2\lambda\left(A_0 X_1^2 + 2B_0 X_1 X_2 + C_0 X_2^2\right) + \left(A_0 C_0 - B_0^2\right)}$$

определяет потенциальную яму конечной глубины при дополнительном условии регулярности $ac - b^2 > 0$. Это условие выполняется, например, в случае $\lambda > 0$, $A_0 > 0$, $C_0 > 0$, $B_0 = 0$. Используя униформизующую замену переменных

$$q_1 \to \varphi = \sqrt{2\lambda}\int\limits_{C_0}^{q_1} \frac{dq}{\sqrt{-m(q)}}, \quad q_2 \to \rho = \sqrt{2\lambda}\int\limits_{A_0}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{m(q)}}, \\ C_0 < q_1 < A_0, \quad A_0 < q_2 < \infty,$$

которая с учетом (7) приводит к выражениям

$$q_1 = \frac{1}{2}\left(A_0 + C_0\right)\left(1 + \nu\cos 2\varphi\right), \quad q_2 = \frac{1}{2}\left(A_0 + C_0\right)\left(1 + \nu\,\mathrm{ch}\,2\rho\right); \\ 0 < \nu = \left(A_0 - C_0\right)/\left(A_0 + C_0\right) < 1,$$

находим, что уравнения (7) принимают вид

$$-\frac{d^2\psi_1}{d\varphi^2} - \frac{V_0}{1 + \nu\cos 2\varphi}\psi_1 + \varepsilon\left(1 + \nu\cos 2\varphi\right)\,\psi_1 = \Lambda_\lambda\psi_1, \;\; \varphi \in [0, 2\pi]; \\ -\frac{d^2\psi_2}{d\rho^2} + \frac{V_0}{1 + \nu\,\mathrm{ch}\,2\rho}\psi_2 - \varepsilon\left(1 + \nu\,\mathrm{ch}\,2\rho\right)\,\psi_2 = -\Lambda_\lambda\psi_2, \;\; \rho \in [0, \infty]. \tag{8}$$

Здесь $V_0 = \dfrac{U_0}{2\lambda\left(A_0 + C_0\right)}$; $\varepsilon = \dfrac{A_0 + C_0}{8\lambda} E$; $\Lambda_\lambda = \dfrac{\Lambda}{2\lambda}$. Отметим, что параметр ν определяет эллиптичность линий уровня потенциальной ямы.

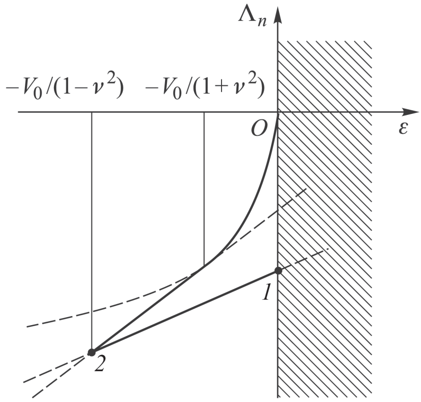
Поскольку отображение $(\rho, \varphi) \to (x_1, x_2)$ обладает особенностью при $\rho = 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, для обеспечения дважды непрерывной дифференцируемости волновой функции $\psi\left(x_1, x_2\right)$ на функции $\psi_1\left(\varphi\right)$, $\psi_2\left(\rho\right)$ следует наложить дополнительные условия. Для того чтобы $\psi\left(x_1, x_2\right) \in C^2$ необходимо и достаточно выполнения одного из двух условий:

$$1)\ \psi_1\left(0\right) = \psi_1\left(\pi\right) = 0, \ \ \psi_2\left(0\right) = 0; \tag{9}$$

$$2)\ \left.\frac{d\psi_1}{d\varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{d\psi_1}{d\varphi}\right|_{\varphi=\pi} = 0, \ \ \left.\frac{d\psi_2}{d\rho}\right|_{\rho=0} = 0. \tag{10}$$

При выполнении условий (9) или (10) функция $\psi_1\left(\varphi\right)$ будет 2π-периодической.

