УДК 532.59

С. О. Юрченко, И. Н. Алиев

О КВАНТОВАНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ОДНОРОДНОМ ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрены малые возмущения поверхности диэлектрической идеальной жидкости в зазоре между двумя плоскими электродами. Показано, что линеаризованный гамильтониан системы, отнесенный к единице длины по горизонтали, может быть представлен в виде суммы гамильтонианов гармонических осцилляторов. Установлено, что влияние электрического поля приводит к появлению выделенного масштаба возмущений, а неустойчивость поверхности в электрическом поле можно трактовать как бозе-конденсацию квантов поверхностных возбуждений (электрориpплонов).

E-mail: st.yurchenko@mail.ru

Ключевые слова: квантование поля, поверхностные возмущения, электрогидродинамика.

Квантование малых возмущений. Рассмотрим систему, состоящую из горизонтального слоя невязкой диэлектрической жидкости конечной глубины в зазоре между двумя электродами; пространство над поверхностью жидкости будем считать вакуумом. Предполагается, что слой жидкости неограничен по горизонтали, поэтому будем рассматривать гамильтониан жидкости, отнесенный к единице длины по горизонтали (далее — горизонтальная плотность гамильтониана). Традиционный вывод дисперсионных уравнений для волн на поверхности жидкостей [1], в том числе, во внешнем электрическом поле [2], производится при помощи “силового” способа — использования граничных условий для тензора напряжений, а также кинематических соотношений. В настоящей работе предложен другой способ, приводящий к тем же результатам (дисперсионные соотношения можно сравнить с [3, 4]).

Горизонтальная плотность гамильтониана системы складывается из компонент, связанных с кинетической энергией и энергией жидкости в электрическом поле, энергии свободной поверхности и потенциальной энергии в поле сил тяжести:

$$H = \frac{\rho}{2}\int\limits_{-h_1}^{\xi} (\nabla\Phi)^2 dz - \frac{1}{8\pi}\int\limits_{-h_1}^{\xi} \frac{(\nabla\varphi_1)^2}{\epsilon} dz - \\ - \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\xi}^{h_2} (\nabla\varphi_2)^2 dz + \gamma\sqrt{1+(\partial_x\xi)^2} + \frac{\rho g \xi^2}{2}, \qquad (1)$$

где ρ, h_1 — плотность и толщина слоя жидкости; h_2 — зазор между невозмущенной поверхностью жидкости и верхним электродом; γ — коэффициент поверхностного натяжения; ϵ — диэлектрическая проницаемость жидкости; $\xi(x,t)$ – отклонение поверхности от равновесного положения; φ_1, φ_2 — потенциалы электрического поля в диэлектрике и вакууме; Φ — потенциал поля скоростей; g — ускорение свободного падения; ∂_x — частная производная по x; ∇ — градиент в вертикальной плоскости xz.

Потенциалы поля скоростей Φ и электростатических полей $\varphi_{1;2}$ в диэлектрике и вакууме определяются следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\varphi_{1;2} = 0, \\ &z = -h_1: \quad \partial_z\Phi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \qquad z = h_2: \quad \varphi_2 = \varphi_0, \\ &z = \xi: \quad \partial_z\Phi = \dot{\xi}, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon(\nabla\varphi_1)_n = (\nabla\varphi_2)_n, \end{aligned} \qquad (2)$$

где индекс n означает проекцию на нормаль к поверхности жидкости, а ∂_z — частную производную по z. Трудность решения уравнений (2) связана с тем, что граничные условия задаются на поверхности $z = \xi$. Поэтому решение можно искать в виде разложения по отношению амплитуды возмущения к глубине нижней (или верхней) жидкости. Граничные условия при этом нужно “переносить” с поверхности $z = \xi$ на поверхность $z = 0$.

Для волновых возмущений малой амплитуды вида $\xi_k = Q_k \exp ikx$ решение линеаризованных задач (2) имеет вид

$$\begin{aligned} &\Phi_k = \dot{Q}_k(\operatorname{sh} kz + \operatorname{cth} kh_1 \operatorname{ch} kz)e^{ikx}/k, \\ &\varphi_{1k} = \frac{\varphi_0(z+h_1)}{h_1+\epsilon h_2} + \frac{\varphi_0(\epsilon-1)(\operatorname{sh} kz + \operatorname{th} kh_1 \operatorname{ch} kz)e^{ikx}Q_k}{(h_1+\epsilon h_2)(\operatorname{th} kh_1 + \epsilon \operatorname{th} kh_2)}, \\ &\varphi_{2k} = \varphi_0 + \frac{\epsilon\varphi_0(z-h_2)}{h_1+\epsilon h_2} + \frac{\varphi_0\epsilon(\epsilon-1)(\operatorname{sh} kz - \operatorname{th} kh_2 \operatorname{ch} kz)e^{ikx}Q_k}{(h_1+\epsilon h_2)(\operatorname{th} kh_1 + \epsilon \operatorname{th} kh_2)}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Случаю, когда нижний слой жидкости представляет собой хороший проводник, соответствует предел $\epsilon \to \infty$, откуда следует, что $\varphi_{1k} \equiv 0$, а для φ_{2k} справедливо соотношение

$$\varphi_{2k} = \frac{\varphi_0}{h_2} z + \frac{\varphi_0(\operatorname{sh} kz - \operatorname{th} kh_2 \operatorname{ch} kz) e^{ikx} Q_k}{h_2 \operatorname{th} kh_2}.$$

