ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.718

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ГОТОВНОСТИ СИСТЕМЫ С ВОССТАНАВЛИВАЕМЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

И.В. Павлов, **С.В. Разгуляев**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: ipavlov@bmstu.ru; sergach_91@mail.ru

Рассмотрена задача доверительного оценивания коэффициента готовности для системы с последовательной структурой с восстанавливаемыми элементами. Предположено, что элементы системы отказывают и восстанавливаются независимо друг от друга. Задача решена на основе результатов испытаний элементов системы с цензурированием по числу наблюдаемых отказов. Предложен метод построения нижней доверительной границы для коэффициента готовности системы, позволяющий улучшить известный ранее метод Ллойда – Липова решения этой задачи.

Ключевые слова: надежность, сложные системы, резервирование.

CONFIDENCE INTERVAL CALCULATIONS FOR THE SYSTEM AVAILABILITY INDEX WITH RECOVERABLE COMPONENTS

I.V. Pavlov, **S.V. Razgulyaev**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: ipavlov@bmstu.ru; sergach_91@mail.ru

The paper discusses the problem of calculating the confidence interval of the system availability index for the serial structure with recoverable components. The system components are assumed to both fail and recoverindependently from each other. The problem is solved using the results of testing the system components while censoring the number of the observed failures. The method ofcalculating the lower confidence intervalof the system availability index, which allows improving the prior known Lloyd – Lipova method, is presented.

Keywords: reliability, complex systems, reservation.

Введение. Рассмотрим систему с последовательной структурой из m элементов, эта система отказывает в случае отказа любого элемента.

Время безотказной работы i-го элемента — случайная величина ξ_i с функцией $F_i\left(t\right) = P\left\{\xi_i < t\right\}$, $i = 1, \ldots, m$. В случае отказа каждый i-й элемент восстанавливается (заменяется новым идентичным элементом) в течение случайного времени восстановления η_i с функцией распределения $G_i\left(t\right) = P\{\eta_i < t\}$. Таким образом, процесс функционирования i-го элемента является альтернирующим процессом восстановления [1, 2], $z_i(t)$ — индикатор отказа i-го элемента в момент времени $t \geq 0$, т.е. $z_i(t) = 1$, если в момент времени t i-й элемент находится в состоянии отказа, $z_i(t) = 0$, если в момент времени t i-й элемент исправен.

Индикатор отказа системы $Z_c(t)$ в момент времени $t \geq 0$ имеет вид $Z_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m} [1 - z_i(t)]$.

Предположим, что процессы отказов и восстановления элементов системы независимы между собой. Обозначим коэффициент готовности i-го элемента (вероятность исправного состояния i-го элемента в стационарном режиме) как

$$k_i = k_i(u_i) = \frac{u_i}{u_i + v_i},$$

где $u_i = M\xi_i = \int\limits_0^\infty [1 - F_i(t)]dt$ — математическое ожидание времени безотказной работы; $v_i = M\eta_i = \int\limits_0^\infty [1 - G_i(t)]dt$ — математическое ожидание времени восстановления i-го элемента, $i = 1, \ldots, m$. Предположим также, что параметр v_i — среднее время восстановления элементов системы — известен и мал по сравнению со средним временем безотказной работы u_i (как правило, справедливо для современных высоконадежных систем).

Коэффициент готовности системы для рассматриваемой модели выражается через коэффициенты готовности отдельных элементов в следующем виде:

$$K_\Gamma = K_\Gamma(u) = \prod_{i=1}^{m} k_i(u_i) = \prod_{i=1}^{m} \frac{u_i}{u_i + v_i}, \qquad (1)$$

где $u = (u_1, \ldots, u_m)$ — вектор параметров надежности отдельных элементов. Требуется построить нижнюю доверительную границу для коэффициента готовности системы (1) на основе имеющейся статистической информации, полученной в ходе испытаний системы или ее отдельных элементов. Задачи подобного типа довольно часто встречаются в различных приложениях для систем с восстанавливаемыми элементами или подсистемами (например, [2–9] и др.). Далее предположим, что статистическая информация по элементам системы представлена в виде стандартных статистических выборок с цензурированием типа $[N_i\ U\ r_i]$ [1]. Другими словами, испытывались N_i элементов i-го типа до наблюдения $r_i \leq N_i$ отказов, в результате чего имели место последовательные моменты отказов $0 \leq x_{i1} \leq x_{i2} \leq \ldots \leq x_{ir_i}$.