Качественный анализ спектра собственных значений одномерных задач (8) с учетом возможностей продолжения решений на всю плоскость (x_1, x_2) привел к структуре спектра двумерной задачи, изображенной на рисунке. В области *O12* точки пересечения двух семейств кривых $\Lambda = \Lambda_n^{(i)}\left(\varepsilon\right)$, монотонно возрастающих с увеличением значения ε, определяют точечный спектр двумерной задачи. Точке *2*, ограничивающей точечный спектр снизу, соответствует значение $\varepsilon = -V_0 / \left(1 - \nu^2\right)$, совпадающее с простой оценкой энергии основного состояния по глубине потенциальной ямы. Сплошной спектр расположен в заштрихованной области. Для собственных значений $\Lambda_n^{(i)}\left(\varepsilon\right)$ справедливо неравенство $d\left(\Lambda_n^{(1)} - \Lambda_m^{(2)}\right) \Big/ d\varepsilon < 0$, означающее, что на плоскости (Λ, ε) кривые $\Lambda_n^{(i)}\left(\varepsilon\right)$ пересекаются трансверсально при $\varepsilon < 0$. Можно предположить, что $\Lambda_n^{(2)}\left(\varepsilon\right) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ со стороны отрицательных значений. Такое предположение связано с тем, что потенциальная яма с асимптотикой (5) приводит к счетному множеству точек точечного спектра, обладающих точкой сгущения $\varepsilon = 0$. При заданных значениях параметров двумерной ямы V_0, ν с семейством кривых $\Lambda_n^{(2)}\left(\varepsilon\right)$ может пересечься только конечное число кривых семейства $\Lambda_n^{(1)}\left(\varepsilon\right)$ и это число



Структура спектра двумерной задачи

при всех значениях параметров V_0, ν отлично от нуля. Последнее обусловлено тем, что одномерная потенциальная яма конечной глубины всегда приводит к существованию точечного спектра.

Квантовые интегрируемые системы и их обобщения. Сделаем замечание о структуре спектра собственных значений энергии для первого класса интегрируемых потенциалов. При $C_N > 0$ спектр является строго конечным. В этом случае штурм-лиувиллевский характер одномерных задач (6) позволяет предсказать возможные "движения" узлов решетки точечного спектра при изменении структурных параметров интегрируемого потенциала. Семейства кривых $\Lambda_n^{(i)}(\varepsilon)$ могут быть определены на всей ε-оси, а их пересечения трансверсальны. Несмотря на то, что на плоскости (Λ, ε) не возникает кратного спектра, проекции различных узлов точечной решетки на ось ε могут при изменении структурных параметров потенциала приводить к рождению и распаду кратного точечного спектра собственных значений энергии.

Сделаем замечания о возможных обобщениях рассмотренных выше интегрируемых моделей. В качестве первого примера рассмотрим динамическую систему с тремя степенями свободы, определенную функцией Гамильтона: $H = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{3} p_i^2 + U(x_1, x_2, x_3)$. Предположение о существовании одного дополнительного интеграла вида

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x_1, x_2, x_3)\, p_i p_j + V(x_1, x_2, x_3) \tag{11}$$

приводит к следующей системе уравнений для метрических коэффициентов a_{ij}:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} = \frac{\partial a_{33}}{\partial x_3} = 0,\ \frac{\partial a_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_3} = 0;\\
2\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} = 0,\ 2\frac{\partial a_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{11}}{\partial x_3} = 0,\ 2\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} = 0;\\
2\frac{\partial a_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_3} = 0,\ 2\frac{\partial a_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_1} = 0,\ 2\frac{\partial a_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial a_{33}}{\partial x_2} = 0
\end{gathered} \tag{12}$$

и соотношениям для пары сопряженных потенциалов U и V: $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial V}{\partial x_i} = \sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}\dfrac{\partial U}{\partial x_j}$, $i = 1, 2, 3$. Решения системы уравнений для метрических коэффициентов имеют вид

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + A_2x_2 + A_3x_3 + a_{11}^0;\\
&a_{22} = A_{22}x_1^2 + B_{33}x_3^2 + B_1x_1 + B_3x_3 + a_{22}^0;\\
&a_{33} = A_{33}x_1^2 + B_{33}x_2^2 + C_1x_1 + C_2x_2 + a_{33}^0;\\
&2a_{12} = -2A_{22}x_1x_2 - A_2x_1 - B_1x_2 + 2a_{12}^0;\\
&2a_{13} = -2A_{33}x_1x_3 - A_3x_1 - C_1x_3 + 2a_{13}^0;\\
&2a_{23} = -2B_{33}x_2x_3 - B_3x_2 - C_2x_3 + 2a_{23}^0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Условия разрешимости соотношений (12) приводят к трем уравнениям для потенциала

$$
(a_{11}-a_{22})\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} - a_{12}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\right) + a_{13}\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3} - a_{23}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} -
$$
$$
-3\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) = 0;
$$
$$
(a_{11}-a_{33})\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} - a_{13}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}\right) + a_{12}\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3} - a_{23}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} -
$$
$$
-3\left(\frac{\partial a_{13}}{\partial x_1}\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{13}}{\partial x_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right) = 0;
$$
$$
(a_{22}-a_{33})\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_3} - a_{23}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}\right) + a_{12}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_3} - a_{13}\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} -
$$
$$
-3\left(\frac{\partial a_{23}}{\partial x_2}\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial a_{23}}{\partial x_3}\frac{\partial U}{\partial x_3}\right) = 0.
$$

