УДК 519.234.3

СРАВНЕНИЕ ОЦЕНОК МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ И НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА АВТОРЕГРЕССИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.Б. Горяинов[1], **Е.Р. Горяинова**[2]

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: vb-goryainov@bmstu.ru

[2]Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва, Российская Федерация
e-mail: el-goryainova@mail.ru

Изложен метод вычисления асимптотической относительной эффективности оценки наименьших модулей по отношению к оценке максимального правдоподобия для параметра авторегрессионного уравнения первого порядка со случайным коэффициентом. Метод основан на приближении асимптотической относительной эффективности ее рядом Тейлора. Рассмотрен пример вычисления асимптотической относительной эффективности для случая, когда распределение обновляющего процесса имеет приближенное гауссовское распределение (распределение Тьюки). Выяснено, что если предположение о гауссовости обновляющего процесса выполняются лишь приближенно, то оценка максимального правдоподобия уступает в эффективности оценке наименьших модулей.

Ключевые слова: авторегрессионная модель со случайными коэффициентами, оценка наименьших модулей, оценка максимального правдоподобия, асимптотическая относительная эффективность.

COMPARISON OF MAXIMUM LIKELIHOOD AND LEAST ABSOLUTE DEVIATE ESTIMATION IN RANDOM COEFFICIENTS AUTOREGRESSIVE MODEL

V.B. Goryainov[1], **E.R. Goryainova**[2]

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: vb-goryainov@bmstu.ru

[2]National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation
e-mail: el-goryainova@mail.ru

The paper presents the calculation method of an asymptotic relative efficiency of the least absolute deviations estimate with respect to the maximum likelihood estimate for the parameter presented in the first order autoregressive model with a stochastic coefficient. The method is based on approximation of its asymptotic relative efficiency by Taylor series. The paper considers an example of the asymptotic relative efficiency *calculation for the case where diffusion of the innovation process has an approximate Gaussian distribution (Tukey distribution). It is found out that if the assumptions of the Gaussian process are performed approximately, the maximum likelihood estimate is more efficient than the least absolute deviation estimate.*

Keywords: random coefficient autoregressive model, least absolute deviations estimate, maximum likelihood estimate, asymptotic relative efficiency.

Введение. Во многих областях науки и техники (например, [1–3]) эволюционные процессы описываются разностным уравнением

$$X_t = \Phi_{t1} X_{t-1} + \Phi_{t2} X_{t-2} + \ldots + \Phi_{tp} X_{t-p} + \varepsilon_t, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad (1)$$

где $\Phi_{t1}, \ldots, \Phi_{tp}$, ε_t — случайные величины. Уравнение (1) называется авторегрессионным уравнением порядка p со случайными коэффициентами, а основной задачей при его анализе является оценивание математических ожиданий $\varphi_1 = \mathrm{E}\Phi_{t1}, \ldots, \varphi_p = \mathrm{E}\Phi_{tp}$ авторегрессионных коэффициентов $\Phi_{t1}, \ldots, \Phi_{tp}$. Традиционный метод оценивания параметров $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — обобщенный метод максимального правдоподобия [4, 5]. Альтернатива оценкам максимального правдоподобия — оценки наименьших модулей.

В настоящей работе для авторегрессионного уравнения первого порядка проведено сравнение оценок максимального правдоподобия и наименьших модулей путем вычисления асимптотической относительной эффективности (АОЭ) этих оценок и изучения зависимости поведения АОЭ от параметров процесса X_t.

Оценки максимального правдоподобия и наименьших модулей. Рассмотрим уравнение авторегрессии первого порядка со случайным коэффициентом $\varphi + \eta_t$:

$$X_t = (\varphi + \eta_t) X_{t-1} + \varepsilon_t, \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad (2)$$

