УДК 519.23

Лёвин П. А., Павлов И. В.

ОЦЕНКА НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМЫ С НАГРУЖЕННЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ

Рассмотрена задача доверительного оценивания надежности для модели системы с нагруженным резервированием внутри ее отдельных подсистем по результатам испытаний элементов системы в различных режимах. Предлагается численный алгоритм решения данной проблемы, вычислительная трудоемкость которого возрастает линейно с ростом размерности задачи.

E-mail: plyovin@hotmail.com

Ключевые слова: надежность и безопасность сложных систем, доверительные оценки, прогноз надежности, испытания сложных систем, переменный режим.

Рассмотрим систему, состоящую из m последовательно соединенных подсистем, i-я подсистема состоит из n_i однотипных элементов, работающих в режиме нагруженного резервирования. При этом i-я подсистема исправна, если исправен, по крайней мере, один из n_i ее элементов, $i = 1, \ldots, m$. Другими словами, индикатор $Z_i(t)$ отказа i-й подсистемы в момент времени t

$$Z_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sum\limits_{j=1}^{n_i} z_{ij}(t) = n_i; \\ 0, & \text{если} \quad \sum\limits_{j=1}^{n_i} z_{ij}(t) \leqslant n_i - 1, \end{cases}$$

где $z_{ij}(t)$ — индикатор отказа j-го элемента i-й подсистемы. Индикатор отказа системы в данной модели имеет вид

$$I_c(t) = 1 - \prod_{i=1}^{m} [1 - Z_i(t)],$$

т.е. система отказывает в случае отказа любой из m ее подсистем.

В процессе функционирования на интервале времени $t > 0$ система и ее элементы работают в одном из k различных режимов, соответствующих различным уровням действующей на систему переменной (кусочно-постоянной) нагрузки:

$$U(t) = U_j \quad \text{при} \quad \tau_{j-1} \leqslant t < \tau_j,$$

где

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{k-1} < \tau_k = \infty$$

— моменты переключения нагрузки (режимов); U_j — значение нагрузки, действующей на систему на интервале $[\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j = 1, \ldots, k$. Отметим, что под нагрузкой $U(t)$, вообще говоря, может пониматься любой внешний переменный фактор, действующий на систему и влияющий на надежность ее элементов, например температура и т.п.

Предполагается, что на j-м интервале времени $[\tau_{j-1}, \tau_j)$, на котором действующая на систему нагрузка $U(t)$ постоянна и равна U_j, интенсивность отказов каждого элемента i-й подсистемы также постоянна и равна

$$\lambda_{ij} = \varphi_i(U_j), \tag{1}$$

где $\varphi_i(U)$ — функция, выражающая зависимость параметра интенсивности отказов элементов i-й подсистемы от значения действующей нагрузки U. Точный вид функций $\varphi_i(U)$, $i = 1, \ldots, m$, чаще всего неизвестен. Далее будем предполагать только то, что каждая из функций $\varphi_i(U)$ (для всех типов элементов) монотонно возрастает (не обязательно строго) по U, что соответствует естественному с физической точки зрения допущению о возрастании интенсивности отказов любого из элементов системы при возрастании действующей на систему нагрузки.

При указанных допущениях вероятность безотказной работы на интервале времени $(0, t)$ (функция надежности) элемента i-й подсистемы имеет вид [5, 6]

$$P_i(t, \lambda_i) = \exp[-\Lambda_i(t, \lambda_i)], \tag{2}$$

где $\lambda_i = \lambda(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{ik})$ — вектор параметров интенсивности отказов элемента i-й подсистемы в различных режимах; $\Lambda_i(t, \lambda_i)$ — функция ресурса элемента i-й подсистемы, определяемая по формуле

$$\Lambda_i(t, \lambda_i) = \int_0^t \lambda_i(z) dz, \tag{3}$$

где $\lambda_i(t)$ — кусочно-постоянная функция интенсивности отказов для элемента i-й подсистемы, такая что

$$\lambda_i(t) = \lambda_{ij} \text{ при } \tau_{j-1} \leqslant t < \tau_j, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{4}$$

