МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОГО ПРОСТРАНСТВА С МОНЕТООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

В.Н. Акопян, **С.Е. Мирзоян**, **Л.Л. Даштоян**

Институт механики Национальной академии наук Республики Армения, Ереван, Республика Армения
e-mail: vhakobyan@sci.am; mechins@mechins.sci.am; lilit.dashtoyan@yahoo.com

Построено точное решение одной осесимметричной смешанной задачи для составного упругого пространства, состоящего из двух разнородных полупространств. На плоскости стыка этих пространств имеется монетообразная трещина, на одном берегу которой заданы напряжения, на другом — перемещения. Получены определяющие уравнения поставленной задачи в виде системы двух сингулярных интегральных уравнений второго рода и построено ее замкнутое решение. Определены коэффициенты концентрации контактных напряжений на граничной окружности монетообразной трещины и выявлены закономерности их изменения в зависимости от упругих характеристик полупространств. В частном случае, когда на нижний берег монетообразной трещины под действием сосредоточенной нагрузки вдавливается полностью сцепленная с ней жесткая шайба-включение, определено жесткое смещение включения.

***Ключевые слова*:** смешанная задача, составное пространство, трещина, сингулярное интегральное уравнение.

AXISYMMETRIC MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR COMPOSITE SPACE WITH COIN-SHAPED CRACK

V.N. Hakobyan, **S.E. Mirzoyan**, **L.L. Dashtoyan**

Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia
e-mail: vhakobyan@sci.am; mechins@mechins.sci.am; lilit.dashtoyan@yahoo.com

The article presents an explicit solution of the mixed axisymmetric boundary value problem for anelastic composite space, consisting of two different half-spaces. There is a coin-shaped crack on the interfacing surface of these spaces. There are given stresses on one edge of the crack and the displacements on the other edge. The indicial equations of the posed problem as a system of two singular integral equations of the second kind were obtained. The closed solution of the system is found. The coefficients of a contact stress concentration on the boundary circle of the coin-shaped crack are determined. The changing patterns depended on the elastic half-space properties are studied. In the particular case, when on the lower edge of the coin-shaped crack a rigid disk-inclusion concatenates with it completely concatenates with it under a point load, the rigid displacement is determined.

***Keywords*:** mixed boundary value problem, composite space, crack, singular integral equation.

Введение. В инженерной практике часто встречаются конструкции и сооружения или их детали, которые по конструктивным условиям изготовления содержат концентраторы напряжения типа трещин (разрезов, щелей), инородных включений, накладок, отверстий и угловых точек. Часть перечисленных концентраторов также может возникнуть во время эксплуатации различных конструкций и их деталей. Характерная особенность напряженного состояния таких конструкций и деталей — вокруг этих концентраторов образуются локальные поля напряжений с большими и интенсивно изменяющимися градиентами, которые приводят к разрушению этих конструкций и деталей. Поэтому исследование напряженного состояния массивных тел, содержащих концентраторы напряжений, а также локальных полей напряжений, возникающих вокруг концентраторов, является актуальной проблемой как с научной, так и с инженерной точек зрения.

Следует отметить, что при решении указанных задач, независимо от выбранной методики исследования, немаловажную роль играют точные решения соответствующих модельных задач.

На основе мощного аппарата комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили [1] и метода разрывных решений уравнений теории упругости [2] построены точные решения ряда плоских и осесимметричных модельных задач для однородных и составных изотропных тел с дефектами типа трещин и включений. Однако построение замкнутых решений для составных тел с межфазовыми трещинами, когда на берегах трещин заданы условия смешанного типа, как в плоской, так и в осесимметричной постановке усложняется и часто натыкается на непреодолимые препятствия математического характера. Поэтому количество таких работ очень мало. Можно отметить работы [3, 4], где построено точное решение плоской задачи для составной плоскости из двух различных полуплоскостей, содержащих одну или периодическую систему коллинеарных межфазовых трещин, на берегах которой заданы условия смешанного типа. В работах [5–7] получены замкнутые решения осесимметричных задач для однородного и составного пространства, включающего в себя два полупространства с различными упругими характеристиками, которые содержат межфазовые дефекты.

Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть упругое составное пространство, состоящее из двух разнородных полупространств с коэффициентами Ламе μ_1, λ_1 и μ_2, λ_2, занимающих в цилиндрической системе координат верхнее $(z \geq 0)$ и нижнее$(z \leq 0)$ полупространства, на плоскости стыка $(z = 0)$ ослаблено монетообразной трещиной радиусом a. На верхнем берегу этой трещины заданы нормальные напряжения $P_0^{(1)}(r)$, а на нижнем — радиальные и нормальные компоненты смещения $u_2(r)$ и $w_2(r)$, а также равнодействующая действующих напряжений $P_0^{(2)}$.

Задача — определить контактные напряжения, действующие на стыке полупространств и на нижнем берегу трещины, а также коэффициенты интенсивности указанных напряжений.

Поставленную задачу математически можно сформулировать в виде граничной задачи для уравнений Ламе при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned}
&u_1(r,0) = u_2(r,0), \quad w_1(r,0) = w_2(r,0), \quad a < r < \infty; \\
&\sigma_z^{(1)}(r,0) = \sigma_z^{(2)}(r,0), \quad \tau_{rz}^{(1)}(r,0) = \tau_{rz}^{(2)}(r,0), \quad a < r < \infty; \\
&\sigma_z^{(1)}(r,0) = P_0^{(1)}(r), \quad \tau_{rz}^{(1)}(r,0) = 0, \quad 0 < r < a; \\
&u_2(r,0) = u_2(r), \quad w_2(r,0) = w_2(r), \quad 0 < r < a.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $w_j(r,z)$, $u_j(r,z)$, $\sigma_z^{(j)}(r,z)$, $\tau_{rz}^{(j)}(r,z)$, $j = 1, 2$ — нормальные и радиальные компоненты смещений и напряжений в цилиндрической системе координат верхнего и нижнего полупространств.

