УДК 519.21

ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕСКОКА ГРАНИЦЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ И ВЕТВЯЩИЙСЯ ПРОЦЕСС С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

А.В. Калинкин

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: kalinkin@bmstu.ru

Рассмотрено случайное блуждание на целочисленной решетке полуплоскости. Найдены вероятности остановки случайного блуждания на границе полуплоскости и вероятности перескока этой границы. Для аналитического решения задачи определен вспомогательный марковский процесс с непрерывным временем на целочисленной решетке четверти плоскости, "вложенная цепь Маркова" для которого совпадает со случайным блужданием. Применен предложенный автором метод экспоненциальной производящей функции для решения стационарной первой (обратной) системы дифференциальных уравнений Колмогорова для марковского ветвящегося процесса с взаимодействием. Явное представление для вероятностей остановки в точке границы-полосы получено в предположении, что скачки случайного блуждания направлены в полуплоскость. Это представление обобщает известный частный случай сведения границы полуплоскости в линию, перескок через границу отсутствует.

***Ключевые слова*:** вероятность остановки случайного блуждания, марковский процесс с дискретными состояниями, экспоненциальная производящая функция, обыкновенное линейное дифференциальное уравнение бесконечного порядка с параметром, точное решение.

PROBABILITY OF JUMP ACROSS THE BORDER FOR RANDOM WALK IN A HALF-PLANE AND A BRANCHING PROCESS WITH INTERACTION

A.V. Kalinkin

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: kalinkin@bmstu.ru

Random walk on the integer-valued lattice of a half-plane is considered. Probability of a random walk stop at the border as well as probability of jump across the border, are studied. In order to solve the problem analytically, an auxiliary Markov process with continuous time is defined on the integer-valued lattice of a quadrant. "Embedded Markov chain" for this process coincides with the random walk. The method of exponential generating function is proposed by the author to solve a stationary first (backward) system of Kolmogorov differential equations for the Markov branching process with interaction. Explicit representation for the probability of stopping at the border-strip is obtained under the assumption that the random walk jumps are directed to the half-plane. This representation is a generalization of the case when boundary is a line, and there is no jump across the border.

***Keywords*:** absorption probability of a random walk, Markov process with discrete states, exponential generating function, ordinary linear differential equation of infinite order with the parameter, exact solution.

Случайное блуждание (S_n^0, S_n) в полуплоскости и задача о вероятностях остановки. На множестве состояний $Z\times N=\{(\alpha_0,\alpha),\ \alpha_0= =\ldots,-1,0,1,\ldots,\ \alpha=0,1,\ldots\}$ рассмотрим однородное случайное блуждание $(S_n^0,S_n),\ n=0,1,\ldots$ Переходные вероятности за n шагов обозначим $P_{(\beta_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}(n)=\mathbf{P}\{(S_n^0,S_n)=(\beta_0,\beta)|(S_0^0,S_0)=(\alpha_0,\alpha)\}$. Пусть переходные вероятности за один шаг равны ($k=1,2,\ldots$)
$\mathbf{P}\{(S_{n+1}^0,S_{n+1})=(\beta_0,\beta)|(S_n^0,S_n)=(\alpha_0,\alpha)\}=p_{\beta_0-\alpha_0,\beta-\alpha+k}$, если $\beta_0\geqslant\alpha_0$ и $\alpha\geqslant k\beta-\alpha+k\geqslant 0$;

$\mathbf{P}\{(S_{n+1}^0,S_{n+1})=(\beta_0,\beta)|(S_n^0,S_n)=(\alpha_0,\alpha)\}=0,$ если $\beta_0<\alpha_0$;

$\mathbf{P}\{(S_{n+1}^0,S_{n+1})=(\alpha_0,\alpha)|(S_n^0,S_n)=(\alpha_0,\alpha)\}=1$, если $\alpha<k$.

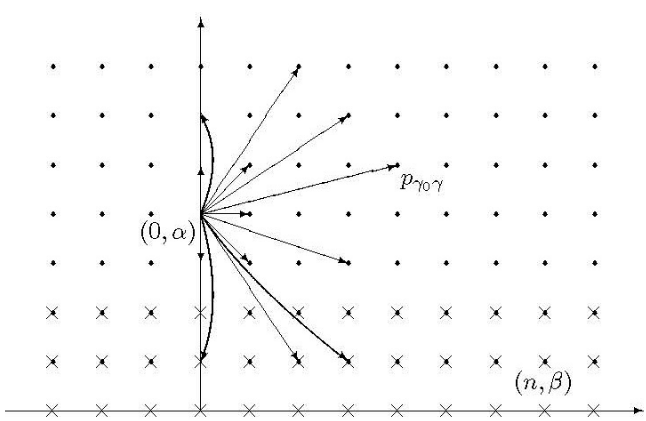
Здесь задано распределение вероятностей $\{p_{\gamma_0\gamma}\geqslant 0,\ (\gamma_0,\gamma)\in N^2;$ $\displaystyle\sum_{\gamma_0,\gamma=0}^{\infty}p_{\gamma_0\gamma}=1,\ p_{0k}=0\}$.