Линеаризация (1), подстановка решений (3) и последующее усреднение по одной длине волны возмущения ξ_k приводят к выражению для горизонтальной плотности гамильтониана возмущения в виде

$$\begin{gathered} H_k = \frac{\rho \dot{Q}_k^2}{2k \operatorname{th} kh_1} + \frac{Q_k^2}{2}\left(\gamma k^2 - \alpha k + \rho g\right), \\ \alpha = \frac{\varphi_0^2(\epsilon - 1)^2}{4\pi(h_1 + \epsilon h_2)^2(\operatorname{th} kh_1 + \epsilon \operatorname{th} kh_2)}. \end{gathered} \tag{4}$$

Таким образом, элементарное волновое возмущение аналогично гармоническому осциллятору, а горизонтальная плотность гамильтониана поля возмущений находится как сумма (4) по всем осцилляторам:

$$\begin{gathered} H = \sum_k H_k = \frac{1}{2} \sum_k \left(p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2\right), \\ \omega_k^2 = \left(\gamma k^2 - \alpha k + \rho g\right) \frac{k \operatorname{th} kh_1}{\rho}. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь введены координаты q_k, импульсы p_k, массы m_k и частоты ω_k осцилляторов:

$$q_k = \sqrt{m_k} Q_k, p_k = \sqrt{m_k} \dot{Q}_k, m_k = \frac{\rho}{k \operatorname{th} kh_1}.$$

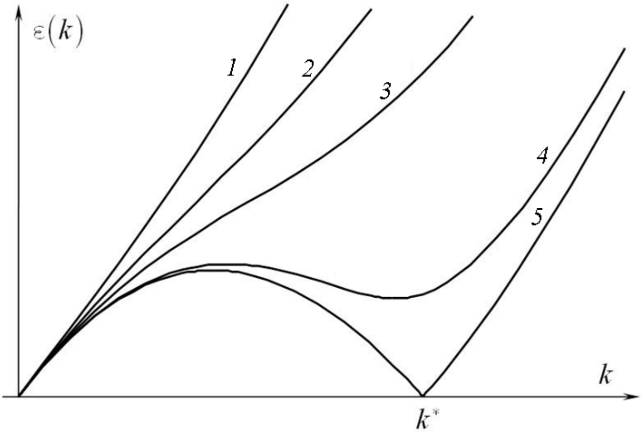
При $\omega_k^2 > 0$ гамильтониан (4) является положительно определенным, а при $\omega_k^2 < 0$ наступает неустойчивость по отношению к малым возмущениям (параметр α принимает критическое значение α^*).

Следствия квантования поверхностных возмущений. Выражения (4) и (5) позволяют рассматривать малые возмущения поверхности как ансамбль возбуждений квазичастиц с импульсами $p_k = \hbar k$ и энергетическим спектром $\varepsilon = \hbar\omega_k$, где $\hbar$ — постоянная Планка (рисунок).

Свободная энергия для ансамбля поверхностных возбуждений имеет вид [5]

$$F = \int_0^\infty \frac{1}{1 - e^{\varepsilon/T}} \frac{d\varepsilon}{dk} \frac{k^2}{2\pi} dk = \int f_k dk, \tag{6}$$

где учтено двукратное вырождение каждого возбуждения (волна вправо и влево), температура отнесена к постоянной Больцмана, а f_k — спектральная плотность свободной энергии. Химический потенциал системы бозонов с переменным числом частиц равен нулю.



Характерный вид энергетического спектра электрориппплонов:
1 — $\alpha = 0$; *2–4* — $0 < \alpha < \alpha^*$; *5* — $\alpha = \alpha^*$

С учетом выражения (6) для спектральной плотности энтропии s_k и теплоемкости c_k поверхностных возбуждений справедливы соотношения

$$s_k = -\frac{df_k}{dT} = \frac{k^2 \varepsilon}{8\pi T^2 \operatorname{sh}^2(\varepsilon/2T)} \frac{d\varepsilon}{dk},$$
$$c_k = T\frac{ds_k}{dT} = 2s_k\left(\frac{\varepsilon}{2T}\operatorname{cth}\frac{\varepsilon}{2T} - 1\right). \qquad (7)$$

Значение энтропии и теплоемкости всего ансамбля возбуждений получается из (7) интегрированием по k.