Для построения решения граничной задачи (1) рассмотрим вспомогательную граничную задачу, содержащую первые четыре условия задачи (1) и условия

$$\begin{aligned}
&w_1(r,0) - w_2(r,0) = w(r), \quad \sigma_z^{(1)}(r,0) - \sigma_z^{(2)}(r,0) = \sigma(r); \\
&u_1(r,0) - u_2(r,0) = u(r), \quad \tau_{rz}^{(1)}(r,0) - \tau_{rz}^{(2)}(r,0) = \tau(r), \quad 0 < r < a,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $w(r)$, $u(r)$, $\sigma(r)$, $\tau(r)$ — неизвестные функции, описывающие раскрытие трещины, относительное расхождение берегов трещины в радиальном направлении и скачки компонент нормальных и тангенциальных напряжений, действующих на берегах трещины.

Присвоим характерным величинам верхнего и нижнего полупространств индексы 1 и 2 соответственно, а затем представим решения уравнений Ламе, записанные в цилиндрической системе координат, в виде интегралов

$$u_j(r,z) = \int_0^\infty \left[B_j + (-1)^j \vartheta_3^j \left(B_j + (-1)^j C_j\right) sz\right] e^{(-1)^j sz} s J_1(rs)\, ds; \tag{3}$$

$$w_j(r,z) = \int_0^\infty \left[C_j - \vartheta_3^j \left(B_j + (-1)^j C_j\right) sz\right] e^{(-1)^j sz} s J_0(rs)\, ds. \tag{4}$$

При этом компоненты напряжений будут выражены формулами

$$\sigma_z^{(j)}(r,z) = -2\int\limits_0^\infty \left[\theta_1^{(j)}B_j - (-1)^j\,\theta_2^{(j)}C_j\right] s^2 e^{sz} J_0(sz)\;ds-$$

$$-2\int\limits_0^\infty \left[(-1)^j\,\theta_3^{(j)}\left(B_j + (-1)^j\,C_j\right) sz\right] s^2 e^{sz} J_0(sz)\,ds; \quad (5)$$

$$\tau_{rz}^{(j)}(r,z) = 2\int\limits_0^\infty \left[(-1)^j\,\theta_2^{(j)}B_j - \theta_1^{(j)}C_j\right] s^2 e^{sz} J_1(sz)\,ds+$$

$$+2\int\limits_0^\infty \left[\theta_3^{(j)}\left(B_j + (-1)^j\,C_j\right) sz\right] s^2 e^{sz} J_1(sz)\,ds, \quad (6)$$

где $\theta_1^{(j)} = \dfrac{\mu_j^2}{\lambda_j + 3\mu_j}$; $\theta_2^{(j)} = \dfrac{(\lambda_j + 2\mu_j)\,\mu_j}{\lambda_j + 3\mu_j}$; $\theta_3^{(j)} = \dfrac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j + 3\mu_j}$, $j = 1,2$; $J_k(x)$, $k = 0,1$ — функции Бесселя; B_j, C_j, $j = 1,2$ — неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Использовав формулы (3)–(6), выполним условия вспомогательной задачи и выразим неизвестные постоянные B_j, C_j через функции (2). Получим

$$B_1(s) = \frac{d_0}{s\Delta}\overline{\sigma}(s) - \frac{d_1}{s\Delta}\overline{\tau}(s) - \left(\frac{b_0}{\Delta} - 1\right)\overline{u}(s) - \frac{b_1}{\Delta}\overline{w}(s);$$
$$C_1(s) = \frac{d_0}{s\Delta}\overline{\tau}(s) - \frac{d_1}{s\Delta}\overline{\sigma}(s) - \frac{b_1}{\Delta}\overline{u}(s) - \left(\frac{b_0}{\Delta} - 1\right)\overline{w}(s);$$

$$B_2(s) = \frac{d_0}{s\Delta}\overline{\sigma}(s) - \frac{d_1}{s\Delta}\overline{\tau}(s) - \frac{b_0}{\Delta}\overline{u}(s) - \frac{b_1}{\Delta}\overline{w}(s);$$
$$C_2(s) = \frac{d_0}{s\Delta}\overline{\tau}(s) - \frac{d_1}{s\Delta}\overline{\sigma}(s) - \frac{b_1}{\Delta}\overline{u}(s) - \frac{b_0}{\Delta}\overline{w}(s).$$

Здесь

$$b_0 = \theta_2^{(1)}\left(\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}\right) - \theta_1^{(1)}\left(\theta_1^{(1))} - \theta_1^{(2)}\right);$$
$$b_1 = \theta_1^{(1))}\left(\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}\right) - \theta_2^{(1))}\left(\theta_1^{(1))} + \theta_1^{(2))}\right);$$
$$b_2 = 2\left(\theta_1^{(1)}\Delta + \theta_1^{(1)}b_0 + \theta_2^{(1)}b_1\right);$$
$$b_3 = 2\left(\theta_2^{(1)}\Delta + \theta_1^{(1)}b_1 + \theta_2^{(1)}b_0\right);$$
$$d_0 = \left(\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}\right)\Big/2; \quad b_1 = \left(\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}\right)\Big/2;$$
$$\Delta = \left(\theta_1^{(1)} - \theta_1^{(2)}\right)^2 - \left(\theta_2^{(1)} + \theta_2^{(2)}\right)^2;$$

$\overline{\sigma}(s)$, $\overline{u}(s)$, $\overline{w}(s)$, $\overline{\tau}(s)$ — трансформанты Ханкеля функций $\sigma(r)$, $u(r)$, $w(r)$, $\tau(r)$, $\overline{\sigma}(s) = \int\limits_0^\infty r\sigma(r) J_0(sr)\,dr$; $\overline{u}(s) = \int\limits_0^\infty ru(r) J_1(sr)\,dr$;

$\overline{w}(s) = \int\limits_0^\infty rw(r) J_0(sr)\,dr$; $\overline{\tau}(s) = \int\limits_0^\infty r\tau(r) J_0(sr)\,dr$.