Обозначим через $S_i = x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{ir_i}+(N_i - r_i)\,x_{ir_i}$ суммарное время работы (“наработку”) всех элементов i-го типа на испытаниях, $i = 1,\ldots,m$. Требуется на основе вектора результатов испытаний по различным типам элементов системы $S = (S_1,\ldots,S_m)$ построить нижнюю γ-доверительную границу $\underline{K} = \underline{K}(S)$ для коэффициента готовности системы (1), т.е. функцию результатов испытаний $\underline{K}(S)$ такую, что $P\left\{\underline{K}\,(S) \le K\,(u)\right\} \ge \gamma$ при всех возможных значениях вектора параметров u.

Метод Ллойда – Липова. Рассмотрим случай, когда время работы до отказа элементов системы имеет экспоненциальное распределение: $F_i\,(t) = 1 - \exp\left(-t/u_i\right)$, $i = 1,\ldots,m$. Обозначим через

$$\underline{u}_i = \underline{u}_i\,(\gamma) = \frac{2S_i}{\chi^2_\gamma\,(2r_i)} \tag{2}$$

стандартную нижнюю γ-доверительную границу для параметра u_i (среднее время безотказной работы i-го элемента для “экспоненциального случая” [1–3] и др.), $i = 1,\ldots,m$. Коэффициент готовности системы (1) может быть записан в виде $K\,(u) = \exp\left[f\,(u)\right]$, где

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} f_i(u_i). \tag{3}$$

Здесь $f_i\,(u_i) = \ln\left[u_i/(u_i+v_i)\right]$, $i = 1,\ldots,m$. Задачу можно сформулировать как задачу доверительного оценивания снизу функции $f(u)$ (3), которая монотонно возрастает по каждому параметру u_i, $i = 1,\ldots,m$. Поэтому нижняя доверительная граница функции $f(u)$ может быть построена путем простой подстановки доверительных границ $\underline{u}_i$ для параметров отдельных элементов в функцию (3). Когда число m элементов системы велико, такая простая процедура, предложенная Д. Ллойдом и М. Липовым [1, 2, 5] оказывается малопригодной. Действительно, в силу указанной монотонности, также учитывая независимость результатов испытаний различных элементов, имеют место неравенства

$$P\left\{f\,(\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_m) \le f\,(u_1,\ldots,u_m)\right\} \ge$$

$$\ge P\left\{\bigcap_{i=1}^{m}(\underline{u}_i \le u_i)\right\} = \prod_{i=1}^{m} P\,(\underline{u}_i \le u_i) = \gamma^m.$$

Согласно приведенному выражению, коэффициент доверия γ^m для такой процедуры быстро убывает при возрастании размерности задачи m. Таким образом, этот упрощенный подход, использующий только монотонность функции $f(u)$, оказывается неудачным при увеличении числа m элементов в системе. Другими словами, чтобы построить нижнюю доверительную границу с заданным коэффициентом доверия γ для показателя надежности системы (в рамках рассматриваемого метода), необходимо завысить коэффициент доверия в (2) для элементов, т.е.

$$\underline{f} = f\left[\underline{u}_1\left(\sqrt[m]{\gamma}\right), \ldots, \underline{u}_m\left(\sqrt[m]{\gamma}\right)\right]; \ \underline{K} = K\left[\underline{u}_1\left(\sqrt[m]{\gamma}\right), \ldots, \underline{u}_m\left(\sqrt[m]{\gamma}\right)\right]. \quad (4)$$

Модифицированный метод Ллойда – Липова. Предложим метод, который позволяет значительно улучшить указанную выше процедуру (метод Ллойда – Липова [2]), основанную на непосредственном использовании доверительных границ для параметров отдельных элементов. Для этого используем некоторые предварительные результаты и неравенства.