Очевидно, что предположение о существовании одного дополнительного интеграла вида (12) вместо двух необходимых для полной интегрируемости в случае трех степеней свободы приводит к переопределенной системе уравнений для одной функции трех переменных. В качестве простого примера рассмотрим случай, когда $a_{13} = a_{23} = 0$. Система (14) допускает решения вида $U(x_1, x_2, x_3) = U(x_1, x_2) + u(x_3)$. При этом $u(x_3)$ — произвольно, а $U(x_1, x_2)$ — решение уравнения

$$
(a_{11}-a_{22})\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} - a_{12}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\right) - 3\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}\frac{\partial U}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) = 0,
$$

исследованного ранее в работе [6]. В качестве следующего примера рассмотрим задачу о парном взаимодействии трех точек на прямой. Пусть

$$
U(x_1, x_2, x_3) = U_{12}(x_1 - x_2) + U_{13}(x_1 - x_3) + U_{23}(x_2 - x_3) \tag{14}
$$

и, кроме того, в выражениях для метрических коэффициентов a_{ij} (13) $A_{23} = A_{33} = B_{33} = a^*_{ij} = 0$. Несложные вычисления указывают на то, что при $A_2 = A_3 = B_1 = B_3 = c_1 = c_2$ каждое уравнение (14) допускает решение методом разделения переменных (по отношению к переменным $\xi_{12} = x_1 - x_2$, $\xi_{13} = x_1 - x_3$, $\xi_{23} = x_2 - x_3$) и приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$\xi_{ij}\frac{d^2U_{ij}}{d\xi_{ij}^2} + \zeta\frac{dU_{ij}}{d\xi_{ij}} = \gamma_{ij} = \text{const}, \;\; j > i. \qquad (15)$$

Решения системы (15) совместны, по крайней мере при $\gamma_{ij} = 0$ и приводят к потенциалу

$$U\left(x_1, x_2, x_3\right) = \sum_{j>i}\frac{\alpha_{ij}}{\left(x_i - x_j\right)^2}, \qquad (16)$$

допускающему существование дополнительного интеграла вида (11). В этом случае задача является вполне интегрируемой (напомним, что существует очевидный интеграл $\sum p_i = \text{const}$) [3]. Таким образом, переопределенная система уравнений (14) приводит к некоторым из известных случаев интегрируемости гамильтоновых систем с тремя степенями свободы, а ее более полное исследование может дать ответ на вопрос: каково множество гамильтоновых систем с тремя степенями свободы, допускающее существование одного дополнительного интеграла, квадратичного по импульсам? Предположение о существовании двух квадратичных и диагональных по обобщенным импульсам первых интегралов

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} G_i\left(q_1, q_2, q_3\right)p_i^2 + U\left(q_1, q_2, q_3\right); \qquad (17)$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} a_i\left(q_1, q_2, q_3\right)p_i^2 + V\left(q_1, q_2, q_3\right) \qquad (18)$$

приводит (в силу условия тождественного обращения скобки Пуассона в нуль) к системе дифференциальных соотношений между метрическими коэффициентами G_i и a_i

$$\frac{\partial G_i}{\partial q_j}a_j - G_j\frac{\partial a_i}{\partial q_j} = 0$$

и между парой сопряженных потенциалов U и V

$$a_i\frac{\partial U}{\partial q_i} = G_i\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

При $i = j$ соотношения (18) приводят к связи между коэффициентами G_i и a_i вида

$$a_i\left(q_1, q_2, q_3\right) = A_i\left(q_k, q_l\right)\, G_i\left(q_1, q_2, q_3\right), \;\; k \neq i, \;\; l \neq i, \;\; k \neq l.$$

Здесь A_i — произвольные функции двух независимых переменных. При $i \neq j$ соотношения (17) приводят к представлению метрических коэффициентов $G_i\left(q_1, q_2, q_3\right)$ через функции не более чем двух независимых переменных

$$G_j\left(q_1, q_2, q_3\right) = \frac{F_{jl}\left(q_j, q_m\right)}{A_j\left(q_l, q_m\right) - A_l\left(q_j, q_m\right)} = \frac{F_{jm}\left(q_j, q_l\right)}{A_j\left(q_l, q_m\right) - A_m\left(q_j, q_l\right)},$$
$$l \neq m, \;\; j \neq l, \;\; m \neq j.$$

где F_{jl} — произвольные функции.