Функция ресурса (3) с учетом (4) далее может быть представлена в виде линейной функции вектора параметров λ_i:

$$\Lambda_i(t, \lambda_i) = \Lambda_i(t, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{ik}) = \sum_{j=1}^{k} c_j(t) \lambda_{ij},$$

где коэффициент $c_j(t)$ — длина интервала времени, образуемого пересечением интервалов $(0, t)$ и (τ_{j-1}, τ_j), т.е.

$$c_j(t) = [\min(t, \tau_j) - \tau_{j+1}]^+.$$

($z^+ = \max(0, z)$ — положительная часть величины z).

В предположении, что различные элементы системы отказывают независимо друг от друга, вероятность безотказной работы на интервале $(0,t)$ (функция надежности) системы далее определяется выражением

$$P(t,\vec{\lambda}) = \prod_{i=1}^{m} h_i[P_i(t,\lambda_i)], \qquad (5)$$

где $\vec{\lambda} = (\lambda_{11},\ldots,\lambda_{ik},\ldots,\lambda_{m1},\ldots,\lambda_{mk})$ — полный вектор (размерности $m\cdot k$) всех параметров надежности λ_{ij} различных элементов системы в различных режимах; $h_i(p_i)$ — функция, выражающая зависимость вероятности исправной работы i-й подсистемы от вероятности p_i исправной работы одного ее элемента $[h_i(p_i) = 1-(1-p_i)^{n_i}]$. Таким образом, в данной модели известна зависимость (5) функции надежности системы от вектора $\vec{\lambda}$ параметров надежности ее элементов. При этом точные значения указанных параметров чаще всего неизвестны, а известны лишь результаты испытаний элементов системы на надежность, на основе которых далее требуется оценить функцию надежности системы (5). При этом основной интерес чаще всего представляет доверительное оценивание надежности системы снизу.

Далее будем предполагать, что испытания элементов i-го типа в j-м режиме (с постоянной нагрузкой U_j) проводились в соответствии со стандартными планами испытаний типа $[N_{ij},B,T_{ij}]$ (в обозначении работы [1]), т.е. на испытания в j-м режиме было поставлено N_{ij} элементов i-го типа, испытания проводились с восстановлением отказавших элементов в течение времени T_{ij}, в результате чего наблюдалось d_{ij} отказов. Требуется, исходя из вектора $\vec{d}=\{d_{ij}: j=1,\ldots,k; i=1,\ldots,m\}$ результатов испытаний по всем типам элементов системы, построить нижнюю доверительную границу (НДГ) функции надежности системы (5) для того или иного заданного момента времени $t>0$.

Построение нижней доверительной границы для функции надежности системы. Обозначим через $L = \{\vec{\lambda} : \lambda_{ij} \geqslant 0, \quad j=1,\ldots,k; i=1,\ldots,m\}$ множество всех возможных значений вектора $\vec{\lambda}$ параметров надежности элементов системы. Отметим, что наблюдаемое при испытаниях $[N_{ij},B,T_{ij}]$ случайное число отказов d_{ij} имеет пуассоновское распределение с параметром $\Lambda_{ij} = N_{ij}T_{ij}\lambda_{ij}$ (см., например, [1, 4]). Тем самым общее суммарное число отказов $D = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} d_{ij}$, наблюдаемое при испытаниях, имеет также пуассоновское распределение с параметром $\Lambda = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} N_{ij}T_{ij}\lambda_{ij}$. Обозначим через $\overline{\Lambda}_\gamma(d) = \dfrac{\chi^2_\gamma(2d+2)}{2}$ стандартную верхнюю доверительную границу для параметра пуассоновского закона распределения с коэффициентом доверия γ, построенную по результату наблюдения d (см. [1]), где $\chi^2_\gamma(r)$ — квантиль уровня γ для χ^2-распределения с r степенями свободы. Тогда величина $\overline{\Lambda}_\gamma(D)$ дает верхнюю γ-доверительную границу для Λ. Другими словами, при любом возможном значении векторного параметра $\vec{\lambda} \in L$ справедливо неравенство

$$P_{\vec{\lambda}}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} N_{ij}T_{ij}\lambda_{ij} \leqslant \overline{\Lambda}_\gamma(D)\right\} \geqslant \gamma, \tag{6}$$

где $P_{\vec{\lambda}}\left\{\vec{d}\right\}$ — вероятностное распределение на множестве результатов испытаний $\vec{d}$ при данном значении вектора параметров $\vec{\lambda} \in L$.