где φ — параметр уравнения, являющийся неслучайным действительным числом; (η_t, ε_t), $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов с независимыми координатами, нулевыми математическими ожиданиями $\mathrm{E}\eta_t = 0$, $\mathrm{E}\varepsilon_t = 0$ и конечными дисперсиями $\mathrm{D}\eta_t = \sigma_\eta^2 \geqslant 0$, $\mathrm{D}\varepsilon_t = \sigma_\varepsilon^2 > 0$. Если $\sigma_\eta^2 = 0$, то коэффициент $\varphi + \eta_t$ неслучайный и уравнение (2) — классическое авторегрессионное уравнение. Предположим, что X_t — стационарный процесс. В работе [4] показано, что при условии $\varphi^2 + \sigma_\eta^2 < 1$ существует стационарное решение уравнения (2), которое представляется в виде сходящегося с вероятностью единица ряда

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{ti} \varepsilon_{t-i}, \quad \delta_{t0} = 1, \quad \delta_{ti} = \prod_{j=0}^{i-1} (\varphi + \eta_{t-j}) \text{ для любых } i > 0. \quad (3)$$

Предположим, что параметр φ неизвестен и рассмотрим два метода его оценивания по наблюдениям $X_0, X_1, \ldots, X_n$ процесса X_t —

обобщенный метод максимального правдоподобия и метод наименьших модулей.

Обозначим через $\mathfrak{F}_t$ σ-алгебру, порожденную множеством случайных величин $\{\eta_s, \varepsilon_s, s \leqslant t\}$. Обобщенный метод максимального правдоподобия заключается в построении и максимизации условной функции правдоподобия в предположении, что условное распределение X_t при условии $\mathfrak{F}_{t-1}$ является нормальным. Согласно (1), условное математическое ожидание и условная дисперсия X_t при условии $\mathfrak{F}_{t-1}$ имеют вид $\mathrm{E}(X_t|\mathfrak{F}_{t-1}) = \varphi X_{t-1}, \quad \mathrm{D}(X_t|\mathfrak{F}_{t-1}) = \sigma_\eta^2 X_{t-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2$. Поэтому, если бы вектор (η_t, ε_t) являлся нормальным, то условная функция правдоподобия имела бы вид

$$L_n(\varphi) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_\eta^2 X_{i-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2)}} \exp\left(-\frac{(X_i - \varphi X_{i-1})^2}{2(\sigma_\eta^2 X_{i-1}^2 + \sigma_\varepsilon^2)}\right).$$

Обобщенная оценка максимального правдоподобия $\hat{\varphi}_n$ определяется как точка максимума $L_n(\varphi)$.

Обозначим $\ln^+(x) = \max(\ln(x), 0)$ положительную часть логарифма. Пусть в дополнение к перечисленным выше условиям справедливы неравенства $\mathrm{E}\ln^+|\varepsilon_1| < \infty$, $\mathrm{E}\ln^+|\varphi+\eta_1| < \infty$, $-\infty < \mathrm{E}\ln|\varphi+\eta_1| < 0$. В работе [4] показано, что в этом случае оценки максимального правдоподобия являются состоятельными и асимптотически нормальными оценками, т.е. $\hat{\varphi}_n \to \varphi$ по вероятности при $n \to \infty$ и последовательность случайных величин $\sqrt{n}(\hat{\varphi}_n - \varphi)$ сходится при $n \to \infty$ по распределению к нормальной случайной величине с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\left(\mathrm{E}\left[\frac{X_0^2}{\sigma_\eta^2 X_0^2 + \sigma_\varepsilon^2}\right]\right)^{-1}. \tag{4}$$

Оценка наименьших модулей $\tilde{\varphi}_n$ параметра φ определяется как точка минимума функции $\mathbb{L}_n(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{n} |X_i - \varphi X_{i-1}|$. Обозначим через f_ε, f_η плотности распределения вероятности ε_1 и η_1 соответственно. Было установлено, что если f_ε, f_η — четные функции и выполнены условия $\mathrm{E}\eta_1 = 0$, $\mathrm{D}\eta_1 = \sigma_\eta^2 < \infty$, $\mathrm{E}\varepsilon_1 = 0$, $\mathrm{D}\varepsilon_1 = \sigma_\varepsilon^2 < \infty$, $\varphi^2 + \sigma_\eta^2 < 1$, то оценка $\tilde{\varphi}_n$ состоятельна, а последовательность случайных величин $\sqrt{n}(\tilde{\varphi}_n - \varphi)$ при $n \to \infty$ асимптотически нормальна с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\frac{\mathrm{E}X_0^2}{4\mathrm{E}^2[X_0^2 f_\varepsilon(\eta_1 X_0)]}. \tag{5}$$