Для случайного блуждания (S_n^0,S_n) возможна остановка в одном из состояний множества $\{(\gamma_0,\beta),\ \gamma_0\in Z,\ \beta=0,\ldots,k-1\}$. Вероятности остановки равны

$$q_{(\gamma_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}=\lim_{n\to\infty}P_{(\gamma_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}(n),\quad \gamma_0\in Z,\ \beta=0,\ldots,k-1, \tag{1}$$

и при $\beta=k-1$ есть вероятности достижения границы полуплоскости $\{(\gamma_0,k-1),\ \gamma_0\in Z\}$, а при $\beta=0,\ldots,k-2$ — вероятности перескока этой границы. Скачки случайного блуждания (S_n^0,S_n) из состояния $(0,\alpha)$ и множество $\{(\gamma_0,\beta),\ \gamma_0\in Z,\ \beta=0,\ldots,k-1\}$ приведены на рисунке.

Введем производящую функцию вероятностей скачков $h(u,s)= =\displaystyle\sum_{\gamma_0,\gamma=0}^{\infty}p_{\gamma_0\gamma}u^{\gamma_0}s^{\gamma}$, $|u|\leqslant 1$, $|s|\leqslant 1$. В работе получено выражение для ве-



Скачки случайного блуждания ($k=3$, точки остановки обозначены знаком “×”)

роятностей (1) при общих предположениях о производящей функции $h(u, s)$.

При исследовании случайных блужданий часто используется схема суммирования независимых случайных величин (см. [1] и др.). Методы решения задач о вероятностях остановки случайных блужданий в точках границы разнообразны — применяются аналитические подходы, в частности, разностные уравнения [1], операционное исчисление [2], алгебраические структуры [3] и др. В настояшей работе использована введенная в работе [4] экспоненциальная производящая функция для вероятностных распределений, зависящих от неотрицательного целочисленного параметра. Такой способ вычисления вероятностей остановки был применен в работе [5] для случайного блуждания в четверти плоскости N^2, в работе [6] — для трехмерного блуждания в плоскости N^3, в работе [7] — для неоднородного случайного блуждания в плоскости N^2.

В настоящей статье в лемме 1 из стандартного для теории случайных блужданий линейного уравнения в конечных разностях выведено соотношение для производящих функций вероятностей остановки. Определяемая соответствующим характеристическим уравнением неявно задаваемая комплекснозначная фунция $\lambda(u)$ исследована в лемме 3. В лемме 4 для производящих функций вероятностей остановки приведено выражение в виде суммы некоторых произведений ветвей $\lambda_0(u), \ldots, \lambda_{k-1}(u)$ указанной многозначной функции.

Определен марковский ветвящийся процесс с взаимодействием, "вложенная цепь Маркова" для которого совпадает с рассматриваемым случайным блужданием. В лемме 5 показано, что экспоненциальная (двойная) производящая функция вероятностей остановки удовлетворяет обыкновенному линейному дифференциальному уравнению бесконечного порядка с коэффициентами, зависящими от параметра — стационарному первому (обратному) уравнению Колмогорова. Полученное в теореме 1 выражение для вероятностей остановки следует из равенства $h(u, \lambda(u)) - \lambda^k(u) = 0$. Теорема 1 анонсирована в работе [8].

Обобщен случай $k = 1$ [9], когда перескока через границу полуплоскости нет. В работе [9] использовано нелинейное *свойство ветвления* переходных вероятностей, позволяющее свести исследование к схеме суммирования независимых случайных величин.

Разностное уравнение для производящих функций вероятностей остановки. Учитывая равенство $q_{(n,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)} = q_{(n-\alpha_0,\beta)}^{(0,\alpha)}$, далее рассмотрим вероятности $q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)}$. Введем производящие функции, $|u| \leqslant 1$,

$$\varphi_{\alpha\beta}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)} u^n, \quad \alpha \in N, \ \beta = 0, \ldots, k-1. \qquad (2)$$

Функции $\varphi_{\alpha\beta}(u)$ являются аналитическими в области $|u| < 1$.

Лемма 1. *Последовательность производящих функций* $\varphi_{\alpha\beta}(u)$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, *удовлетворяет разностному уравнению,* $|u|\leqslant 1$,

$$\varphi_{\alpha\beta}(u) = \varphi_{k,k-1}(u)\varphi_{\alpha-1,\beta}(u) + \ldots + \varphi_{k0}(u)\varphi_{\alpha-k,\beta}(u), \tag{3}$$

с начальными условиями

$$\varphi_{\alpha\beta}(u) = \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad \alpha = 0, \ldots, k-1, \tag{4}$$

где $\delta^{\alpha}_{\beta} = 0$, *если* $\alpha \neq \beta$, *и* $\delta^{\beta}_{\beta} = 1$.

◄ Пусть для случайного блуждания начальное состояние $(S^0_0, S_0) = (0, \alpha)$ и $\alpha \geqslant k$. С вероятностью $q^{(0,k)}_{(\alpha_0,k-l)}$ случайное блуждание попадет на некотором шаге впервые в состояние $(\alpha_0, k-l)$ ($\alpha_0 = 0, 1, \ldots$, $l = 1, \ldots, k$), минуя состояния из множества $\{(n, \alpha - m),\ n = 0, 1, \ldots,\ m = 1, \ldots, l-1, l+1 \ldots, k\} \cup \{(n, \alpha - l),\ n = 0, 1, \ldots, \alpha_0 - 1, \alpha_0 + 1, \ldots\}$. В силу строго марковского свойства процесса (S^0_n, S_n) справедливо соотношение $q^{(0,\alpha)}_{(n,\beta)} = \sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{\alpha_0=0}^{n} q^{(0,k)}_{(\alpha_0,k-l)} q^{(\alpha_0,\alpha-l)}_{(n,\beta)}$. С учетом равенства $q^{(\alpha_0,\alpha-l)}_{(n,\beta)} = q^{(0,\alpha-l)}_{(n-\alpha_0,\beta)}$ получим $q^{(0,\alpha)}_{(n,\beta)} = \sum\limits_{l=1}^{k}\sum\limits_{\alpha_0=0}^{n} q^{(0,k)}_{(\alpha_0,k-l)} q^{(0,\alpha-l)}_{(n-\alpha_0,\beta)}$. Учитывая определение (2), свертка последнего соотношения с помощью производящей функции дает равенство