Введем следующую систему множеств $H(\vec{d}) \subset L$:

$$H(\vec{d}) = \left\{\vec{\lambda} : \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} N_{ij}T_{ij}\lambda_{ij} \leqslant \overline{\Lambda}_\gamma(D); \right.$$
$$\left. \lambda_{ij} \geqslant 0, j = 1, \ldots, k; \quad i = 1, \ldots, m\right\}, \tag{7}$$

которая в соответствии с (6) образует систему γ-доверительных множеств для вектора параметров $\vec{\lambda} \in L$,

$$P_{\vec{\lambda}}\left\{\vec{\lambda} \in H(\vec{d})\right\} \geqslant \gamma \tag{8}$$

при любом $\vec{\lambda} \in L$. Кроме того, поскольку функции (1) предполагаются монотонно возрастающими по U, то можно считать, что параметры интенсивности отказов λ_{ij} в различных режимах удовлетворяют следующим естественным с физической точки зрения неравенствам:

$$\lambda_{ij} \leqslant \lambda_{il}, \quad \text{если} \quad U_j \leqslant U_k$$

при всех $i = 1, \ldots, m$. Другими словами, для каждой подсистемы $i = 1, \ldots, m$ соответствующие параметры λ_{ij} $j = 1, \ldots, k$ могут считаться упорядоченными, т.е. удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_{ij_1} \leqslant \lambda_{ij_2} \leqslant ... \leqslant \lambda_{ij_k}$$

в соответствии с возрастанием нагрузки

$$U_{j_1} \leqslant U_{j_2} \leqslant ... \leqslant U_{j_k}.$$

Далее для определенности (не ограничивая общности) будем рассматривать случай $U_1 \leqslant U_2 \leqslant \ldots \leqslant U_k$ монотонного нарастания нагрузки от режима к режиму. В этом случае параметры λ_{ij} удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_{i1} \leqslant \lambda_{i2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{ik} \tag{9}$$

при всех $i = 1, \ldots, m$.

Обозначим через $L' \subset L$ подмножество всех векторов $\vec{\lambda} \in L$, удовлетворяющих неравенствам (9) и $H'(d) = H(d) \cap L'$. В соответствии с общим методом доверительных множеств [3, 4] искомая нижняя доверительная граница с коэффициентом доверия не меньше γ для функции надежности системы (5) далее может быть выражена как

$$\underline{P}(t, \vec{d}) = \min_{\vec{\lambda} \in H'(\vec{d})} P(t, \vec{\lambda}), \tag{10}$$

где минимум вычисляется по указанному в (7) доверительному множеству $H(d)$ при дополнительных ограничениях вида (9).

Теорема 1. *Построенная в* (10) *граница удовлетворяет неравенству*

$$P_{\vec{\lambda}} \left\{ \underline{P}(t, \vec{d}) \leqslant P(t, \vec{\lambda}) \right\} \geqslant \gamma \tag{11}$$

при любом $t > 0$, $\vec{\lambda} \in L' \subset L$.

Доказательство. Зафиксируем величины $t > 0$ и $\vec{\lambda} \in L' \subset L$. По определению минимума (10) имеют место следующие соотношения между событиями:

$$\left\{ \vec{\lambda} \in H(\vec{d}) \right\} = \left\{ \vec{\lambda} \in H(\vec{d}) \cap L' \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \min_{\vec{v} \in H(\vec{d}) \cap L'} P(t, \vec{v}) \leqslant P(t, \vec{\lambda}) \right\} = \left\{ \underline{P}(t, \vec{d}) \leqslant P(t, \vec{\lambda}) \right\},$$

откуда с учетом (8) следует (11). Теорема доказана.