Ввиду того, что $\varepsilon \geq 0$, знак спектральной плотности свободной энергии, энтропии и теплоемкости поверхностных возбуждений (7) определяется производной $d\varepsilon/dk$. В случае немонотонной зависимости $\varepsilon(k)$ спектральная плотность энтропии и теплоемкости может принимать отрицательные значения. Физически $c_k < 0$ означает, что при повышении температуры такие возмущения с волновым числом k не накапливаются, а исчезают, переходя в возмущения с бóльшими или меньшими волновыми числами. В системе происходит некоторое упорядочение, обусловленное появлением выделенного масштаба.

Спектр квазичастиц — квантов поверхностных возмущений (риплонов [6]) диэлектрической жидкости во внешнем электрическом поле (5) — при некоторых значениях разности потенциалов между электродами становится немонотонным. Последнее означает появление энергетической щели, а условие $d\varepsilon/dk < 0$ выполняется именно для спектров с энергетической щелью в области отрицательной групповой скорости. Таким образом, влияние электрического поля приводит к появлению энергетической щели и выделенного масштаба. С увеличением напряженности электрического поля ширина щели уменьшается и обращается в нуль, после чего возмущения, для которых $\omega_k^2 < 0$ становятся неустойчивыми.

В силу немонотонности и возможности появления энергетической щели, спектр рипплонов в электрическом поле качественно отличается от спектра обычных рипплонов. Поэтому такие возбуждения можно назвать электрорипплонами.

Анализ спектра теплоемкости c_k приводит к выводу, что в околокритических электрических полях (т.е. когда ω_k^2 близко к нулю) теплоемкость газа электрорипплонов может быть намного больше, чем в отсутствие электрического поля, что обусловлено малой энергией возбуждения электрорипплонов с длиной волны, близкой к критической (для которой $\omega_k^2 = 0$). С учетом того, что для критических волновых чисел $\varepsilon \to 0$, неустойчивость поверхности жидкости в сильном электрическом поле по отношению к малым возмущениям представляет собой не что иное как конденсацию электрорипплонов. Такой подход может оказаться полезным при анализе процессов возникновения и усиления возмущений поверхности.

Известно, что рипплоны оказывают существенное влияние на потерю сверхтекучести жидкого гелия II [6]. Ввиду гораздо более низких частот, т.е. энергий возбуждения, по сравнению с ротонами, образование рипплонов становится причиной диссипации энергии движения жидкого гелия в энергию поверхностных волн, что проявляется как ненулевая вязкость и потеря свойства сверхтекучести. Согласно проведенному анализу, влияние электрического поля может привести к еще большему снижению критической скорости, при которой происходит потеря сверхтекучести. В электрическом поле, напряженность которого близка к критической, сверхтекучесть оказывается невозможной.

В нелинейной динамике эволюции возмущений поверхности жидкости [3] эффекты дисперсии приводят к пространственному перераспределению квантов возбуждений, а эффекты нелинейности — к процессам рассеяния (взаимодействие квазичастиц различных импульсов) и рождению более коротковолновых возбуждений. Естественно, в случае нелинейных возмущений поверхности жидкости при обычных температурах квантовые эффекты не проявляются, а движение описывается уравнениями классической физики. Однако процессы эволюции возмущений можно рассматривать в представлениях рождения и уничтожения квазичастиц — квантов возбуждений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

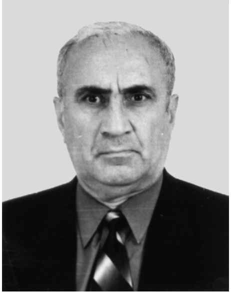
1. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2002.
2. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2002.

3. А л и е в И. Н., Ю р ч е н к о С. О. О нелинейных волнах, распространяющихся на поверхности идеальной проводящей жидкости в электрическом поле // Изв. РАН. Сер. МЖГ. – 2009. – № 5. – С. 39–50.
4. А л и е в И. Н., Ю р ч е н к о С. О. Эволюция возмущений заряженной поверхности раздела несмешивающихся невязких жидкостей в зазоре между двумя электродами // Изв. РАН. Сер. МЖГ. – 2010. – № 5. – С. 156–166.
5. Ф е й н м а н Р. Статистическая механика. – М.: Платон, 2000. – 407 с.
6. Б р а н д т Н. Б., К у л ь б а ч и н с к и й В. А. Квазичастицы в физике конденсированного состояния. – М.: Физматлит, 2009. – 632 с.

Статья поступила в редакцию 29.06.2010

Станислав Олегович Юрченко родился в 1985 г., окончил в 2009 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области теоретической физики.

S.O. Yurchenko (b. 1985) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2009. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in the field of theoretical physics.



Исмаил Новрузович Алиев родился в 1945 г., окончил в 1969 г. Московский инженерно-физический институт. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 80 научных работ в различных областях физики.

I.N. Aliev (b. 1945) graduated from the Moscow Engineering and Physical Institute in 1969. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 80 publications in different fields of physics.