$$\varphi_{\alpha\beta}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(0,\alpha)}_{(n,\beta)} u^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{k}\sum_{\alpha_0=0}^{n} q^{(0,k)}_{(\alpha_0,k-l)} q^{(0,\alpha-l)}_{(n-\alpha_0,\beta)} u^n =$$

$$= \sum_{l=1}^{k}\sum_{\alpha_0=0}^{\infty} q^{(0,k)}_{(\alpha_0,k-l)} u^{\alpha_0} \sum_{n=\alpha_0}^{\infty} q^{(0,\alpha-l)}_{(n-\alpha_0,\beta)} u^{n-\alpha_0} = \sum_{l=1}^{k} \varphi_{k,k-l}(u)\varphi_{\alpha-l,\beta}(u)$$

($|u|\leqslant 1$; рассматриваемый ряд сходится абсолютно, законна перестановка знаков суммирования), т.е. равенство (3).

Начальные условия (4) следуют из определения (2) и равенств для вероятностей остановки

$$\begin{aligned} &q^{(0,\alpha)}_{(n,\beta)} = 0, \text{ если } \alpha = 0, 1, \ldots, \beta - 1, \beta + 1, \ldots, k-1; \\ &q^{(0,\beta)}_{(0,\beta)} = 1, \ q^{(0,\beta)}_{(n,\beta)} = 0, \text{ если } n = 1, 2, \ldots \ \blacktriangleright \end{aligned} \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть* $a_{k-1} \geqslant 0, \ldots, a_0 \geqslant 0$ *и* $a_{k-1} + \ldots + a_0 > 0$. *Уравнение* $-s^k + a_{k-1}s^{k-1} + \ldots + a_0 = 0$ *имеет положительный корень* λ_0 *кратности* 1 *и корни* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ *лежат в круге* $|s|\leqslant\lambda_0$ (*каждый корень считается столько раз, какова его кратность*).

◀ Рассмотрим уравнение $1 = a_{k-1}s^{-1}+a_{k-2}s^{-2}+\ldots+a_0 s^{-k}$. Функция $a_{k-1}s^{-1}+a_{k-2}s^{-2}+\ldots+a_0 s^{-k}$ имеет отрицательную производную на $(0;\infty)$ и строго убывает от ∞ до 0; следовательно, функция принимает значение 1 только в одной точке λ_0, $\lambda_0 > 0$. Запишем

$$\begin{aligned} s^k &\leqslant a_{k-1}s^{k-1}+\ldots+a_0 \text{ при } 0 \leqslant s \leqslant \lambda_0;\\ s^k &> a_{k-1}s^{k-1}+\ldots+a_0 \text{ при } s > \lambda_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть λ_l, $l = 1,\ldots,k-1$, — корень уравнения, тогда

$$\begin{aligned} |\lambda_l|^k &= |a_{k-1}\lambda_l^{k-1}+a_{k-2}\lambda_l^{k-2}+\ldots+a_0| \leqslant\\ &\leqslant a_{k-1}|\lambda_l|^{k-1}+a_{k-2}|\lambda_l|^{k-2}+\ldots+a_0, \end{aligned}$$

и согласно неравенству (6) имеем $|\lambda_l| \leqslant \lambda_0$. ▶

В уравнении (3) функции $\varphi_{k,k-1}(u),\ldots,\varphi_{k0}(u)$ будем полагать известными, таким образом, уравнение (3) при фиксированном параметре u можно рассматривать как линейное однородное разностное уравнение порядка β. Такие уравнения решаются стандартным методом характеристического уравнения [10]. Для построения решения составляется характеристическое уравнение

$$f(u,\lambda) = -\lambda^k+\varphi_{k,k-1}(u)\lambda^{k-1}+\ldots+\varphi_{k0}(u) = 0 \tag{7}$$

и исследуются его корни, — в рассматриваемом случае корни зависят от параметра u. При фиксированном параметре u, $|u|\leqslant 1$, функциональное уравнение (7) имеет k решений (каждый корень считается столько раз, какова его кратность), которые обозначим как $\lambda_0(u),\ldots,\lambda_{k-1}(u)$. Согласно теоремам о неявных функциях [11, 12], а также с учетом аналитичности функций $\varphi_{k,k-1}(u),\ldots,\varphi_{k0}(u)$ в области $|u| < 1$, комплекснозначная функция $\lambda(u)$, определяемая уравнением (7), имеет конечное число особых точек в области $|u| < 1$. Эти точки являются точками ветвления конечного порядка.

Для простоты формулировки результатов предполагается выполнение условий

$$p_0 = \sum_{\gamma_0=0}^{\infty} p_{\gamma_0 0} > 0,\ \text{Н.О.Д.}\ (k,\ \gamma > 0 : p_\gamma = \sum_{\gamma_0=0}^{\infty} p_{\gamma_0\gamma} > 0) = 1. \tag{8}$$

Если $p_0 = 0$, то нахождение вероятностей остановки $q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)}$ сводится к рассмотрению случайного блуждания с параметром $k-1$, если Н.О.Д $(k,\ \gamma > 0 : p_\gamma = \sum\limits_{\gamma_0=0}^{\infty} p_{\gamma_0\gamma} > 0) = l$, то — случайного блуждания с параметром k/l.