Асимптотическая относительная эффективность. При наличии нескольких оценок одного и того же параметра возникает задача сравнения их друг с другом. Очевидно, что оценка тем лучше, чем меньше ее отклонение от оцениваемого параметра. Если оценка состоятельна, то в скалярном случае за меру качества оценки разумно принять ее асимптотическую дисперсию. Поэтому для сравнения оценки максимального правдоподобия и оценки наименьших модулей необходимо выяснить, какая из двух величин (4) или (5) меньше. Следовательно, мерой сравнения качества двух состоятельных асимптотически нормальных оценок естественно считать АОЭ, которая определяется как обратное отношение их асимптотических дисперсий. В частности, АОЭ $e(f_\eta, f_\varepsilon)$ оценки наименьших модулей по отношению к оценке максимального правдоподобия равна

$$e(f_\eta, f_\varepsilon) = \frac{\left(\mathrm{E}\left[\dfrac{X_0^2}{\sigma_\eta^2 X_0^2 + \sigma_\varepsilon^2}\right]\right)^{-1}}{\dfrac{\mathrm{E}(X_0^2)}{4\mathrm{E}^2[X_0^2 f_\varepsilon(\eta_1 X_0)]}} = \frac{4\mathrm{E}^2[X_0^2 f_\varepsilon(\eta_1 X_0)]}{\mathrm{E}(X_0^2)\mathrm{E}\left(\frac{X_0^2}{\sigma_\eta^2 X_0^2 + \sigma_\varepsilon^2}\right)}. \tag{6}$$

В соответствии с определением, если $e(f_\eta, f_\varepsilon) > 1$, то оценка наименьших модулей лучше (точнее) оценки максимального правдоподобия, а если $e(f_\eta, f_\varepsilon) < 1$, то оценка максимального правдоподобия лучше оценки наименьших модулей.

Отметим, что АОЭ $e(f_\eta, f_\varepsilon)$ зависит от распределения вероятности случайных величин η_1 и ε_1 и одна из этих оценок не будет лучше другой при всех функциях f_η, f_ε. Поэтому необходимо вычислить АОЭ $e(f_\eta, f_\varepsilon)$ для наиболее распространенных распределений. Однако при определении математических ожиданий в АОЭ $e(f_\eta, f_\varepsilon)$ возникает трудность, связанная с неизвестностью распределения вероятности случайной величины X_0, поскольку она зависит от величин η_t и ε_t, $t \leqslant 0$, достаточно сложным образом (см. (3)). В частности, из гауссовости величин η_t и ε_t, $t \leqslant 0$, не следует гауссовость величины X_0.

Представление АОЭ через моменты авторегрессионного процесса. Используя соотношение $1/(1-x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$, получаем

$$\frac{X_0^2}{\sigma_\eta^2 X_0^2 + \sigma_\varepsilon^2} = \frac{X_0^2}{\sigma_\varepsilon^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{X_0^2 \sigma_\eta^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right)^n$$

и

$$\mathrm{E}\left(\frac{X_0^2}{\sigma_\eta^2 X_0^2 + \sigma_\varepsilon^2}\right) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right)^n \mathrm{E}X_0^{2n+2} \tag{7}$$

в предположении, что моменты $\mathrm{E}(X_0^{2n+2})$ существуют для всех n и ряд в правой части равенства (7) сходится. Предположим, что функция $f_\varepsilon(x)$ бесконечно дифференцируема. Тогда из разложения функции

$f_\varepsilon(x)$ в нуле в ряд Тейлора и независимости величины η_1 от X_0 имеем

$$\mathrm{E}\left(X_0^2 f_\varepsilon(\eta_1 X_0)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_\varepsilon^{(n)}(0)}{n!} \mathrm{E}\eta_1^n \mathrm{E}X_0^{n+2}. \tag{8}$$

Таким образом, вычисление АОЭ свелось к определению моментов $\mathrm{E}X_0^n$ случайной величины X_0 и выяснения условий сходимости рядов (7) и (8).