Пусть $z_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ — независимые (неотрицательные) случайные величины с функцией распределения $H_i(t) = P\{\xi_i < t\}$ и плотностью распределения $h_i(t) = H_i'(t)$. Пусть $h_i(t)$ кусочно-непрерывная по $t \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, предположим, что функция $\Lambda_i(t) = -\ln[1 - H_i(t)]$ выпукла вниз по $t \geq 0$, т.е. случайная величина z_i имеет ВФИ-распределение (с возрастающей функцией интенсивности отказов $\lambda_i(t) = \Lambda_i'(t)$) для каждого $i = 1, \ldots, m$. Пусть константы $t_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяют условиям

$$H_i(t_i) = P\{z_i \leq t_i\} = \gamma, \quad i = 1, \ldots, m, \quad (5)$$

где $\gamma \geq 1 - e^{-3/2} \cong 0{,}777$; t_i — квантиль доверия γ для случайной величины z_i, $i = 1, \ldots, m$. Тогда справедливо неравенство

$$P\left\{\sum_{i=1}^{m} z_i \leq \sum_{i=1}^{m} t_i\right\} \geq \gamma. \quad (6)$$

Докажем неравенство (6). Достаточно доказать его для $m = 2$ (поскольку сумма независимых случайных величин с ВФИ-распределением также имеет ВФИ-распределение). График выпуклой вниз функции $\Lambda_i(t)$ расположен выше касательной прямой в точке $(t_i, \Lambda_i(t_i))$:

$$\Lambda_i(t) \geq [\Lambda_i(t_i) + \lambda_i(t_i)(t - t_i)]^+ \text{ при всех } t \geq 0, \quad (7)$$

где $y^+ = \max(0, \ y)$, $\lambda_i(t_i) = \Lambda_i'(t_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

Из (7) следует, что

$$P\{z_1 + z_2 \leq t_1 + t_2\} \geq P\left\{\sum_{i=1}^{2}(\tau_i + y_i) \leq t_1 + t_2\right\} =$$
$$= P\left\{y_1 + y_2 \leq \sum_{i=1}^{2}(t_i - \tau_i)\right\}. \quad (8)$$

Здесь y_i — случайная величина, имеющая экспоненциальное распределение с функцией $1 - \exp(-\alpha_i t)$, $\alpha_i = \lambda_i(t_i)$; $\tau_i = t_i - [\Lambda_i(t_i)/\alpha_i]$, $i = 1,\ 2$. Отметим, что в соответствии с (5) справедливо равенство $\Lambda_i(t_i) = -\ln(1-\gamma)$, $i = 1,\ 2$. Из неравенства (8) получим

$$P\{z_1 + z_2 \le t_1 + t_2\} \ge P\{y_1 + y_2 \le A\} = \varphi(\alpha_1, \alpha_2), \tag{9}$$

где

$$\mathrm{A} = -\ln(1-\gamma)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right);$$

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \iint\limits_{y_1+y_2 \le A} \alpha_1 e^{-\alpha_1 y_1} \alpha_2 e^{-\alpha_2 y_2} dy_1 dy_2. \tag{10}$$

Покажем, что при $\gamma \ge 1 - e^{-3/2}$ выполняется неравенство

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) \ge \gamma \tag{11}$$

Выражение (10) симметрично относительно α_1, α_2. Поэтому достаточно соблюдения неравенства (11) при всех $\alpha_1 \ge \alpha_2$. Обозначим $B = -\ln(1-\gamma)$. После выполнения простых преобразований из (10) получаем, что неравенство (11) эквивалентно равенству $g(x) = x + \exp(-Bx) - x\exp(-B/x) \le 1$ при всех $0 < x \le 1$, где $x = \alpha_2/\alpha_1$. Если $B \ge 3/2$, то вторая производная $g''(x) = B^2\exp(-Bx) - (B^2/x^3)\exp(-B/x) \ge 0$ при всех $0 < x \le 1$, т.е. функция $g(x)$ выпукла вниз на интервале $0 < x \le 1$. Поскольку $g(+0) = g(1) = 1$, тогда при $B \ge 3/2$, $g(x) \le 1$ при всех $0 < x \le 1$, что доказывает справедливость неравенства (6) при $\gamma \ge 1 - e^{-3/2}$.