Таким образом, граница (10) дает нижнюю доверительную границу с коэффициентом доверия γ для функции надежности системы. Существенно при этом то, что указанная выше дополнительная априорная информация о монотонном возрастании функции (1) интенсивности отказов при возрастании действующей на систему нагрузки приводит к сужению L' исходного пространства параметров L и соответственно к сужению $H'(d)$ доверительного множества $H(d)$ вследствие появления дополнительных ограничений вида (9), что дает значительный выигрыш при построении доверительной границы для надежности системы.

Далее для решения задачи на вычисление минимума в (10) удобно ввести функцию

$$f(t, \vec{\lambda}) = \sum_{i=1}^{m} f_i \left[\Lambda_i(t, \lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ik}) \right], \tag{12}$$

где

$$f_i(z_i) = -\ln h_i(e^{-z_i}). \tag{13}$$

Нижняя доверительная граница (10) для надежности системы далее может быть найдена по формуле

$$\underline{P}(t, \vec{d}) = \exp[-\overline{f}(t, \vec{d})], \tag{14}$$

где $\overline{f}(t, \vec{d})$ — решение следующей задачи на вычисление максимума: найти

$$\overline{f}(t, \vec{d}) = \max f(t, \vec{\lambda}) \tag{15}$$

при ограничениях на вектор параметров $\vec{\lambda}$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} N_{ij} T_{ij} \lambda_{ij} \leqslant \overline{\Lambda}_{\gamma}(D); \tag{16}$$

$$\lambda_{ij} \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, k; \;\; i = 1, \ldots, m; \tag{17}$$

$$\lambda_{i1} \leqslant \lambda_{i2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{ik}, \;\; i = 1, \ldots, m. \tag{18}$$

Отметим, что функция $f(t, \vec{\lambda})$ имеет смысл функции ресурса системы. Соответственно величина $\overline{f}(t, \vec{d})$ имеет смысл верхней γ-доверительной границы для функции ресурса системы.

Далее для решения задачи максимизации (15) при ограничениях (16)–(18) введем вспомогательную задачу. Найти

$$g_i(t, z_i) = \max \sum_{j=1}^{k} c_{ij}(t) \lambda_{ij}, \tag{19}$$

где максимум берется при следующих ограничениях на вектор параметров i-й подсистемы $\vec{\lambda}_i = (\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ik})$:

$$\sum_{j=1}^{k} N_{ij} T_{ij} \lambda_{ij} = z_i; \tag{20}$$

$$\lambda_{ij} \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, k; \tag{21}$$

$$\lambda_{i1} \leqslant \lambda_{i2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{ik}. \tag{22}$$

Решение каждой из $i = 1, \ldots, m$ вспомогательных задач (19)–(22) может быть получено на основе достаточно простого численного алгоритма, предложенного в [5, 6], вычислительная трудоемкость которого возрастает не быстрее чем линейно с ростом размерности k.

На основе указанного решения вспомогательных задач вида (19)–(22) для отдельных подсистем далее может быть получено и решение основной задачи для системы в целом, которое дается следующей теоремой.

Теорема 2. *Решение задачи на вычисление максимума* (15) *при ограничениях* (16)–(18) *имеет вид*

$$\overline{f}(t,\vec{d}) = \max_{i=1,\dots,m} f_i\left\{g_i[t,\overline{\Lambda}_\gamma(D)]\right\}.$$