Поскольку процесс X_t предполагается стационарным, его моменты $\mathrm{E}X_t^n$ не зависят от t и совпадают с $\mathrm{E}X_0^n$. С учетом этого, а также предположения о независимости и одинаковой распределенности (η_t, ε_t) возведем обе части (2) в n-ю степень, применим операцию математического ожидания и запишем выражение $\mathrm{E}X_t^n = \mathrm{E}((\varphi + \eta_t)X_{t-1} + {} + \varepsilon_t)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{E}X_{t-1}^k \mathrm{E}\varepsilon_t^{n-k} \mathrm{E}(\varphi + \eta_t)^k$, из которого вытекает рекуррентное соотношение для моментов $\mathrm{E}(X_0^n)$:

$$\mathrm{E}X_0^n = \frac{1}{1 - \mathrm{E}(\varphi + \eta_1)^n} \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k \mathrm{E}X_0^k \mathrm{E}\varepsilon_1^{n-k} \mathrm{E}(\varphi + \eta_1)^k. \tag{9}$$

Равенство (9) накладывает ограничения на функции f_η и f_ε, в частности случайные величины η_t, ε_t не могут быть нормальными. Действительно, если величины η_1 и ε_1 имеют нормальное распределение, то для любого натурального n: $\mathrm{E}\eta_1^{2n} = (n-1)!!\sigma_\eta^{2n}$, $\mathrm{E}\eta_1^{2n-1} = \mathrm{E}\varepsilon_1^{2n-1} = 0$, где $(n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)$. Поэтому $\mathrm{E}\eta_1^{2n} \to \infty$ при $n \to \infty$ и $1 - \mathrm{E}(\varphi + \eta_1)^{2n} < 0$ при $\varphi > 0$ и достаточно больших значениях n, в то время как сумма в правой части (9) остается всегда положительной. Таким образом, $\mathrm{E}X_0^{2n} < 0$ для достаточно больших значений n, что невозможно.

Усеченное нормальное распределение. Преодолеть эту трудность можно, предположив, что величины η_t имеют усеченное нормальное распределение:

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Phi_0(k_\omega)\omega\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\omega^2)}, & \text{если } |x| \le \omega k_\omega; \\ 0, & \text{если } |x| > \omega k_\omega, \end{cases}$$

где $\Phi_0(x) = \int\limits_0^x \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ — функция Лапласа; ω и k_ω — некоторые положительные постоянные. В частности, при $k_\omega = 3$ имеем аппроксимацию нормального распределения с помощью “правила трех сигм”, а увеличивая постоянную k_ω, можно сколь угодно точно аппроксимировать нормальное распределение усеченным нормальным распределением, что достаточно для практических приложений. В этом случае

$E\eta_1^n = 0$ для нечетных значений n и

$$E\eta_1^{2n} = \int\limits_{-\omega k_\omega}^{\omega k_\omega} x^{2n} \frac{1}{2\Phi_0(k_\omega)\omega\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\omega^2)} dx =$$
$$= \frac{(2\omega^2)^n}{2\Phi_0(k_\omega)\sqrt{\pi}} \left(\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) - \Gamma\left(n+\frac{1}{2}, \frac{k_\omega^2}{2}\right)\right). \quad (10)$$

Здесь $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, $\Gamma(a,z) = \int\limits_z^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция и неполная гамма-функция. В частности,

$$E\eta_1^2 = \int\limits_{-\omega k_\omega}^{\omega k_\omega} x^2 \frac{1}{2\Phi_0(k_\omega)\omega\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\omega^2)} dx =$$
$$= \omega^2 \left(1 - \frac{k_\omega e^{-k_\omega^2/2}}{\sqrt{2\pi}\Phi_0(k_\omega)}\right) \to \omega^2 \text{ при } k_\omega \to \infty. \quad (11)$$

Кроме того,

$$E\eta_1^{2n} \le \int\limits_{-\omega k_\omega}^{\omega k_\omega} (\omega k_\omega)^{2n} \frac{1}{2\Phi_0(k_\omega)\omega\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\omega^2)} dx = (\omega k_\omega)^{2n} \quad (12)$$