С учетом полученных выражений для коэффициентов и связи трансформантов Ханкеля функций с оригиналами по формулам (3)–(6) вычислим на линии $z = 0$ компоненты смещения нижнего полупространства и компоненты напряжения верхнего полупространства.

Соблюдая последние четыре условия (1), получаем следующую систему интегральных уравнений с ядрами Вебера – Сонина для определения неизвестных функций $u(r)$, $w(r)$, $\sigma(r)$, $\tau(r)$:

$$
\begin{gathered}
b_0 L_{1,1}^1[u] + b_1 L_{1,0}^1[w] - d_0 L_{1,0}^0[\sigma] + d_1 L_{1,1}^0[\tau] = \Delta u_2(r);\\
b_1 L_{0,1}^1[u] + b_0 L_{1,0}^1[w] + d_1 L_{0,0}^0[\sigma] - d_0 L_{0,1}^0[\tau] = \Delta w_2(r);\\
b_2 L_{0,1}^2[u] + b_3 L_{0,0}^2[w] + b_0 L_{0,0}^1[\sigma] + b_1 L_{0,1}^1[\tau] = -\Delta P_0^{(1)}(r);\\
b_3 L_{1,1}^2[u] + b_2 L_{1,0}^2[w] + b_1 L_{1,0}^1[\sigma] + b_0 L_{1,1}^1[\tau] = 0;\\
L_{m,n}^k[\varphi] = \int\limits_0^a w_{m,n}^k(r,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,\\
w_{m,n}^k(r,\xi) = \int_0^\infty t^k J_m(tr)\,J_n(t\xi)\,dt,
\end{gathered}
\tag{7}
$$

которые необходимо рассматривать совместно с условиями непрерывности смещений на окружности $r = a$ и условиями равновесия контактных напряжений

$$
\begin{gathered}
u(a) = w(a) = 0;\quad \int\limits_0^a \sigma(r)\,r\,dr = \frac{P_0^{(1)} - P_0^{(2)}}{2\pi} = \frac{P_0}{2};\\
\int\limits_0^a \tau(r)\,r\,dr = 0;\quad \left(P_0^{(1)} = 2\pi\int\limits_0^a P_0^{(1)}(r)\,r\,dr\right).
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Далее согласно материалам, приведенным в работе [5], введем новые функции

$$\{W_*(t);\sigma_*(t)\}=\frac{2}{\pi}\int\limits_t^a\frac{\xi\{w(\xi);\sigma(\xi)\}}{\sqrt{\xi^2-t^2}}d\xi;$$

$$\{U_*(t);\tau_*(t)\}=\frac{2t}{\pi}\int\limits_t^a\frac{\{u(\xi);\tau(\xi)\}}{\sqrt{\xi^2-t^2}}d\xi; \qquad (9)$$

и продолжим их на интервал $(-a,0)$ так, что $W_*(-t)=W_*(t)$; $U_*(-t)=-U_*(t)$; $\sigma_*(-t)=\sigma_*(t)$; $\tau_*(-t)=-\tau_*(t)$. Тогда применим к правым и левым частям первого и последнего уравнений (7) оператор J^*, а к остальным уравнениям — оператор I^* [5] $J^*(\varphi(x))=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int\limits_0^x\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}\int\limits_0^y\varphi(r)\,dr$; $I^*(\varphi(x))=\displaystyle\int\limits_0^x\frac{\varphi(r)\,rdr}{\sqrt{x^2-r^2}}$,
и введем комплексные функции

$$V(t)=(U_*(t)-iW_*(t))\,\theta_2^{(2)};\quad \chi(t)=\sigma_*(t)+i\tau_*(t). \qquad (10)$$

После некоторых выкладок придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$V'(x)+\frac{ia_1}{\pi}\int\limits_{-a}^a\frac{\chi(t)}{t-x}dt-\frac{ia_2}{\pi}\int\limits_{-a}^a\frac{V'(t)}{t-x}dt=f_1(x);$$

$$\chi(x)-\frac{ib_1^*}{\pi}\int\limits_{-a}^a\frac{\chi(t)}{t-x}dt-\frac{ib_2^*}{\pi}\int\limits_{-a}^a\frac{V'(t)}{t-x}dt=f_2(x), \qquad (11)$$

где

$$f_1(x)=-\frac{2i}{\pi\theta_2^{(1)}}\Big(d_1\chi_0(x)+b_1V_2'(x)-id_1C_*\Big);$$

$$f_2(x)=\frac{2i}{\pi\theta_2^{(1)}\theta_2^{(2)}}\Big(b_1\chi_0(x)+b_3V_2'(x)-ib_1C_*\Big);$$

$$\chi_0(x)=I^*\left[P_0^{(1)}(r)\right];\quad V_2(x)=J^*[u_2(r)]-iI^*[w_2(r)];$$

$$C_*=-\frac{\pi b_1}{2\Delta}\sigma_*(0)-\frac{\pi b_3}{2\Delta}U_*'(0)-\frac{b_0}{2\Delta}\int_{-a}^a\frac{\tau_*(t)}{t}dt-\frac{b_2}{2\Delta}\int\limits_{-a}^a\frac{W_*'(t)}{t}dt;$$

$$a_1=\frac{1}{2};\quad a_2=\frac{\theta_1^{(1)}}{\theta_2^{(1)}};\quad b_1^*=\frac{\theta_1^{(2)}}{\theta_2^{(2)}};\quad b_2^*=\frac{2\left(\theta_2^{(1)2}-\theta_1^{(1)2}\right)}{\theta_2^{(1)}\theta_2^{(2)}}.$$