Введем естественные условия

$$\begin{aligned} &p_{\gamma_0\gamma} > 0 \text{ при некотором } \gamma_0 > 0; \\ &p_{\gamma_0\gamma} > 0 \text{ при некотором } \gamma \geqslant k+1. \end{aligned} \tag{9}$$

Для уравнения (7) при $u = 1$ выполнены условия леммы 2, так так из определения (2) и условий (8), (9) следуют неравенства $\varphi_{k,k-1}(1) > 0, \ldots, \varphi_{k0}(1) > 0$ и $\varphi_{k,k-1}(1) + \ldots + \varphi_{k0}(1) > 0$, т.е. существует положительный корень λ_0 кратности 1, для корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ имеем $|\lambda_1| \leqslant \lambda_0, \ldots, |\lambda_{k-1}| \leqslant \lambda_0$. Поскольку $1 \geqslant \varphi_{k,k-1}(1) + \ldots + \varphi_{k0}(1) > 0$, то $\lambda_0 \in (0, 1]$.

Лемма 3. *Пусть для распределения вероятностей скачков* $\{p_{\gamma_0\gamma}\}$ *случайного блуждания выполнены условия* (8), (9). *Из определяемых уравнением* (7) *функций* $\lambda_0(u), \ldots, \lambda_{k-1}(u)$ *выделим функцию* $\lambda_0(u)$ *с условием* $\lim\limits_{u\uparrow 1} \lambda_0(u) = \lambda_0$. *Тогда в области* $|u| < r$, *где* $r \geqslant 1$, *выполнятся неравенства*

$$|\lambda_l(u)| \leqslant \lambda_0(|u|), \qquad l = 0, \ldots, k-1. \tag{10}$$

В случае $p_{00} + \ldots + p_{0,k-1} > 0$ *функция* $\lambda_0(u)$ *является аналитической в области* $|u| < r$, $r \geqslant 1$, *и представляется рядом*

$$\lambda_0(u) = \sum_{m=0}^{\infty} r_m u^m, \quad r_0 > 0, r_1 \geqslant 0, r_2 \geqslant 0, \ldots \tag{11}$$

При $p_{00} + \ldots + p_{0,k-1} = 0$ *точка* $u = 0$ — *точка ветвления порядка* k *функции* $\lambda(u)$ *и в кольце* $0 < |u| < r$, $r \geqslant 1$, *функцию* $\lambda_0(u)$ *можно представить рядом*

$$\lambda_0(u) = \sum_{m=1}^{\infty} r_m (\sqrt[k]{u})^m, \quad r_1 \geqslant 0, r_2 \geqslant 0, \ldots, \tag{12}$$

где взята ветвь функции $\sqrt[k]{u}$ *такая, что* $\sqrt[k]{1} = 1$.

◀ В случае $p_{00} + \ldots + p_{0,k-1} > 0$ при некотором β, $\beta = 0, \ldots, k-1$, имеем $p_{0\beta} > 0$ и из определения (2) следует $\varphi_{k\beta}(0) \geqslant p_{0\beta} > 0$. Тогда $\varphi_{k\beta}(\rho) > 0$ при $0 \leqslant \rho < r$ ($r \geqslant 1$) и подстановке параметра ρ в уравнение (7),

$$-\lambda^k + \varphi_{k,k-1}(\rho)\lambda^{k-1} + \ldots + \varphi_{k0}(\rho) = 0. \tag{13}$$

Для уравнения (13) выполнены условия леммы 2. Уравнение (13) имеет максимальный по модулю корень $\lambda_0(\rho)$ кратности 1, $\lambda_0(\rho) > 0$. Используем также неравенства

$$|\varphi_{k\beta}(u)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} q_{(n,\beta)}^{(0,k)} |u|^n = \varphi_{k\beta}(|u|), \qquad \beta = 0, \ldots, k-1. \tag{14}$$

Значение $\lambda_l(u)$, $l = 0, \ldots, k-1$, по определению удовлетворяет равенству $-\lambda_l^k(u) + \varphi_{k,k-1}(u)\lambda_l^{k-1}(u) + \ldots + \varphi_{k0}(u) = 0$. Отсюда с учетом (14) следует $|\lambda_l(u)|^k \leqslant \varphi_{k,k-1}(|u|)|\lambda_l(u)|^{k-1} + \ldots + \varphi_{k0}(|u|)$, или, обозначая $|u| = \rho$, $|\lambda_l(u)|^k \leqslant \varphi_{k,k-1}(\rho)|\lambda_l(u)|^{k-1} + \ldots + \varphi_{k0}(\rho)$. Последнее неравенство есть неравенство (6) из доказательства леммы 2 для случая уравнения (13), и выполняется при

$$0 \leqslant |\lambda_l(u)| \leqslant \lambda_0(\rho), \quad l = 0, \ldots, k-1. \tag{15}$$

Возвращаясь в (15) к обозначению $\rho = |u|$, получаем (10).

Установим разложение в ряд (11). По теореме о неявной функции (имеем $\dfrac{\partial f(u,\lambda)}{\partial \lambda}\Big|_{u=\rho,\lambda=\lambda_0(\rho)} \neq 0$, так как $\lambda_0(\rho)$ — корень кратности 1 уравнения (7) при $0 \leqslant \rho < 1$), в некоторой области $|u| < r$ уравнением (7) определен аналитический элемент $\lambda_0(u) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} r_m u^m$ с действительными коэффициентами и $\lambda_0(0) = r_0 > 0$. Поскольку $|\lambda_0(u)| \leqslant \lambda_0(|u|)$ и $\lambda_0(|u|) > 0$, функция $\lambda_0(u)$ имеет вид (11). Поскольку ряд (11) содержит неотрицательные коэффициенты, точка $u = r$ особая для функции $\lambda_0(u)$. Однако на интервале $[0, 1)$ нет особых точек функции $\lambda_0(u)$, следовательно, $r \geqslant 1$.