и

$$|E(\varphi+\eta_1)^n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left|E\eta_1^k\right| |\varphi|^{n-k} \leqslant (|\varphi| + \omega k_\omega)^n. \quad (13)$$

Из неравенств (12) и (13), представления (3) и независимости (η_t, ε_t), $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, следует, что при $|\varphi| + \omega k_\omega < 1$

$$EX_0^n = \sum_{k=0}^{\infty} E\delta_{0k}^n E\varepsilon_{-k}^n =$$
$$= E\varepsilon_1^n \sum_{k=0}^{\infty} E\delta_{0k}^n\} E\varepsilon_1^n \sum_{k=0}^{\infty} (|\varphi| + \omega k_\omega)^{nk} = \frac{E\varepsilon_1^n}{1 - (|\varphi| + \omega k_\omega)^n}. \quad (14)$$

Найдем условия сходимости рядов (7) и (8). Если величины ε_t являются нормальными, то $E\varepsilon_1^{2n} = (2n-1)!!\sigma^{2n}$ и из (14) следует, что $EX_0^{2n} \sim E\varepsilon_1^{2n} = (2n-1)!!\sigma_\varepsilon^{2n}$ при $n \to \infty$. Поэтому $\sigma_\eta^{2n}\sigma_\varepsilon^{-2n}EX_0^{2n} \sim \sigma_\eta^{2n}(2n-1)!! \not\to 0$ при $n \to \infty$ и ряд (7) расходится.

Предположим, что величины ε_t, как и величины η_t, тоже имеют усеченное нормальное распределение:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Phi_0(k_\sigma)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & \text{если } |x| \le \sigma k_\sigma; \\ 0, & \text{если } |x| > \sigma k_\sigma, \end{cases} \tag{15}$$

где σ, k_σ — некоторые положительные постоянные. Тогда аналогично (11), (12) имеем

$$\mathrm{E}\varepsilon_1^2 = \sigma^2 \left(1 - \frac{k_\sigma e^{-k_\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}\Phi_0(k_\sigma)}\right), \tag{16}$$

$$\mathrm{E}\varepsilon_1^{2n} \le (\sigma k_\sigma)^{2n}. \tag{17}$$

Пусть

$$|\varphi| + \omega k_\omega < 1. \tag{18}$$

Тогда $\sqrt[n]{1 - (|\varphi| + \omega k_\omega)^{2n}} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому из (14) и признака Коши сходимости рядов следует, что ряд (7) абсолютно сходится, если $\sigma_\eta \sigma k_\sigma / \sigma_\varepsilon < 1$, что равносильно (см. (11), (16)) условию

$$\frac{\omega^2 k_\sigma^2 \left(1 - \dfrac{k_\omega e^{-k_\omega^2/2}}{\sqrt{2\pi}\Phi_0(k_\omega)}\right)}{\left(1 - \dfrac{k_\sigma e^{-k_\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}\Phi_0(k_\sigma)}\right)} < 1.$$

В частном случае, когда $k_\omega = k_\sigma$, это выражение превращается в неравенство $\omega k_\omega < 1$, которое поглощается условием (18).

Вычисление АОЭ. Перейдем к изучению сходимости ряда (8), где функция $f_\varepsilon(x)$ имеет вид (15). Функция $f_\varepsilon(x)$ вида (15) разрывна, поэтому в (8) заменим ее функцией $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\Phi_0(k_\sigma)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}$, ряд Тейлора которой сходится на всей числовой оси. В этом случае

$$f_\varepsilon(x) - \tilde{f}_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \le \sigma k_\sigma; \\ -\dfrac{1}{2\Phi_0(k_\sigma)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & \text{если } |x| > \sigma k_\sigma, \end{cases}$$

и для всех действительных x:

$$|f_\varepsilon(x) - \tilde{f}_\varepsilon(x)| \le \frac{1}{2\Phi_0(k_\sigma)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-k_\sigma^2/(2\sigma^2)}.$$