Отметим, что при этом условия (8) можно записать в виде

$$\int_{-a}^{a} V'(x)\,dx = 0; \quad \int_{-a}^{a} \chi(x)\,dx = P_0. \tag{12}$$

Решение системы определяющих уравнений. Решим систему (11) при условиях (12). Для этого согласно рекомендациям, изложенным в работе [3], умножим первое уравнение (11) на величину$\lambda \neq 0$ и просуммируем со вторым. Получим

$$\chi(x) + \lambda V'(x) + \frac{i(\lambda a_1 - b_1^*)}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\chi(t) - \lambda_0 V'(t)}{t-x} dt = \lambda f_1(x) + f_2(x). \tag{13}$$

Потребуем, чтобы имело место равенство $\lambda_0 = (\lambda a_2 + b_2^*) / (\lambda a_1 - b_1^*) = -\lambda$, т.е. величина λ должна быть решением квадратного уравнения

$$a_1\lambda^2 + \lambda(a_2 - b_1^*) + b_2^* = 0. \tag{14}$$

Легко проверить, что решения полученного квадратного уравнения совпадают с решениями соответствующего уравнения, приведенного в работе [3].

Рассмотрим случай, когда уравнение (14) имеет два различных корня. Приняв в (13) поочередно $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ и обозначив

$$\varphi_j(x) = \chi(x) + \lambda_j V'(x), \quad F_j(x) = \lambda_j f_1(x) + f_2(x);$$

$$q_j = -\frac{a_2 + b_1^* + (-1)^j \sqrt{(b_1^* - a_2)^2 - 4a_1 b_2^*}}{2}, \quad j = 1, 2,$$

для определения функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, запишем следующие сингулярные интегральные уравнения:

$$\varphi_j(x) + \frac{iq_j}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi_j(s)}{s-x} ds = F_j(x), \quad -a < x < a. \tag{15}$$

При этом условия (12) принимают вид

$$\int_{-0}^{0} \varphi_j(x)\,dx = P_0, \quad j = 1, 2. \tag{16}$$

Решение уравнений (15) запишем в виде [1, 8]

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{1-q_j^2} \left(F_j(x) + \frac{q_j \omega_j(x)}{\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{F_j(s)\,ds}{\omega_j(s)(s-x)} \right). \tag{17}$$

Здесь $\omega_j(x) = \left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^{\gamma_j}$; $\gamma_j = \dfrac{1}{2\pi i}\ln|g_j| + \dfrac{\theta_j}{2\pi}$; $g_j = \dfrac{1+q_j}{1-q_j}$, $-\pi < \theta_j = \arg(g_j) < \pi$.

Отметим, что в случае действительных корней уравнения (14) числа g_j, $j=1,2$, являются действительными положительными числами. Следовательно, точки $\pm a$ — концы автоматической ограниченности [8].

В выражении функций $F_j(x)$, $j=1,2$, есть две неизвестные постоянные C_* и жесткое смещение δ, входящее в выражение заданных смещений $w_2(r)$ в неявном виде. Эти постоянные можно определить с помощью условия (16).

В случае одинаковых корней уравнений (14) решение системы уравнений (11) можно свести к последовательному интегрированию двух интегральных уравнений типа (15) и построить его решение аналогичным образом [3].

После нахождения функций $\varphi_j(x)$, $j=1,2$, используя их связь с функциями $\chi(x)$, $V'(x)$, а также формулы (9), (10) и формулы обращения интегрального оператора Абеля для определения функций $\sigma(r), \tau(r), w(r)$ и $u(r)$, получаем выражения

$$\sigma(r) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a s\,\mathrm{Re}\left[\frac{\lambda_2\varphi_1(x) - \lambda_1\varphi_2(x)}{\lambda_2-\lambda_1}\right]\left(s^2-r^2\right)^{-1/2}ds;$$

$$\tau(r) = -\frac{d}{dr}\int_r^a \mathrm{Im}\left[\frac{\lambda_2\varphi_1(x) - \lambda_1\varphi_2(x)}{\lambda_2-\lambda_1}\right]\left(s^2-r^2\right)^{-1/2}ds;$$

$$u(r) = -\frac{d}{dr}\int_r^a \mathrm{Re}\left[\int_{-a}^{s}\frac{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}{\lambda_2-\lambda_1}\right]\left(s^2-r^2\right)^{-1/2}ds;$$

$$w(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_r^a s\,\mathrm{Im}\left[\int_{-a}^{s}\frac{\varphi_1(x)-\varphi_2(x)}{\lambda_2-\lambda_1}\right]\left(s^2-r^2\right)^{-1/2}ds.$$