Если предположить, что $F_{jl} = f_j\left(q_j\right)$, т.е. являются функцией одной переменной, и

$$\begin{aligned} &A_3\left(q_1, q_2\right) = 2A_1\left(q_2, q_3\right) - A_2\left(q_1, q_3\right); \\ &A_1\left(q_2, q_3\right) = A_1\left(q_2\right) + \gamma A\left(q_3\right); \\ &A_2\left(q_1, q_3\right) = A_2\left(q_1\right) + 2\gamma A\left(q_3\right), \;\; \gamma = \text{const}, \end{aligned}$$

то функция Гамильтона (16) приводится к виду

$$H = \frac{1}{2}\frac{f_1\left(q_1\right)p_1^2 - f_2\left(q_2\right)p_2^2 + f_3\left(q_3\right)p_3^2}{A_1\left(q_2\right) - A_2\left(q_1\right) - \gamma A\left(q_3\right)} + U\left(q_1, q_2, q_3\right).$$

Для потенциалов, удовлетворяющих условию

$$\left[A_1\left(q_2\right) - A_2\left(q_1\right) - \gamma A\left(q_3\right)\right] U\left(q_1, q_2, q_3\right) = u_1\left(q_1\right) + u_2\left(q_2\right) + u_3\left(q_3\right),$$

функция Гамильтона принимает лиувиллевский вид, явно указывающий на интегрируемость системы. Однако более содержательным, на взгляд автора настоящей работы, является уточнение структуры функций двух переменных F и A из условий того, что трехмерное многообразие обобщенных координат $\left(q_1, q_2, q_3\right)$ представляет собой, например, ортогональную сетку в евклидовом пространстве (пространство нулевой кривизны).

Заключение. Дальнейшие исследования спектральных свойств квантовых систем будут опираться на изучение структур в нелинейных векторных полях и вопросов, связанных с бифуркациями в квантовой механике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fordy A.P.* Hamiltonian symmetries of the Henon – Heiles systems // Phys. Lett. 1983. Vol. 97A. No. 1–2. P. 21–23.
2. *Romani A.*, *Dorizzi B.*, *Grammaticos B.* Painleve conjecture revisited // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 49. No. 21. P. 1539–1541.
3. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 3–67.
4. *Колокольцов В.Н.* Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 994–1010.

5. *Hientarinta J.* Integrable families of Henon – Heiles — type Hamiltonians and a new duality // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28. No. 6. P. 3670–3671.
6. *Елеонский В.М.*, *Кулагин Н.Е.* Интегрируемые модели в задаче о движении частицы в двумерной потенциальной яме // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. № 4 (10). С. 1437–1445.
7. *Елеонский В.М.*, *Кулагин Н.Е.* О новых случаях интегрируемости уравнений Ландау – Лифшица // ЖЭТФ. 1983. Т. 84. № 2. С. 616–628.
8. *Лерман Л.М.*, *Уманский Н.Л.* Необходимые условия существования гетероклинических траекторий в интегрируемой гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // УМН. 1983. Т. 38. № 5. С. 195–196.
9. *Лерман Л.М.*, *Уманский Н.Л.* О существовании петель сепаратрис в четырехмерных системах, близких к интегрируемым // ПММ. 1983. Т. 47. № 3. С. 395–403.
10. *Hose G.*, *Taylor H.S.* Quantum Kolmogorov – Arnol'd – Moser — like theorem: fundamentals of localization in quantum theory // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. No. 11. P. 947–950.
11. *Henon M.*, *Heiles C.* The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments // Astron. J. 1964. Vol. 69. No. 1. P. 73–79.
12. *Гурченков А.А.*, *Кулагин Н.Е.* Локализованные и периодические решения в моделях нелинейного скалярного поля. М.: ВЦ РАН, 2004. 87 с.
13. *Гурченков А.А.*, *Кулагин Н.Е.* Об узорах симметрии в простых моделях нелинейного скалярного поля. М.: ВЦ РАН, 2005. 190 с.
14. *Гурченков А.А.*, *Кулагин Н.Е.* Слоистые структуры в нелинейных векторных полях. М.: ВЦ РАН, 2005. 130 с.
15. *Гурченков А.А.*, *Кулагин Н.Е.* О сопоставлении бифуркаций в классической и квантовой механике. М.: ВЦ РАН, 2009. 87 с.
16. *Гурченков А.А.* Функция распределения квантового ферми-газа в задаче об испарении. Динамика неоднородных систем // Труды ИСА РАН. 2008. Т. 32 (3). С. 8–17.