Поэтому

$$\left|\mathrm{E}(X_0^2 f_\varepsilon(\eta_1 X_0)) - \mathrm{E}(X_0^2 \tilde{f}_\varepsilon(\eta_1 X_0))\right| \le \frac{\mathrm{E}X_0^2}{2\Phi_0(k_\sigma)\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-k_\sigma^2/(2\sigma^2)} \to 0$$

при $k_\sigma \to \infty$, и $\mathrm{E}\big(X_0^2 f_\varepsilon(\eta_1 X_0)\big)$ можно сколь угодно точно аппроксимировать величиной $\mathrm{E}\big(X_0^2 \tilde{f}_\varepsilon(\eta_1 X_0)\big)$, увеличивая по мере необходимости постоянную k_σ. Оценку точности можно получить, вычисляя момент $\mathrm{E}X_0^2$ по формуле (9), которая при $n = 2$ имеет вид $\mathrm{E}X_0^2 = \dfrac{\mathrm{E}\varepsilon_1^2}{1 - \varphi^2 - \mathrm{E}\eta_1^2}$.

Более точную оценку точности можно найти, используя неравенство Коши – Буняковского и второе неравенство Чебышева. Обозначив через $I(|\eta_1 X_0| > \sigma k_\sigma)$ индикаторную функцию множества $\{|\eta_1 X_0| > \sigma k_\sigma\}$, получим

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathrm{E}(X_0^2 f_\varepsilon(\eta_1 X_0)) - \mathrm{E}(X_0^2 \tilde{f}_\varepsilon(\eta_1 X_0))\Big| = \\
&\qquad = \Big|\mathrm{E}\left(X_0^2 f_\varepsilon(\eta_1 X_0) I(|\eta_1 X_0| > \sigma k_\sigma)\right)\Big| \le \\
&\qquad \le \sqrt{\mathrm{E}\left(X_0^4 f_\varepsilon^2(\eta_1 X_0)\right)\mathrm{E}\left(I(|\eta_1 X_0| > \sigma k_\sigma)\right)} \le \\
&\qquad \le \sqrt{\mathrm{E}X_0^4 \frac{e^{-k_\sigma^2/\sigma^2}}{8\pi\sigma^2\Phi_0^2(k_\sigma)} \frac{\mathrm{E}\eta_1^2 \mathrm{E}X_0^2}{\sigma^2 k_\sigma^2}} = \frac{\mathrm{E}\eta_1^2 \mathrm{E}X_0^2 \sqrt{\mathrm{E}X_0^4}}{8\pi\sigma^4\Phi_0^2(k_\sigma) k_\sigma^2} e^{-k_\sigma^2/\sigma^2}.
\end{aligned} \qquad (19)$$

Таким образом, если величины η_t и ε_t имеют усеченное нормальное распределение, то

$$\mathrm{E}\left(X_0^2 f_\varepsilon(\eta_1 X_0)\right) \approx \frac{1}{2\Phi_0(k_\sigma)\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} n!} \mathrm{E}\eta_1^{2n} \mathrm{E}X_0^{2n+2},$$

где $\mathrm{E}X_0^{2n+2}$ и $E\eta_1^{2n}$ вычисляются по формулам (9) и (10).

Пример. Пусть η_t и ε_t имеют усеченное нормальное распределение, $\varphi = 0{,}2$, $k_\omega = 3$, $\omega = 0{,}1$, $k_\sigma = 3$, $\sigma = 3$ и в формулах (7), (8) берутся первые шесть членов суммы. Тогда АОЭ оценки наименьших модулей по отношению к оценке максимального правдоподобия равна 0,637, при этом значение погрешности вычисления АОЭ, связанной с заменой функции f_ε функцией $\tilde{f}_\varepsilon$ согласно (19), не превышает 0,000113. Таким образом, для достижения одинаковой точности оценки наименьших модулей необходимо примерно в 1,5 раза больше наблюдений, чем при оценке максимального правдоподобия. Высокая эффективность оценки максимального правдоподобия объясняется тем, что она по определению является наилучшей, если процесс X_t имеет нормальное распределение. Между тем истинное распределение X_t не сильно отличается от нормального, поскольку вследствие небольших значений φ и ω распределение X_t согласно (3) практически совпадает с распределением ε_t.