Коэффициенты концентрации напряжений на окружности $\boldsymbol{r=a}$. Определим коэффициенты концентрации напряжений на окружности $r=a$. Для этого рассмотрим последние два уравнения (7) вне интервала $(0,a)$. Введем функции $u_*(t), w_*(t), \sigma_*(t)$ и $\tau_*(t)$, затем запишем эти уравнения в явном виде

$$\sigma_z^{(1)}(r,0) = \frac{b_0}{\Delta}\int_0^a \sigma_*(t)\,dt\int_0^\infty sJ_0(sr)\cos(ts)ds +$$

$$+\frac{b_1}{\Delta}\int\limits_0^a \tau_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty sJ_0(sr)\sin(ts)ds+\frac{b_2}{\Delta}\int\limits_0^a u_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty s^2J_0(sr)\sin(ts)ds+$$

$$+\frac{b_3}{\Delta}\int\limits_0^a w_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty s^2J_0(sr)\cos(ts)ds; \quad (18)$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r,0)=\frac{b_1}{\Delta}\int\limits_0^a \sigma_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty sJ_1(rs)\cos tsds+$$

$$+\frac{b_0}{\Delta}\int\limits_0^a \tau_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty sJ_1(rs)\sin(ts)ds+\frac{b_3}{\Delta}\int\limits_0^a u_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty s^2J_1(rs)\cos(ts)ds+$$

$$+\frac{b_2}{\Delta}\int_0^a w_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty s^2J_1(rs)\cos(ts)ds,\quad r>a. \quad (19)$$

Интегрируя последние два слагаемых в (18) и (19) по частям и учитывая формулы $sJ_1(sr)=-\frac{d}{dr}J_0(sr)$; $sJ_0(sr)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[rJ_1(sr)\right]$, запишем (18) и (19) в следующем виде:

$$\sigma_z^{(1)}(r,0)=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\left\{\frac{b_0}{\Delta}\int\limits_0^a \sigma_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty J_1(sr)\cos tsds+\right.$$

$$+\frac{b_1}{\Delta}\int\limits_0^a \tau_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty J_1(sr)\sin t\,sds+$$

$$\left.+\frac{b_2}{\Delta}\int\limits_0^a u_*'(t)\,dt\int\limits_0^\infty J_1(sr)\cos t\,sds-\frac{b_3}{\Delta}\int\limits_0^a w_*'(t)\,dt\int\limits_0^\infty J_1(sr)\sin t\,sds\right\};$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r,0)=-\frac{d}{dr}\left\{\frac{b_1}{\Delta}\int\limits_0^a \sigma_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty J_0(sr)\cos t\,sds+\right.$$

$$+\frac{b_0}{\Delta}\int\limits_0^a \tau_*(t)\,dt\int\limits_0^\infty J_0(sr)\sin t\,sds+$$

$$\left.+\frac{b_3}{\Delta}\int\limits_0^a u_*'(t)\,dt\int\limits_0^\infty J_0(sr)\cos t\,sds-\frac{b_2}{\Delta}\int\limits_0^a w_*'(t)\,dt\int\limits_0^\infty J_0(sr)\sin t\,sds\right\}.$$

Используя значения известных интегралов Вебера [9, 10], получаем

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^{(1)}(r,0) &= \frac{b_1}{r\Delta}\frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{t\tau_*(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} - \frac{b_3}{\Delta r}\frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{tw'_*(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}};\\
\tau_{rz}^{(1)}(r,0) &= -\frac{b_1}{\Delta}\frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{\sigma_*(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} - \frac{b_3}{\Delta}\frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{u'_*(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}, \quad r>a.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Подставим в (20) выражения для величин $\tau_*(t)$, $w'_*(t)$, $\sigma_*(t)$ и $u'_*(t)$ через функции $\varphi_j(x)$, $j=1,2$, после некоторых элементарных выкладок запишем

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^{(1)}(r,0) &= -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,\mathrm{Im}\left\{A_1\int\limits_0^a \frac{t\varphi_1(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} - B_1\int\limits_0^a \frac{t\varphi_2(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\right\};\\
\tau_{rz}^{(1)}(r,0) &= \frac{d}{dr}Re\left\{A_1\int\limits_0^t \frac{\varphi_1(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} - B_1\int\limits_0^a \frac{\varphi_2(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\right\}, \quad r>a,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $A_1 = -\dfrac{\theta_2^{(2)}\lambda_2 b_1 + b_3}{\theta_2^{(2)}(\lambda_1-\lambda_2)\Delta}$; $B_1 = -\dfrac{\theta_2^{(2)}\lambda_1 b_1 + b_3}{\theta_2^{(2)}(\lambda_1-\lambda_2)\Delta}$.

Не нарушая общности, рассмотрим случай, когда квадратное уравнение (14) имеет различные комплексные корни: $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Следовательно, $g_2 = \overline{g_1}$ и $\gamma_2 = -\overline{\gamma_1}$. Пусть $0 < \mathrm{Re}\gamma_1 < 1/2$, тогда

$$
\varphi_1(x) = D_1\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{\gamma}; \quad \varphi_2(x) = D_2\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\bar\gamma};
$$

$$
D_j = -\frac{P_0 q_j^2}{2\pi a\gamma_j\left(1-q_j^2\right)\sin\pi\gamma_j}, \quad \gamma=\gamma_1=-\bar\gamma_2, \quad j=1,2.
$$

Согласно приведенным выражениям, $\varphi_1(a)\equiv 0$, следовательно, первые слагаемые, входящие в представления (21), имеют в точке $r=a$ более низкий порядок, чем вторые. Это означает, что особенность напряжений на окружности $r=a$ обусловлена вторыми слагаемыми. Изучим поведение этих слагаемых при $r=a$. Имеем

$$
I_1 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{t\varphi_2(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = \frac{D_2}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{t\left(\dfrac{a+t}{a-t}\right)^{\overline{\gamma}}dt}{\sqrt{r^2-t^2}} =
$$

$$
= \frac{aD_2}{r}\frac{d}{dr}\psi(a,r)\int\limits_0^a \left(\frac{t}{a-t}\right)^{\overline{\gamma}}\frac{dt}{r-t} +
$$

$$+\frac{D_2}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{t\psi(t,r)-a\psi(a,r)}{r-t}\left(\frac{t}{a-t}\right)^{\overline{\gamma}} dt =$$

$$= \frac{\pi a\overline{\gamma}\psi(a,r)\,D_2}{\sin\pi\overline{\gamma}}\frac{r^{\overline{\gamma}-1}}{(r-a)^{\overline{\gamma}+1}} + \varphi_1(r)\,. \quad (22)$$