Доказательство. Указанная основная задача может быть представлена как

$$\overline{f}(t,\vec{d}) = \max\sum_{i=1}^{m} f_i[g_i(t,z_i)], \tag{23}$$

где максимум берется при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} z_i \leqslant \overline{\Lambda}_\gamma(D); \tag{24}$$

$$z_i \geqslant 0, \quad i=1,\dots,m. \tag{25}$$

Из определения вспомогательной задачи (19)–(22) видно, что ее решение $g_i(t,z_i)$ линейно по ограничению z_i, а именно

$$g_i(t,z_i) = z_i\cdot g_i(t,1). \tag{26}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно ввести замену переменных $\lambda'_{ij} = \dfrac{\lambda_{ij}}{z_i}$, $j=1,\dots,k$. В новых переменных задача (19)–(22) принимает вид

$$g_i(t,z_i) = z_i\cdot\max\sum_{j=1}^{k} c_{ij}(t)\lambda'_{ij},$$

где максимум берется при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{k} N_{ij}T_{ij}\lambda'_{ij} = 1;$$

$$\lambda'_{ij}\geqslant 0, \quad j=1,\dots,k;$$

$$\lambda'_{i1}\leqslant\lambda'_{i2}\leqslant\ldots\leqslant\lambda'_{ik},$$

откуда следует (26). Тем самым целевая функция в (23) может быть представлена как

$$\overline{f}(t,\vec{d}) = \max\sum_{i=1}^{m} f_i[z_i\cdot g_i(t,1)]. \tag{27}$$

Непосредственным дифференцированием легко показать, что определенная в (13) функция $f_i(z_i)$ монотонно возрастает и выпукла вниз по $z_i>0$ при всех $i=1,\dots,m$. Откуда следует, что функция в (23),

(27) выпукла вниз по $z = (z_1, \ldots, z_m)$. В соответствии с известными результатами теории выпуклого программирования максимум (23) достигается в одной из “крайних точек” области (24), (25)

$$z^{(i)} = (0, \ldots, 0, \overline{\Lambda}_\gamma(D), 0, \ldots, 0),$$

откуда следует доказываемое утверждение. Теорема доказана.

Из теоремы 2 с учетом (14) следует соответствующее выражение для искомой НДГ для надежности системы

$$\underline{P}(t, \vec{d}) = \min_{i=1,\ldots,m} P_i(t, \vec{\lambda}), \tag{28}$$

где

$$P_i(t, \vec{\lambda}) = \exp\left\{-g_i[t, \overline{\Lambda}_\gamma]\right\} \tag{29}$$

— НДГ надежности отдельно взятой i-й подсистемы, вычисленная в предположении, что при испытаниях для элементов этой подсистемы было получено общее число отказов, равное величине D, где $g_i(t, \overline{\Lambda}_\gamma)$ — решение задачи максимизации (19)–(22), которое находится на основе численного алгоритма [5, 6]. В частном случае $k = 1$ формулы (28), (29) дают известный ранее результат для последовательно-параллельных систем с нагруженным резервированием внутри различных подсистем [4]. Из выражений (28), (29) и результатов работ [5, 6] следует также, что трудоемкость соответствующей процедуры вычисления НДГ надежности системы (28) возрастает не быстрее чем линейно с ростом размерности задачи, равной в данном случае величине mk. Для сложных систем, составленных из большого числа различных подсистем, работающих в различных режимах, указанная размерность может быть довольно значительной, в связи с чем соответствующий выигрыш может быть довольно существенным.

Далее рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих изложенный выше подход к решению задач данного типа.

Пример 1. Рассмотрим систему, состоящую из $m = 4$ подсистем. Число различных режимов $k = 5$, моменты переключения режимов $\tau_1 = 10$, $\tau_2 = 20$, $\tau_3 = 30$, $\tau_4 = 40$. Число образцов, поставленных на испытания, N_{ij} приведено в табл. 1, время испытаний в каждом отдельном режиме T_{ij} — в табл. 2, число d_{ij} отказов, наблюдаемых на испытаниях, — в табл. 3, число резервных элементов n_i внутри различных подсистем — в табл. 4. На рис. 1 приведены графики верхних доверительных границ для вероятности отказа системы в зависимости от времени t для двух случаев:

1) с использованием априорной информации (1) о монотонном возрастании интенсивности отказов при возрастании нагрузки. Иными словами, решение задачи с ограничениями на параметры интенсивности отказов (9);