В случае $p_{00} + \ldots + p_{0,k-1} = 0$ имеем $\varphi_{k\beta}(0) = 0$ при $\beta = 0, \ldots, k-1$ и $\lambda_0(0) = 0$ является корнем кратности k для уравнения (7) при $u = 0$. Для функции $\lambda(u)$ точка $u = 0$ — точка ветвления порядка k [12]. Неравенства (10) устанавливаются с помощью леммы 2. Рассуждения при выводе представления (12) аналогичны первому случаю. ►

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы 3. Производящая функция вероятностей остановки равна,* $|u| < 1$,

$$\varphi_{\alpha\beta}(u) = \sum_{l=0}^{k-1} C_l^\beta(u)\lambda_l^\alpha(u), \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

где функции $C_l^\beta(u)$, $l = 1, \ldots, l$, *определяются начальными условиями* (4).

◄ Пусть u, $|u| < 1$, таково, что для уравнения (7) значения корней $\lambda_0(u), \ldots, \lambda_{k-1}(u)$ различны. Решение уравнения в конечных разностях (3) при различных корнях характеристического уравнения имеет вид (16) [10].

Для определения функций $C_l^\beta(u)$, $l = 0, \ldots, k-1$, подставляем в выражение (16) начальные условия (4) и получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&C_0^\beta(u) + \ldots + C_{k-1}^\beta(u) = \delta_\beta^0;\\
&\quad\ldots\\
&C_0^\beta(u)\lambda_0^i(u) + \ldots + C_{k-1}^\beta(u)\lambda_{k-1}^i(u) = \delta_\beta^i;\\
&\quad\ldots\\
&C_0^\beta(u)\lambda_0^{k-1}(u) + \ldots + C_{k-1}^\beta(u)\lambda_{k-1}^{k-1}(u) = \delta_\beta^{k-1}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Покажем, что выражение (16) также является решением уравнения (3) в точке u_0, $|u_0| < 1$, такой, что некоторые из значений $\lambda_0(u_0), \ldots, \lambda_{k-1}(u_0)$ совпадают. Достаточно показать, что при $u \to u_0$ существует конечный предел выражения (16); в силу непрерывности коэффициентов уравнения (3) эти пределы при $\alpha = 0, 1, \ldots$ удовлетворяют уравнению (3).

Действительно, система линейных уравнений (17) решается по правилу Крамера и для нахождения функций $C_0^\beta(u), \ldots, C_{k-1}^\beta(u)$ вычисляются определители типа определителя Вандермонда. Подставляя полученные выражения в (16), после преобразований получаем

$$\varphi_{\alpha\beta}(u) = (-1)^{k-\beta+1} \sum_{\substack{i_0+\ldots+i_{k-1}=\alpha-\beta \\ i_0,\ldots,i_{k-1}\geqslant 0}}{}' \lambda_0^{i_0}(u) \ldots \lambda_{k-1}^{i_{k-1}}(u), \tag{18}$$

где знак «$'$» означает, что число показателей степеней $i_0, \ldots, i_{k-1}$, обращающихся в нуль, не больше β. Рассматриваемая точка u_0 — точка ветвления функции $\lambda(u)$. При $u \to u_0$ существуют согласно неравенству (10) и, например, представлению (11) конечные пределы функций $\lambda_l(u)$, $l = 0, \ldots, k-1$, и следовательно, конечный предел выражения (18). ▶

Для нахождения функций $\lambda_0(u), \ldots, \lambda_{k-1}(u)$ определяется вспомогательный случайный процесс.

Марковский ветвящийся процесс (ξ_t^0, ξ_t) и уравнение для экспоненциальной производящей функции вероятностей остановки. Рассмотрим однородный во времени марковский процесс (ξ_t^0, ξ_t) на фазовом пространстве N^2 с непрерывным временем t, $t \in [0, \infty)$, и переходными вероятностями $P_{(\beta_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}(t) = \mathbf{P}\{(\xi_t^0, \xi_t) = (\beta_0, \beta) | (\xi_0^0, \xi_0) = (\alpha_0, \alpha)\}$. Пусть при $\Delta t \to 0$ переходные вероятности имеют вид ($\lambda > 0$)

$$P_{(\alpha_0,\alpha)}^{(\alpha_0,\alpha)}(\Delta t) = 1 - \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\lambda\Delta t + o(\Delta t);$$
$$P_{(\beta_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}(\Delta t) = p_{\beta_0-\alpha_0,\beta-\alpha+k}\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

если $\beta_0 \neq \alpha_0$ или $\beta \neq \alpha - k$. Введем производящие и экспоненциальные производящие функции переходных вероятностей, $|u|\leqslant 1$, $|s|\leqslant 1$,

$$F_{(\alpha_0,\alpha)}(t; u, s) = \sum_{\beta_0,\beta=0}^{\infty} P_{(\beta_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}(t) u^{\beta_0} s^\beta, \quad (\alpha_0, \alpha) \in N^2;$$

$$G_{(\beta_0,\beta)}(t; z_0, z) = \sum_{\alpha_0,\alpha=0}^{\infty} \frac{z_0^{\alpha_0} z^\alpha}{\alpha_0!\alpha!} P_{(\beta_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}(t), \quad (\beta_0, \beta) \in N^2,$$