Усеченное распределение Тьюки. История применения метода максимального правдоподобия показала, что он достаточно чувствителен даже к небольшим нарушениям в предположении о распределении случайных величин. Хорошей моделью нарушения предположений о нормальности является распределение Тьюки (см. [6]) с плотностью

$$f(x) = (1-\gamma)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}e^{-x^2/(2\tau^2)}+\gamma\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/(2\sigma^2)}, \quad 0 \le \gamma \le 1, \quad \tau > 1.$$

Последовательность случайных величин, имеющих распределение Тьюки, имитирует типичное на практике загрязнение последовательности нормальных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией τ^2, добавляя в нее случайно с вероятностью γ нормальные случайные величины также с нулевым математическим ожиданием, но с большей, чем τ^2, дисперсией σ^2.

Если величины η_1 имеют усеченное нормальное распределение, а ε_1 — распределение Тьюки, то

$$\mathrm{E}\varepsilon_1^n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно;} \\ (n-1)!!((1-\gamma)\tau^n + \gamma\sigma^n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Следовательно, ряд (7) будет расходиться. Поэтому предположим, что величины ε_1 имеют усеченное распределение Тьюки:

$$f_\varepsilon(x) = (1-\gamma)g_1(x) + \gamma g_2(x),$$

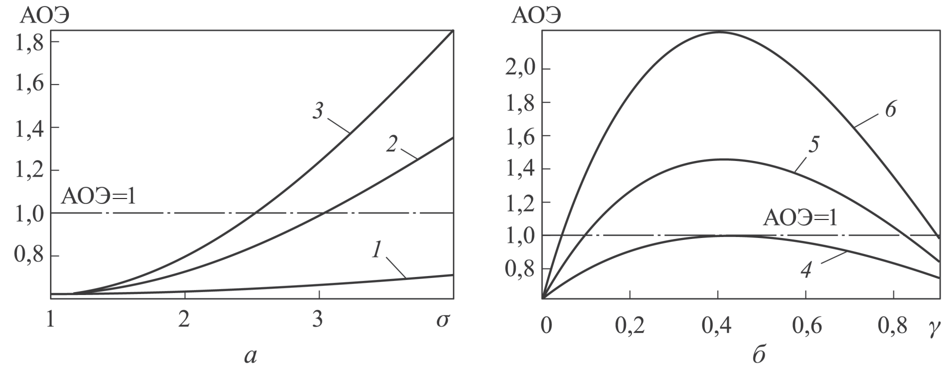
где

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/(2\tau^2)}}{2\Phi_0(k_\tau)\tau\sqrt{2\pi}}, & \text{если } |x| \le k_\tau\tau; \\ 0, & \text{если } |x| \le k_\tau\tau, \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{2\Phi_0(k_\sigma)\sigma\sqrt{2\pi}}, & \text{если } |x| \le k_\sigma\sigma; \\ 0, & \text{если } |x| \le k_\sigma\sigma, \end{cases}$$

k_τ, τ, k_σ, σ — некоторые положительные постоянные. Вычисляя АОЭ по формуле (6), получаем, что она не только превышает в ряде случаев единицу, но и может быть сколь угодно большой с возрастанием доли загрязнения γ и уровня загрязнения σ. Изложенное хорошо иллюстрируют зависимости АОЭ от величин γ и σ. Для определенности предполагалось, что $\varphi = 0{,}1$, $\omega = 0{,}01$, $k_\omega = 3$, $k_\tau = 3$, $\tau = 1$, $k_\sigma = 3$.