Таблица 1

N_{ij}		№ подсистемы			
		1	**2**	**3**	**4**
№ режима	**1**	30	50	40	25
	2	30	50	40	25
	3	30	50	40	25
	4	30	50	40	25
	5	30	50	40	25

Таблица 2

T_{ij}		№ подсистемы			
		1	**2**	**3**	**4**
№ режима	**1**	15	10	15	10
	2	15	10	15	10
	3	15	15	15	10
	4	15	10	15	10
	5	15	10	15	10

Таблица 3

d_{ij}		№ подсистемы			
		1	**2**	**3**	**4**
№ режима	**1**	0	0	0	0
	2	0	0	1	0
	3	0	0	0	0
	4	0	0	0	0
	5	0	0	0	0

Таблица 4

№ подсистемы	**1**	**2**	**3**	**4**
n_i	3	4	4	3

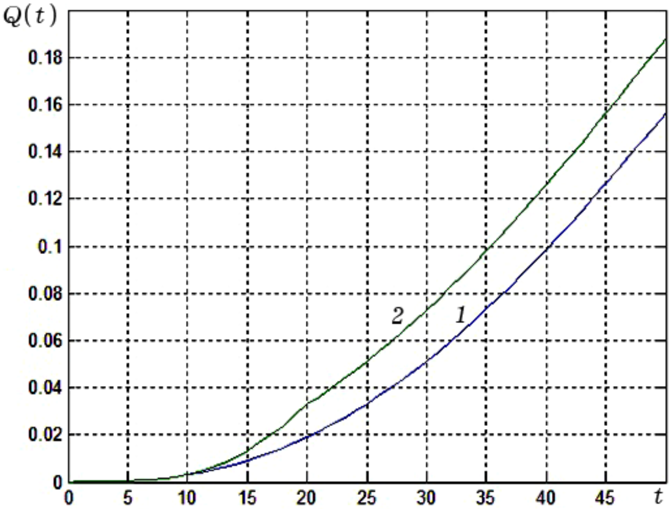

Рис. 1. Верхняя доверительная граница для функции вероятности отказа

2) без использования априорной информации (1), т.е. решение задачи без дополнительных ограничений (9) на параметры интенсивности отказов.

Как видно из рис. 1, выигрыш при применении подхода 1 (при использовании дополнительных ограничений на параметры интенсивности отказов $\lambda_{i1} \leqslant \lambda_{i2} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{ik}$) по сравнению с использованием подхода 2 довольно значителен.

Пример 2. Система состоит из $m = 10$ подсистем. Система должна работать в двух разных режимах, причем в первом режиме система должна работать не более 100 ч, а во втором не более 500 ч; иными словами, число режимов $k = 2$, а момент переключения с первого режима на второй $\tau_1 = 100$. Число резервных образцов, поставленных на испытания, N_{ij} приведено в табл. 5, время испытаний в каждом отдельном режиме T_{ij} — в табл. 6, число d_{ij} отказов, наблюдаемых на испытаниях, приведено в табл. 7, число резервных элементов n_i внутри различных подсистем — в табл. 8. График верхней доверительной границы для вероятности отказа представлен на рис. 2.

Таблица 5

N_{ij}		№ подсистемы									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
№ режима	**1**	100	100	150	500	500	400	200	400	500	500
	2	100	100	150	500	500	400	200	400	500	500

Таблица 6

T_{ij}		№ подсистемы									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
№ режима	**1**	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	2	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500

Таблица 7

d_{ij}		№ подсистемы									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
№ режима	**1**	2	1	1	3	4	8	3	5	1	1
	2	4	5	3	6	8	18	5	5	3	4

Таблица 8

	№ подсистемы									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
n_i	4	4	4	2	5	5	3	3	3	2

Из рис. 2 следует, что применение первого подхода дает существенно лучшую оценку для функции вероятности отказа, например, значение верхней доверительной границы для вероятности отказа в точке $t = 400$ для первого подхода составляет $Q_1 = 0{,}042$, а для второго $Q_1 = 0{,}106$, т.е. дает выигрыш более чем в два раза. Выигрыш в данном случае обусловлен тем, что время испытаний во втором режиме значительно больше, чем в первом.