и линейный дифференциальный оператор

$$h\left(\frac{\partial}{\partial z_0}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \sum_{\gamma_0,\gamma=0}^{\infty} p_{\gamma_0\gamma} \frac{\partial^{\gamma_0+\gamma}}{\partial z_0^{\gamma_0} \partial z^{\gamma}}.$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей в случае марковского процесса (ξ_t^0, ξ_t) равносильна линейному уравнению в частных производных k-го порядка [13, 14]

$$\frac{\partial F_{(\alpha_0,\alpha)}(t; u, s)}{\partial t} = \lambda(h(u,s) - s^k) \frac{\partial^k F_{(\alpha_0,\alpha)}(t; u, s)}{\partial s^k}$$

с начальным условием $F_{(\alpha_0,\alpha)}(0; u, s) = u^{\alpha_0} s^{\alpha}$. Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей равносильна линейному уравнению в частных производных [13]

$$\frac{\partial G_{(\beta_0,\beta)}(t; z_0, z)}{\partial t} = \lambda z^k \left(h\left(\frac{\partial}{\partial z_0}, \frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^k}{\partial z^k} \right) G_{(\beta_0,\beta)}(t; z_0, z)$$

с начальным условием $G_{(\beta_0,\beta)}(0; z_0, z) = z_0^{\beta_0} z^{\beta} / (\beta_0! \beta!)$.

Пусть марковский процесс находится в начальном состоянии (α_0, α) и $\alpha \geqslant k$; через случайное время $\tau_{(\alpha_0,\alpha)}$, $\mathbf{P}\{\tau_{(\alpha_0,\alpha)} < t\} = 1 - e^{-\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)\lambda t}$, происходит скачок с распределением вероятностей $\{p_{\gamma_0\gamma}\}$ и процесс переходит в состояние $(\alpha_0+\gamma_0, \alpha-k+\gamma)$. Далее аналогичная эволюция случайного процесса, при этом возможна остановка процесса в одном из состояний $\{(\gamma_0, \beta),\ \gamma_0 \in N,\ \beta = 0, \ldots, k-1\}$. Такой марковский ветвящийся процесс с взаимодействием соответствует кинетической схеме $kT \to \gamma_0 T_0 + \gamma T$, $\gamma_0, \gamma = 0, 1, \ldots$ [13]; в монографии [9] дана интерпретация случайного процесса как модели химической цепной реакции или ядерной реакции с образованием финального продукта T_0 (см. [15]).

Из описания процесса (ξ_t^0, ξ_t) следует, что, если рассматривать процесс только в моменты изменения состояния, т.е. “вложенную цепь Маркова” [16], то такая цепь совпадает с определенным ранее случайным блужданием (S_n^0, S_n) при начальном условии $(\alpha_0, \alpha) \in N^2$. Вероятности остановки процесса (ξ_t^0, ξ_t) совпадают с вероятностями остановки блуждания (S_n^0, S_n) — существуют пределы $q_{(\gamma_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)} = \lim_{t\to\infty} P_{(\gamma_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}(t)$, $\gamma_0 \in N$, $\beta = 0, \ldots, k-1$ [17].

Для вероятностей $q_{(\gamma_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}$ введем экспоненциальные производящие функции

$$g_{(\gamma_0,\beta)}(z_0, z) = \sum_{\alpha_0,\alpha=0}^{\infty} \frac{z_0^{\alpha_0} z^{\alpha}}{\alpha_0! \alpha!} q_{(\gamma_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)}, \quad \gamma_0 \in N,\ \beta = 0, \ldots, k-1.$$

Здесь $g_{(\gamma_0,\beta)}(z_0,z)$ — функция, аналитическая по переменным z_0, z, так как

$$|g_{(\gamma_0,\beta)}(z_0,z)| \leqslant \sum_{\alpha_0,\alpha=0}^{\infty} \frac{|z_0|^{\alpha_0}|z|^{\alpha}}{\alpha_0!\alpha!}|q^{(\alpha_0,\alpha)}_{(\gamma_0,\beta)}| \leqslant e^{|z_0|+|z|}.$$

Аналогично теореме 3.1, приведенной в работе [13], можно доказать, что $g_{(\gamma_0,\beta)}(z_0,z) = \lim\limits_{t\to\infty} G_{(\gamma_0,\beta)}(t;z_0,z)$, и функция $g_{(\gamma_0,\beta)}(z_0,z)$ удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\left(h\left(\frac{\partial}{\partial z_0},\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^k}{\partial z^k}\right) g_{(\gamma_0,\beta)}(z_0,z) = 0. \tag{19}$$

Введем также двойные производящие функции для вероятностей остановки, $|u|\leqslant 1$,

$$g_\beta(z,u) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{(n,\beta)}(0,z)u^n = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{z^\alpha}{\alpha!}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(0,\alpha)}_{(n,\beta)}u^n = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{z^\alpha}{\alpha!}\varphi_{\alpha\beta}(u) \tag{20}$$

и дифференциальный оператор

$$h\Big(u,\frac{d}{dz}\Big) = \sum_{\gamma_0,\gamma=0}^{\infty} p_{\gamma_0\gamma}u^{\gamma_0}\frac{d^\gamma}{dz^\gamma}.$$