Зависимость АОЭ от величины σ при различных значениях γ приведена на части *а* рисунка, а зависимость АОЭ от величины γ при различных значениях σ — на части *б* рисунка. Видно, что с возрастанием величин γ и σ АОЭ увеличивается, становясь при $\sigma > 2{,}22$ для некоторых значений γ больше единицы, что свидетельствует о превосходстве для этих значений параметров γ и σ оценки наименьших модулей над оценкой максимального правдоподобия. Отметим, что при $\gamma > 0{,}5$ роль засорения наблюдений начинают играть случайные



Зависимости АОЭ от величины σ (*а*) при $\gamma = 0{,}01$ (*1*), 0,1 (*2*), 0,2 (*3*) и от величины γ (*б*) при $\sigma = 2{,}22$ (*4*), 3,0 (*5*), 4,0 (*6*)

величины с дисперсией τ, а не σ, этих засорений с увеличением параметра γ становится все меньше и меньше. Именно этим объясняется падение эффективности при $\gamma > 0{,}5$. На практике значение γ обычно не превышает 0,15.

Заключение. В работе изложен метод вычисления АОЭ оценки наименьших модулей по отношению к оценке максимального правдоподобия для параметра авторегрессионного уравнения первого порядка со случайным коэффициентом. Установлено, что если предположения о распределении обновляющего поля выполняются лишь приближенно, то оценка максимального правдоподобия уступает в эффективности оценке наименьших модулей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nicholls D.F.*, *Quinn B.G.* Random coefficient autoregressive models: an introduction. N.Y.–Berlin: Springer-Verlag, 1982. 154 p.
2. *Tong H.* Nonlinear time series. A dynamical system approach. N.Y.: Clarendon Press, 1990. 564 p.
3. *Diaconis P.*, *Freedman D.* Iterated random functions // SIAM Rev. 1999. Vol. 41. No. 1. P. 45–76.
4. *Aue A.*, *Horváth L.*, *Steinebach J.* Estimation in random coefficient autoregressive models // J. Time Ser. Anal. 2006. Vol. 27. No. 1. P. 61–76.
5. *Truquet L.*, *Yao J.* On the quasi-likelihood estimation for random coefficient autoregressions // Statistics. 2012. Vol. 46. No. 4. P. 505–521.
6. *Робастность* в статистике. Подход на основе функций влияния / Ф. Хампель, Э. Рончетти, П. Рауссеу, В. Штаэль; пер. с англ. М.: Мир, 1989. 512 с.

REFERENCES

[1] Nicholls D.F., Quinn B.G. Random coefficient autoregressive models: an introduction. N.Y.–Berlin, Springer-Verlag, 1982. 154 p.

[2] Tong H. Nonlinear time series. A dynamical system approach. New York, Clarendon Press, 1990, 564 p.

[3] Diaconis P., Freedman D. Iterated random functions. *SIAM Rev.*, 1999, vol. 41, no. 1, pp. 45–76.
[4] Aue A., Horváth L., Steinebach J. Estimation in random coefficient autoregressive models. *J. Time Ser. Anal.*, 2006, vol. 27, no. 1, pp. 61–76.
[5] Truquet L., Yao J. On the quasi-likelihood estimation for random coefficient autoregressions. *Statistics*, 2012, vol. 46, no. 4, pp. 505–521.
[6] Hampel F., Ronchetti E., Rousseeuw P., Stahel W. Robust Statistics: The Approach Based on Influence Function. New York, John Wiley & Sons, 1984. 472 p.

Статья поступила в редакцию 23.09.2014

Горяинов Владимир Борисович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 48 научных работ в области робастного анализа нелинейных стохастических процессов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Goryainov V.B. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 48 publications in the field of robust analysis of nonlinear stochastic processes.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Горяинова Елена Рудольфовна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики факультета экономики НИУ ВШЭ. Автор 31 научной работы в области непараметрических статистических методов.
Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ), Российская Федерация, 101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 20.

Goryainova E.R. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of Higher Mathematics department of the Faculty of Economics at the National Research University Higher School of Economics. Author of 31 publications in the field of nonparametric statistical methods.
National Research University Higher School of Economics, ul. Myasnitskaya 20, Moscow, 101000 Russian Federation.

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Горяинов В.Б., Горяинова Е.Р. Сравнение оценок максимального правдоподобия и наименьших модулей параметров процесса авторегрессии со случайными коэффициентами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 3. С. 20–30.

Please cite this article in English as:

Goryainov V.B., Goryainova E.R. Comparison of maximum likelihood and least absolute deviate estimation in random coefficients autoregressive model. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2015, no. 3, pp. 20–30.