Случайная величина S_i является r_i-кратной сверткой независимых случайных величин, имеющих экспоненциальное распределение с функцией распределения $1 - \exp(-t/u_i)$ [1]. Следовательно, величина S_i имеет ВФИ-распределение. Таким образом, определенная выше в (2) нижняя γ-доверительная граница $\underline{u}_i$ также имеет ВФИ-распределение. С учетом неравенства (6) можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть функция $f(u) = f(u_1, \ldots, u_m)$ монотонно строго возрастает по каждому параметру $u_i > 0$, имеет непрерывные частные производные $\partial f/\partial u_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, и выпукла вверх по вектору $u = (u_1, \ldots, u_m) \in E^+{}_m$. Тогда при $\gamma \ge 1 - e^{-3/2}$ справедливо неравенство*

$$P\{f(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m) \le f(u_1, u_2, \ldots, u_m)\} \ge \gamma, \tag{12}$$

где $\underline{u}_i$ — нижняя γ-доверительная граница (2) для параметра u_i, $i = 1, \ldots, m$.

◀ Пусть $\gamma \geq 1 - e^{-3/2}$. Обозначим через $\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m)$ вектор доверительных границ для параметров отдельных элементов u_i. Пусть $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in E^+{}_m$ — вектор значений параметров. В соответствии с (2) выполняются равенства

$$P\left\{\underline{u}_i \leq u_i\right\} = \gamma, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

Рассмотрим пространство всех возможных значений вектора доверительных границ $\underline{u} = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m)$, которое, очевидно, совпадает с $E^+{}_m$.

В силу выпуклости функции $f(u)$ справедливо неравенство

$$f(\underline{u}) \leq f(u) + \sum_{i=1}^{m} C_i\left(\underline{u}_i - u_i\right) \tag{14}$$

при любом $\underline{u} \in E^+{}_m$, где $C_i = \partial f / \partial u_i(u) > 0$, $i = 1, \ldots, m$ — константы. При фиксированном векторе $u \in E^+{}_m$ рассмотрим события

$$A = \left\{f(\underline{u}) \leq f(u)\right\}; \quad B = \left\{\sum_{i=1}^{m} C_i \underline{u}_i \leq \sum_{i=1}^{m} C_i u_i\right\}.$$

Из (14) следует, что $B \subset A$, откуда с учетом неравенств (6) и (13)

$$P\left\{f(\underline{u}) \leq f(u)\right\} \geq P\left\{\sum_{i=1}^{m} C_i \underline{u}_i \leq \sum_{i=1}^{m} C_i u_i\right\} \geq \gamma,$$

что доказывает неравенство (11). ▶

Далее нетрудно убедиться, что определенная по (3) функция удовлетворяет условиям теоремы 1. Эта функция монотонно возрастает по каждому параметру u_i, т.е. надежность системы возрастает при увеличении параметров надежности элементов u_i, $i = 1, \ldots, m$. Кроме того, непосредственным дифференцированием можно показать, что $f_i''(u_i) < 0$, $i = 1, \ldots, m$, т.е. функция $f(u)$ выпукла вверх по вектору параметров элементов $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Следовательно, при $\gamma \geq 1 - e^{-3/2} \cong 0{,}777$ нижняя γ-доверительная граница для функции $f(u)$ может быть вычислена как $\underline{f} = f(\underline{u})$. Поскольку коэффициент готовности системы $K(u) = \exp\left[f(u)\right]$, аналогично может быть вычислена и нижняя γ-доверительная граница для коэффициента готовности системы

$$\underline{K} = K(\underline{u}) = \prod_{i=1}^{m} K_i\left(\underline{u}_i\right), \tag{15}$$

где $\underline{u}_i = \underline{u}_i(\gamma)$ — нижние доверительные границы (2) для параметров отдельных элементов с тем же коэффициентом доверия γ. Таким образом, в отличие от метода Ллойда – Липова [2] в его исходном варианте (см. (4)), в рассматриваемом подходе коэффициент доверия γ

для отдельных элементов в (2) сохраняется при переходе от элементов к системе (при $\gamma \geq 1 - e^{-3/2}$). При этом выражение (15) дает значительно более высокое значение нижней доверительной границы для надежности системы по сравнению с методом Ллойда – Липова в (4). Соответствующий выигрыш тем больше, чем больше число различных подсистем m.