Отметим, что при получении формулы (22) было использовано значение интеграла [11]

$$\int\limits_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha-1}\frac{dx}{x-y} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}\left(\left|\frac{a-y}{b-y}\right|^{\alpha-1} - 1\right),$$

$$0 < \ \mathrm{Re}\alpha < 2; \quad y < a < b; \quad y > b > a,$$

и введены обозначения

$$\psi(t,r) = \left(\frac{a+t}{t}\right)^{\gamma}\sqrt{\frac{r-t}{r+t}};$$

$$\varphi_1(r) = -\frac{a\pi\overline{\gamma}D_2\psi(a,r)}{\sin\pi\overline{\gamma}}\frac{r^{\overline{\gamma}-2}}{(r-a)^{\overline{\gamma}}} - \frac{a\pi D_2\psi'(a,r)}{r\sin\pi\overline{\gamma}}\left[\left(\frac{r}{r-a}\right)^{\overline{\gamma}} - 1\right] +$$

$$+\frac{D_2}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{t\psi(t,r)-a\psi(a,r)}{r-t}\left(\frac{t}{a-t}\right)^{\overline{\gamma}} dt.$$

Подставляя в (22) значение функции $\psi(t,r)$ в точке a, получаем

$$I_1(r) = -\frac{\pi\bar{\gamma}2^{\bar{\gamma}}D_2}{a\sin\pi\overline{\gamma}}\frac{(r/a)^{\bar{\gamma}-1}(r/a+1)^{-1/2}}{(r/a-1)^{1/2+\bar{\gamma}}} + \varphi_1(r)\,.$$

Нетрудно проверить, что особенность функции $\varphi_1(r)$ в точке $r=a$ более низкого порядка, чем особенность первого слагаемого.

Аналогично определим функции

$$I_2(r) = \frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{\varphi_2(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = D_2\frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{\left(\dfrac{a+t}{a-t}\right)^{\overline{\gamma}}}{\sqrt{r^2-t^2}}dt =$$

$$= \frac{\pi\bar{\gamma}2^{\bar{\gamma}}D_2}{a\sin\pi\bar{\gamma}}\frac{(r/a)^{\bar{\gamma}-1}(r/a+1)^{-1/2}}{(r/a-1)^{1/2+\bar{\gamma}}} + \varphi_2(r)\,;$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{\pi D_2\psi'(a,r)}{\sin\pi\overline{\gamma}}\left[\left(\frac{r}{r-a}\right)^{\overline{\gamma}} - 1\right] +$$

$$+D_2\frac{d}{dr}\int\limits_0^a \frac{\psi(t,r)-\psi(t,a)}{r-t}\left(\frac{t}{a-t}\right)^{\overline{\gamma}}dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(r,0) &= \operatorname{Im}\left\{\frac{\pi\overline{\gamma}2^{\overline{\gamma}}B_1D_2}{\sin\pi\overline{\gamma}}\frac{(r/a)^{\overline{\gamma}-1}(r/a+1)^{-1/2}}{(r/a-1)^{\overline{\gamma}+1/2}}\right\}+\varphi_1^*(r); \\ \tau_{rz}^{(1)}(r,0) &= -\operatorname{Re}\left\{\frac{\pi\overline{\gamma}2^{\overline{\gamma}}B_1D_2}{a\sin\pi\overline{\gamma}}\frac{(r/a)^{\overline{\gamma}-1}(r/a+1)^{-1/2}}{(r/a-1)^{\overline{\gamma}+1/2}}\right\}+\varphi_2^*(r); \end{aligned} \qquad (23)$$

$$\varphi_1^*(r) = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\operatorname{Im}\left\{A_1\int\limits_0^a\frac{t\varphi_1(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\right\}+\operatorname{Im}\{B_1\varphi_1(r)\};$$

$$\varphi_2^*(r) = \frac{d}{dr}\operatorname{Re}\left\{A_1\int\limits_0^a\frac{\varphi_1(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}\right\}-\operatorname{Re}\{B_1\varphi_2(r)\}.$$

Умножив второе уравнение из (23) на i и суммируя с первым уравнением, находим

$$\begin{gathered} \sigma_z^{(1)}(r,0)+i\tau_{rz}^{(1)}(r,0) = -\frac{\pi i\overline{\gamma}\,2^{\overline{\gamma}}B_1D_2}{a\sin\pi\overline{\gamma}}\frac{(r/a)^{\overline{\gamma}-1}(r/a+1)^{-1/2}}{(r/a-1)^{\overline{\gamma}+1/2}}+\varphi(r), \\ \varphi(r) = \varphi_1^*(r)+i\varphi_2^*(r), \quad r>a. \end{gathered} \qquad (24)$$

Согласно формуле (24), контактные напряжения, действующие на плоскости стыка полупространств вне трещины, в концевой точке трещины не ограничены и имеют порядок $\overline{\gamma}+1/2$, причем $\operatorname{Re}(\overline{\gamma}+1)/2 >$ $> 1/2$. С учетом этого коэффициент интенсивности разрушающих напряжений на окружности $r=a$ будет определяться по формуле

$$K_I+iK_{II} = -\frac{\pi i\overline{\gamma}\,2^{\overline{\gamma}-1/2}}{a\sin\pi\overline{\gamma}}D_2B_1. \qquad (25)$$

Аналогично можно получить коэффициент интенсивности напряжений при других значениях γ_1.