Лемма 5. *Экспоненциальная производящая функция $g_\beta(z,u)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению*

$$\left(h\Big(u,\frac{\partial}{\partial z}\Big) - \frac{\partial^k}{\partial z^k}\right) g_\beta(z,u) = 0 \tag{21}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial^\alpha g_\beta(z,u)}{\partial z^\alpha}\Big|_{z=0} = \delta^\alpha_\beta, \quad \alpha = 0,\ldots,k-1. \tag{22}$$

◀ Из уравнения (19) следует, что производящая функция, $|u|\leqslant 1$, $\widetilde{g}_\beta(z_0,z;u) = \sum\limits_{\gamma_0=0}^{\infty} g_{(\gamma_0,\beta)}(z_0,z)u^{\gamma_0}$ также удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$\left(h\left(\frac{\partial}{\partial z_0},\frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^k}{\partial z^k}\right)\widetilde{g}_\beta(z_0,z;u) = 0. \tag{23}$$

Из описания марковского процесса (ξ^0_t,ξ_t) следует соотношение

$$q^{(\alpha_0,\alpha)}_{(\gamma_0,\beta)} = \begin{cases} 0, & \gamma_0 < \alpha_0; \\ q^{(0,\alpha)}_{(\gamma_0-\alpha_0,\beta)}, & \gamma_0 \sim \alpha_0, \end{cases}$$

в результате имеем цепочку равенств

$$\widetilde{g}_\beta(z_0, z; u) = \sum_{\gamma_0=0}^{\infty}\sum_{\alpha_0=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{\infty} z_0^{\alpha_0} z^\alpha \alpha_0!\alpha! q_{(\gamma_0,\beta)}^{(\alpha_0,\alpha)} u^{\gamma_0} =$$
$$= \sum_{\alpha_0=0}^{\infty} \frac{z_0^{\alpha_0} u^{\alpha_0}}{\alpha_0!} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{z^\alpha}{\alpha!} \sum_{\gamma_0=\alpha_0}^{\infty} q_{(\gamma_0-\alpha_0,\beta)}^{(0,\alpha)} u^{\gamma_0-\alpha_0} =$$
$$= \sum_{\alpha_0=0}^{\infty} \frac{z_0^{\alpha_0} u^{\alpha_0}}{\alpha_0!} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{z^\alpha}{\alpha!} \sum_{n=0}^{\infty} q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)} u^n = e^{z_0 u} g_\beta(z, u)$$

($|u|\leqslant 1$; рассматриваемый ряд сходится абсолютно, законна перестановка знаков суммирования). Подставляя последнее выражение в уравнение (23), получаем

$$\left(h\left(\frac{\partial}{\partial z_0}, \frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^k}{\partial z^k}\right) e^{z_0 u} g_\beta(z, u) =$$
$$= e^{z_0 u}\left(h\left(u, \frac{\partial}{\partial z}\right) - \frac{\partial^k}{\partial z^k}\right) g_\beta(z, u) = 0,$$

и приходим к равенству (21).

Граничные условия (22) получаем при подстановке равенств для вероятностей остановки (5) в функцию (20) и в ее производные по z при $z = 0$. ►

Основная теорема. Для линейного дифференциального уравнения (21) характеристическое уравнение имеет вид

$$h(u, s) - s^k = 0. \tag{24}$$

В теореме 1 главную роль в выражении для производящей функции $g_\beta(z, u)$ играют ветви комплекснозначной функции $s = \varphi(u)$, определяемой по уравнению (24); при фиксированном параметре u значения функции $\varphi(u)$ есть корни характеристического уравнения.

Лемма 6 [4]. *Пусть выполнены условия* (8) *и уравнение*

$$h(1, s) - s^k = 0 \tag{25}$$

имеет два положительных корня q_0 *и* R ($q_0\leqslant R$), *может быть совпадающих. Тогда в круге* $|u|\leqslant R$, *кроме корней* q_0 *и* R, *существуют корни только в области* $|u| < q_0$, *причем их* $k-1$ (*каждый корень считается столько раз, какова его кратность*).

Уравнение (25) имеет корень 1 и далее всегда предполагается наличие двух положительных корней. Обозначим $q_1, \ldots, q_{k-1}$ — $k-1$ ближайших к нулю корня уравнения (25) и $q_0 \in (0, 1]$ корень уравнения (25) кратности 1 или 2; $|q_l| < q_0$, $l = 1, \ldots, k-1$. Если q_l — корень кратности 1 уравнения (25), то $\left.\dfrac{\partial h(u, s)}{\partial s}\right|_{u=1, s=q_l} \neq k q_l^{k-1}$ и по теореме о неявной функции для уравнения (24) в некоторой окрестности точки $u = 1$ есть единственное решение $s = \varphi_l(u)$, для которого $q_l = \varphi_l(1)$, и это аналитическая функция в окрестности точки $u = 1$. Если q_l – корень кратности m уравнения (25), то для уравнения (24) в некоторой окрестности точки $u = 1$ существует m решений $s = \varphi_l^1(u), \ldots, s = \varphi_l^m(u)$, для которых $q_l = \varphi_l^1(1), \ldots, q_l = \varphi_l^m(1)$, и $u = 1$ точка ветвления порядка m для функции $\varphi(u)$ [12].

Следовательно, в окрестности точки $u = 1$ определены $k-1$ ветвь многозначной функции $\varphi(u)$, определяемой равенством $h(u, \varphi(u)) - -\varphi^k(u) = 0$: $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_{k-1}(u)$, соответствующие значениям $q_1, \ldots \ldots, q_{k-1}$. Вводим ветвь $\varphi_0(u)$, соответствующую корню q_0. Если q_0 — корень кратности 2, то берем решение уравнения (24) такое, что $|\varphi_0(u)| \leqslant q_0$ при $|u| \leqslant 1$. Существование указанной ветви $\varphi_0(u)$, а также другие свойства функций $\varphi_0(u), \ldots, \varphi_{k-1}(u)$ следуют из доказательства теоремы 1 (см. замечание 1).