В заключение необходимо отметить, что важным направлением дальнейших исследований в рамках данной проблематики является

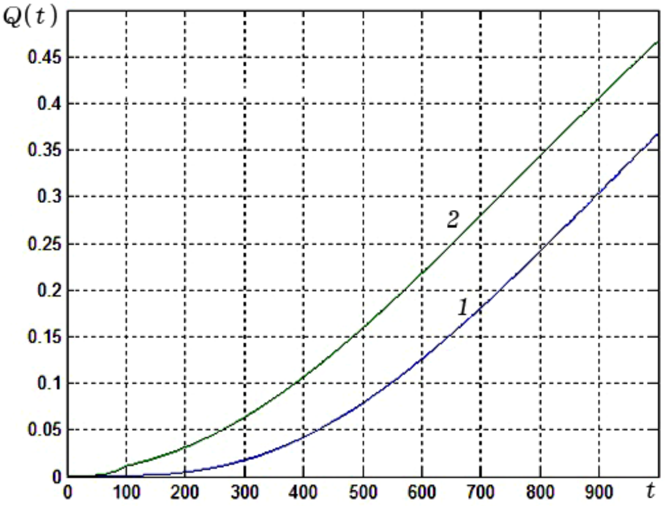

Рис. 3. Верхняя доверительная граница для функции вероятности отказа

обобщение полученных результатов и разработка соответствующих методов доверительного оценивания надежности сложных систем при более общих предположениях о структуре системы, а также для более общих режимов резервирования элементов системы, в частности для моделей с ненагруженным резервированием внутри отдельных подсистем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К. Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
2. Ллойд Д. К., Липов М. Надежность. – Изд. Сов. радио, 1964.
3. Беляев Ю. К. Доверительные интервалы для функций от многих неизвестных параметров // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 196, № 4. – С. 755–758.
4. Павлов И. В. Статистические методы оценки надежности сложных систем. – М.: Радио и связь, 1982. – 168 с.
5. Лёвин П. А. Павлов И. В. Интервальное оценивание надежности системы в переменном режиме функционирования // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2008. – № 3. – С. 60–69.
6. Лёвин П. А. Павлов И. В. Оценка показателей ресурса технических систем в переменном режиме функционирования // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2009. – № 2. – С. 28–37.
7. Лёвин П. А., Павлов И. В. Оценка надежности систем радиоэлектроники в переменном режиме функционирования // Успехи современной радиоэлектроники. – 2009. – № 3. – С. 73–79.
8. Gnedenko B. V., Pavlov I. V., Ushakov I. A. Statistical Reliability Engineering. – New York: John Wiley. – 1999. – 499 p.
9. Pavlov I. V., Teskin O. I., Goryainov V. B., Ukolov S. N. Confidence bounds for system reliability based on binomial components test data // Proc. of the Second Intern. Conf., MMR'2000, Bordeaux, France. – Jul., 2000. – P. 852–855.

10. Горяинов В. Б., Павлов И. В., Тескин О. И., Цветкова Г. М. Математическая статистика (Серия “Математика в техническом университете” / Под редакцией Зарубина В.С., Крищенко А.П. Т. 17). – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2002. – 424 с.

Статья поступила в редакцию 11.11.2010

Игорь Валерианович Павлов родился в 1945 г., окончил Московский физико-технический институт в 1968 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 80 научных работ в области теории вероятностей, математической статистики и теории надежности.

I.V. Pavlov (b. 1945) graduated from the Moscow Physics and Technology Institute in 1968. D. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 80 publications in the field of probability theory, mathematical statistics and reliability theory.

Петр Александрович Лёвин родился в 1982 г., окончил в 2006 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор трех научных работ в области теории надежности технических систем.

P.A. Lyovin (b. 1982) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2006. Post-graduate of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 3 publications in the field of theory of reliability of technical systems.