Об одном частном случае. Рассмотрим частный случай поставленной задачи: $u_2(r) = P_0^{(1)}(r) = 0$ и $w_2(r) = \delta =$ const, т.е. когда на нижний берег монетообразной трещины под действием сосредоточенной силы P вдавливается полностью сцепленная с ней жесткая шайба-включение. Тогда $V_2'(x) = -i\delta$; $\chi_0(x) = 0$; $P_0 = P/\pi$; $f_1(x) = \dfrac{2}{\pi\theta_2^{(1)}}[\delta b_1+d_1C_*] = C_1$; $f_2(x) = \dfrac{2}{\pi\theta_2^{(1)}\theta_2^{(2)}}[\delta b_3+b_1C_*] = C_2$.

Из формул (17) получим

$$\varphi_j(x) = \frac{(\lambda_j C_1 + C_2)\, q_j}{i \sin \pi\gamma_j \left(1 - q_j^2\right)} \omega_j(x), \quad |x| < 1; \quad j = 1, 2. \tag{26}$$

Удовлетворяя условиям (16), находим

$$\lambda_j C_1 + C_2 = -\frac{iP_0}{2\pi a} \left(\frac{q_j}{\gamma_j}\right), \quad j = 1, 2. \tag{27}$$

Подставим (27) в (26) и запишем

$$\varphi_j(x) = -\frac{P_0 q_j^2 \omega_j(x)}{2\pi a \gamma_j \left(1 - q_j^2\right) \sin \pi\gamma_j}, \quad j = 1, 2, \ |x| < a.$$

После определения функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, по формулам (17) нетрудно вычислить значения контактных напряжений, действующих под шайбой-включением, и параметры раскрытия трещин. Однако кроме указанных величин, одной из важнейших механических характеристик в рассматриваемой задаче является жесткое смещение δ шайбы-включения, которое также легко найти, используя соотношения (27). Действительно, рассматривая (27) как систему алгебраических уравнений, получаем

$$C_1 = \frac{iP_0\,(q_1\gamma_2 - q_1\gamma_2)}{4\pi a \gamma_1\gamma_2\,(\lambda_2 - \lambda_1)}; \quad C_2 = \frac{iP_0\,(q_1\gamma_2\lambda_2 - q_1\gamma_2\lambda_1)}{4\pi a \gamma_1\gamma_2\,(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Используя приведенные формулы для постоянных C_j, $j = 1, 2$, через параметры δ и C_* запишем формулу для определения жесткого смещения шайбы-включения

$$\delta = \frac{\pi\theta_2^{(1)} \left(b_1 C_1 - \theta_2^{(2)} d_1 C_2\right)}{2\,(b_1^2 - b_3 d_1)}. \tag{28}$$

Отметим, что в случае однородного пространства из формулы (28) для жесткого смещения шайбы-включения получается выражение

$$\delta = \frac{P\,(1 + \nu)\sqrt{3 - 4\nu}}{\pi a E\,(1 + 16\beta^2)}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{3 - 4\nu},$$

которое совпадает с выражением, полученным для этой величины Г.Я. Поповым в работе [5]. Здесь ν, E — коэффициент Пуассона и модуль упругости однородного пространства.

Численный расчет. Выполнены численные расчеты и по формулам (25), (28) получены значения приведенного безразмерного жесткого смещения штампа $\delta^* = \delta a E_2/P$ и приведенных безразмерных коэффициентов интенсивности $K_I^* = a^2 K_I/P$; $K_{II}^* = a^2 K_{II}/P$ при различных значениях $\mu = \mu_1/\mu_2$, когда коэффициенты Пуассона двух полупространств одинаковые ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$). Результаты расчетов приведены в табл. 1, 2.

Таблица 1

Значения жесткого смещения δ^* в зависимости от значений коэффициентов μ и ν

Значения μ	Значения ν				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45
0,2	0,2329	0,2097	0,1693	0,1043	0,0585
0,6	0,1846	0,1684	0,1379	0,0860	0,0484
1,0	0,1590	0,1453	0,1192	0,0744	0,0419
1,5	0,1387	0,1266	0,1037	0,0647	0,0364
5,0	0,0847	0,0764	0,0618	0,0381	0,0214
10	0,0608	0,0544	0,0437	0,0268	0,0150

Таблица 2

Значения коэффициентов интенсивности K_I^* (числитель) и K_{II}^* (знаменатель) в зависимости от значений коэффициентов μ и ν

Значения μ	Значения ν				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,45
0,2	0,0243/0,0114	0,0278/0,0106	0,0323/0,0090	0,0381/0,0060	0,0417/0,0035
0,6	0,0307/0,0173	0,0360/0,0164	0,0428/0,0142	0,0516/0,0096	0,0570/0,0057
1,0	0,0323/0,0182	0,0380/0,0173	0,0453/0,0151	0,0548/0,0103	0,0605/0,0061
1,5	0,0328/0,0177	0,0384/0,0168	0,0456/0,0146	0,0549/0,0099	0,0606/0,0059
5,0	0,0291/0,0113	0,0331/0,0105	0,0382/0,0089	0,0449/0,0059	0,0490/0,0035
10	0,0243/0,0072	0,0271/0,0065	0,0308/0,0054	0,0357/0,0035	0,0389/0,0021

Данные, представленные в табл. 1, 2, показывают, что жесткие смещения убывают, а коэффициенты интенсивности по абсолютной величине сначала возрастают, а затем убывают, когда жесткость нижнего полупространства постоянна, а жесткость верхнего полупространства возрастает при постоянном значении коэффициента Пуассона. При постоянном значении отношения жесткостей полупространств ($\mu =$ const) жесткое смещение штампа и коэффициент K_{II}^* уменьшаются, а коэффициент K_I^* увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 504 с.

2. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
3. *Акопян В.Н.* Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной // Известия НАН РА. Механика. 1995. Т. 48. № 4. С. 57–65.
4. *Акопян В.Н.* Смешанная задача для составной плоскости, ослабленной периодической системой трещин // Док. НАН РА. 2002. Т. 102. № 1. С. 29–34.
5. *Попов Г.Я.* О концентрации упругих напряжений возле тонкого отслоившегося включения // Сб. "Современные проблемы механики и авиации". 1980. С. 156–162.
6. *Мхитарян С.М.* Об одном классе смешанных задач теории упругости // Abstracts of Symposium "Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis", dedicated to the centenary of Academician N. Muskhelishvili. Tbilisi. 1991. P. 35.
7. *Акопян В.Н.* Напряжения возле абсолютно жесткого монетообразного включения в кусочно-однородном пространстве // Сб. трудов межд. конф. "Актуальные проблемы механики сплошной среды". Ереван. 2007. С. 45–51.
8. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
9. *Градштейн И.С.*, *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971. 1108 с.
10. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: ИИЛ, 1949. 798 с.
11. *Прудников А.П.*, *Брычков Ю.А.*, *Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738 с.

REFERENCES

[1] Muskhelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti [Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 504 p.

[2] Popov G.Ya. Kontsentratsiya uprugikh napryazheniy vozle shtampov, razrezov, tonkikh vklyucheniy i podkrepleniy [Elastic Stress Concentration near the Stamps, Cuts, Thin Inclusions and Reinforcements]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 344 p.

[3] Hakobyan V.N. On a Mixed Problem for a Composite Plane Weakened by a Crack. *Izvestiya NAN RA. Mekhanika* [Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics], 1995, vol. 48, no. 4, pp. 57–65.

[4] Hakobyan V.N. A Mixed Problem for a Composite Plane Weakened by a Periodic System of Cracks. *Dok. NAN RA* [Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia], 2002, vol. 102, no. 1, pp. 29–34.

[5] Popov G.Ya. Concentration of Elastic Stresses near Delaminated Thin Inclusion. Sb. "Sovremennye problemy mekhaniki i aviatsii" [Modern Problems of Mechanics and Aviation], 1980, pp. 156–162 (in Russ.).

[6] Mkhitaryan S.M. A Class of Mixed Problems of Elasticity Theory. *Abstracts of Symposium "Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis"*, dedicated to the centenary of Academician N. Muskhelishvili. Tbilisi, 1991, p. 35.

[7] Hakobyan V.N. Stress near Absolutely Rigid Coin-Shaped Inclusion in Piecewise Homogeneous Space. *Sb. Tr. Mezhdunar. Konf. "Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnoy sredy"* [Proc. Int. Sci. Conf. Actual Problems of Continuum Mechanics], Erevan, 2007, pp. 45–51.

[8] Gakhov F.D. Kraevye zadachi [Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p.

[9] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of Integrals, Series and Products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1971. 1108 p.

[10] Vatson G.N. Teoriya Besselevykh funktsiy [The Theory of Bessel Functions]. Part I. Moscow, In. Lit. Publ., 1949. 798 p.

[11] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady [Integrals and Series]. Moscow, Nauka, 1981. 738 p.

Статья поступила в редакцию 22.12.2014

Акопян Ваграм Наслетникович — д-р физ.-мат. наук, профессор, директор Института механики НАН РА. Автор 79 научных работ в области контактных и смешанных задач теорий упругости и вязкоупругости, теории трещин.
Институт механики НАН РА, Республика Армения, 0019, Ереван, пр-т Баграмяна, д. 24/2.

Hakobyan V.N. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, director of the Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia. Author of 79 publications in the field of contact mixed boundary value problems of the theories of elasticity and visco-elasticity, crack theory.
Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia, prosp. Baghramyana 24/2, Yerevan, 0019 Republic of Armenia.

Мирзоян Саак Езникович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА. Автор 40 научных работ в области контактных и смешанных задач теории ползучести стареющих материалов.
Институт механики НАН РА, Республика Армения, 0019, Ереван, пр-т Баграмяна, д. 24/2.

Mirzoyan S.E. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), senior researcher of the Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia. Author of 40 publications in the field of contact and mixed boundary value problems of the theory of ageing materials.
Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia, prosp. Baghramyana 24/2, Yerevan, 0019 Republic of Armenia.

Даштоян Лилит Левоновна — канд. физ.-мат. наук, ученый секретарь Института механики НАН РА. Автор 17 научных работ в области контактных и смешанных задач теории упругости.
Институт механики НАН РА, Республика Армения, 0019, Ереван, пр-т Баграмяна, д. 24/2.

Dashtoyan L.L. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), scientific secretary of the Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia. Author of 17 publications in the field of contact and boundary value problems of the theory of elasticity.
Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Armenia, prosp. Baghramyana 24/2, Yerevan, 0019 Republic of Armenia.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Акопян В.Н., Мирзоян С.Е., Даштоян Л.Л. Осесимметричная смешанная задача для составного пространства с монетообразной трещиной // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 31–46.

Please cite this article in English as:

Hakobyan V.N., Mirzoyan S.E., Dashtoyan L.L. Axisymmetric mixed boundary value problem for composite space with coin-shaped crack. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 3, pp. 31–46.