Заключение. Показано, что для системы с последовательной структурой с независимым восстановлением элементов нижняя доверительная граница для коэффициента готовности системы может быть построена (при некоторых дополнительных условиях, которые, как правило, выполняются на практике) методом, основанным на непосредственном использовании доверительных границ для параметров надежности отдельных элементов с тем же коэффициентом доверия. Другими словами, для таких систем коэффициент доверия сохраняется при переходе от отдельных элементов к системе в целом. Существенный интерес с позиции приложений представляют возможные обобщения полученного результата на более общие модели сложных систем, в том числе для систем со сложной структурой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко Б.В.*, *Беляев Ю.К.*, *Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.
2. *Ллойд Д.*, *Липов М.* Надежность; пер. с англ. М.: Сов. радио, 1964. 668 с.
3. *Барлоу Р.*, *Прошан Ф.* Математическая теория надежности; пер. с англ. М.: Радио и связь, 1969. 488 с.
4. *Павлов И.В.*, *Ушаков И.А.* Вычисление показателей надежности для сложных систем с восстанавливаемыми элементами // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 1989. № 6. С. 170–176.
5. *Павлов И.В.* Приближенно оптимальные доверительные границы для показателей надежности систем с восстановлением // Известия РАН. Теория и системы управления. 1988. № 3. С. 109–116.
6. *Gnedenko B.V.*, *Pavlov I.V.*, *Ushakov I.A.* Statistical reliability engineering. N.Y.: John Wiley & Sons, 1999. 517 p.
7. *Павлов И.В.* Расчет и оптимизация некоторых характеристик для модели вычислительного комплекса // Информатика и ее применения. 2012. Т. 6. Вып. 2. С. 59–62.
8. *Сидняев Н.И.* Математическое моделирование оценки надежности объектов сложных технических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2013. № 4. С. 24.
9. *Клочкова Д.В.*, *Сидняев Н.И.* Основные факторы эксплуатационной надежности мощных передающих установок // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1148.html (дата обращения: 10.10.2014).

REFERENCES

[1] Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solovyev A.D. Mathematical Methods of Reliability Theory. N.Y., Academic Press, 1969.

[2] Lloyd D., Lipow M. Reliability Management, Methods and Mathematics. Redondo Beach, Calif.: Authors, 1979, 589 p.

[3] Barlow R., Proschan F. Mathematical Theory of Reliability. N.Y., John Wiley & Sons, 1965, 497 p.

[4] Pavlov I.V., Ushakov I.A. Calculation of reliability indexes for complex systems with recovered items. *Izvestia Rossiyskoy akademii nauk*. *Teoria i systemy upravlenia* [Journal of Computer and Systems Sciences International. Pleiades Publishing, Ltd.], 1988, no. 6, pp. 170–176 (in Russ.).

[5] Pavlov I.V. Approximately optimal confidence limits for the reliability of systems with recovery. *Izvestia Rossiyskoy akademii nauk. Teoria i systemy upravlenia* [Journal of Computer and Systems Sciences International. Pleiades Publishing, Ltd.], 1988, no. 3, pp. 109–116 (in Russ.).

[6] Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A. Statistical reliability engineering. N.Y., John Wiley & Sons, 1999. 517 p.

[7] Pavlov I.V. Calculation and optimization of some characteristics for the model of computer system. *Informatika i ee primenenia* [Informatics and Applications], 2012, no. 6, iss. 2, pp. 59–62 (in Russ.).

[8] Sidnyaev N.I. Mathematical modeling of estimate the reliability of objects of complex technical systems. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Problems of mechanical engineering and reliability of the machines], 2003, no. 4, pp. 24 (in Russ.).

[9] Klochkova D.V., Sidnyaev N.I. Major factors of operational reliability of powerful transferring installations. *Jelektr. nauchno-tehn. Izd. "Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovacii"* [El. Sc.-Techn. Publ. "Eng. J.: Science and Innovation"], 2013, no. 12. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1148.html

Статья поступила в редакцию 04.12.2014

Павлов Игорь Валерианович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры "Высшая математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специалист в области математической статистики, теории надежности и теории вероятности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул. д. 5.

Pavlov I.V. — D.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematics, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, specialist in the fields of mathematical statistics, probability theory and reliability theory.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Разгуляев Сергей Васильевич — аспирант кафедры "Высшая математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области теории надежности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул. д. 5.

Razgulyaev S.V. — Ph.D. student, Department of Higher Mathematics, Bauman Moscow State Technical University, author specializes in the field of reliability theory.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Павлов И.В., Разгуляев С.В. Построение доверительных границ для коэффициента готовности системы с восстанавливаемыми элементами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 4. С. 15–22.

Please cite this article in English as:

Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. Confidence interval calculations for the system availability index with recoverable components. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 4, pp. 15–22.