REFERENCES

[1] Fordy A.P. Hamiltonian symmetries of the Henon – Heiles systems. *Phys. Lett.*, 1983, vol. 97A, no. 1–2, pp. 21–23.

[2] Romani A., Dorizzi B., Grammaticos B. Painleve conjecture revisited. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, vol. 49, no. 21, pp. 1539–1541.

[3] Kozlov V.V. Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics. *Usp. Mat. Nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1983, vol. 38, no. 1, pp. 3–67.

[4] Kolokol'tsov V.N. Geodesic flows on two-dimensional manifolds with an additional first integral that is polynomial in the velocities. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1982, vol. 46, no. 5, pp. 994–1010.

[5] Hientarinta J. Integrable families of Henon – Heiles — type Hamiltonians and a new duality. *Phys. Rev. A*, 1983, vol. 28, no. 6, pp. 3670–3671.

[6] Eleonskiy V.M., Kulagin N.E. Integrable models in the problem for particle motion in a two-dimensional potential well. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* [J. Exp. Theor. Phys.], 1983, vol. 85, no. 4 (10), pp. 1437–1445.

[7] Eleonskiy V.M., Kulagin N.E. New cases of integrability of the Landau – Lifshitz equations. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* [J. Exp. Theor. Phys.], 1983, vol. 84, no. 2, pp. 616–628.

[8] Lerman L.M., Umanskiy N.L. Necessary conditions for the existence of heteroclinic trajectories in an integral Hamiltonian system with two degrees of freedom. *Usp. Mat. Nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1983, vol. 38, no. 5, pp. 195–196.

[9] Lerman L.M., Umanskiy N.L. The Existence of Separatrix Loops in 4D Systems Close to Integrable Ones. *Prikladnaya Mat. Mekh.* [J. Appl. Math. Mech.], 1983, vol. 47, no. 3, pp. 395–403 (in Russ.).

[10] Hose G., Taylor H.S. Quantum Kolmogorov – Arnol'd – Moser — like theorem: fundamentals of localization in quantum theory. *Phys. Rev. Lett.*, 1983, vol. 51, no. 11, pp. 947–950.
[11] Henon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. *Astron. J.*, 1964, vol. 69, no. 1, pp. 73–79.
[12] Gurchenkov A.A., Kulagin N.E. Lokalizovannye i periodicheskie resheniya v modelyakh nelineynogo skalyarnogo polya [Localized and Periodic Solutions in Nonlinear Scalar Field Models]. Moscow, VTs RAN (Institute for System Research, Russian Academy of Sciences) Publ., 2004. 87 p.
[13] Gurchenkov A.A., Kulagin N.E. Ob uzorakh simmetrii v prostykh modelyakh nelineynogo skalyarnogo polya [On the Patterns of Symmetry in Simple Models of the Nonlinear Scalar Field]. Moscow, VTs RAN (Institute for System Research, Russian Academy of Sciences) Publ., 2005, 190 p.
[14] Gurchenkov A.A., Kulagin N.E. Sloistye struktury v nelineynykh vektornykh polyakh [The Layered Structures in Nonlinear Vector Fields]. Moscow, VTs RAN (Institute for System Research, Russian Academy of Sciences) Publ., 2005. 130 p.
[15] Gurchenkov A.A., Kulagin N.E. O sopostavlenii bifurkatsiy v klassicheskoy i kvantovoy mekhanike [On Comparison of Bifurcations in the Classical and Quantum Mechanics]. Moscow, VTs RAN (Institute for System Research, Russian Academy of Sciences) Publ., 2009. 87 p.
[16] Gurchenkov A.A. The Distribution Function of Quantum Fermi Gas in the Problem of Evaporation. The Dynamics of Inhomogeneous Systems. *Tr. Inst. Sist. Analiza RAN* [Proc. Inst. for Systems Analysis of the Russian Academy of Sciences (ISA RAS)], 2008, vol. 32 (3), pp. 8–17 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 15.06.2015

Гурченков Анатолий Андреевич — д-р физ.-мат. наук, сотрудник ВЦ РАН, профессор кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.
ВЦ РАН, Российская Федерация, 119333, Москва, ул. Вавилова, д. 40.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Gurchenkov A.A. — D.Sc. (Phys.-Math.), Fellow of Dorodnitsyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Professor, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University.
Dorodnitsyn Computing Centre, Russian Academy of Sciences, ul. Vavilova 40, Moscow, 119333 Russian Federation.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Гурченков А.А. Спектр собственных значений квантовых интегрируемых систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 6. С. 3–15.

Please cite this article in English as:

Gurchenkov A.A. Eigenvalues spectrum of quantum integrable systems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 6, pp. 3–15.