Теорема 1. *Пусть функция $h(u, s)$ аналитическая при всех u, s, выполнены условия* (8), (9). *Экспоненциальная производящая функция вероятностей остановки равна*, $|u| < 1$,

$$g_\beta(z, u) = \sum_{l=0}^{k-1} C_l^\beta(u) e^{z\varphi_l(u)}, \tag{26}$$

где функции $C_l^\beta(u)$, $l = 1, \ldots, l$, *определяются граничными условиями* (22).

◀ Из полученного в лемме 4 представления (16) следует

$$g_\beta(z, u) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{z^\alpha}{\alpha!} \varphi_{\alpha\beta}(u) = \sum_{l=0}^{k-1} C_l^\beta(u) e^{z\lambda_l(u)}. \tag{27}$$

Подставляя выражение (27) в уравнение (21), получаем равенство

$$\sum_{l=0}^{k-1} C_l^\beta(u) e^{z\lambda_l(u)} (h(u, \lambda_l(u)) - \lambda_l^k(u)) = 0. \tag{28}$$

Найдется точка ρ, $0 < \rho < 1$, в некоторой окрестности которой функции $\lambda_0(u), \ldots, \lambda_{k-1}(u)$ не имеют равных значений; следовательно, при значениях u, принадлежащих окрестности, функции $e^{z\lambda_0(u)}, \ldots, e^{z\lambda_{k-1}(u)}$ линейно независимы. Учитывая, что каждая функция $C_0^\beta(u), \ldots, C_{k-1}^\beta(u)$ не равна тождественно нулю, из (28) имеем

$$h(u, \lambda_l(u)) - \lambda_l^k(u) \equiv 0, \quad l = 0, \ldots, k-1, \tag{29}$$

в некоторой окрестности около точки ρ. В соответствии с принципом консерватизма функциональных уравнений, аналитическое продолжение функции $\lambda_l(u)$ за границу окрестности также удовлетворяют уравнению (29). Таким образом, функции $\lambda_0(u), \ldots, \lambda_{k-1}(u)$ являются решениями уравнения (24), причем полагаем $\lim\limits_{u\uparrow 1} \lambda_l(u) = q_l$, $l = 0, \ldots, k-1$.

Функции $\lambda_0(u), \ldots, \lambda_{k-1}(u)$ совпадают с функциями $\varphi_0(u), \ldots$ $\ldots, \varphi_{k-1}(u)$ — решениями уравнения (24), формула (27) — с доказываемой формулой (26), а функции $C_l^\beta(u)$, $l = 0, \ldots, k-1$, определяемые начальными условиями (4), — с функциями $C_l^\beta(u)$, $l = 0, \ldots, k-1$, определяемыми граничными условиями (22). ►

Следствие 1. *Вероятности остановки выражаются через интеграл*

$$q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{0^+} \varphi_{\alpha\beta}(u) \frac{du}{u^{n+1}}, \tag{30}$$

производящая функция $\varphi_{\alpha\beta}(u)$ *представлена формулой* (18), *где функции* $\lambda_0(u), \ldots, \lambda_{k-1}(u)$ *заменены функциями* $\varphi_0(u), \ldots, \varphi_{k-1}(u)$.

Замечание 1. Вследствие совпадения функций $\lambda_0(u), \ldots, \lambda_{k-1}(u)$ и $\varphi_0(u), \ldots, \varphi_{k-1}(u)$ для последних справедливы свойства, установленные в лемме 3. При асимптотическом исследовании распределения $\{q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)},\ n = 0, 1, \ldots, \sum_{n=0}^{\infty} q_{(n,\beta)}^{(0,\alpha)} < 1\}$ при $\alpha \to \infty$ или $n \to \infty$ существенной оказывается только функция $\varphi_0(u)$.

Заключение. Применяемые аналитические методы, основанные на аппарате производящих функций, позволили найти явный вид (30) вероятностей достижения и перескока границы для исследуемого случайного блуждания на целочисленной решетке полуплоскости. Представляющие интерес для приложений асимптотические приближения для найденных вероятностных распределений рассматриваются в следующей публикации. В некоторых случаях приближение приводит к стандарному нормальному закону для точки выхода или точки перескока за границу случайного блуждания — при условии, что остановка случайного блуждания произошла. Интересен случай отличия асимптотического приближения от нормального закона, приводящий к устойчивому вероятностному закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969. 472 с.
2. *Chen A.*, *Li J.*, *Chen Y.*, *Zhou D.* Extinction probability of interacting branching collision processes // Adv. Appl. Probab. 2012. Vol. 44. No. 1. P. 226–259.
3. *Fayolle G.*, *Iasnogorodski R.*, *Malyshev V.A.* Random walks in the quarter-plane: algebraic methods, boundary value problems and applications. Berlin: Springer-Verlag, 1999. 156 p.
4. *Калинкин А.В.* Вероятность вырождения ветвящегося процесса с взаимодействием частиц // Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 27. Вып. 1. С. 192–197.

5. *Калинкин А.В.* Вероятность остановки на границе случайного блуждания в четверти плоскости и ветвящийся процесс с взаимодействием частиц // Теория вероятностей и ее применения. 2002. Т. 47. № 3. С. 452–474.
6. *Мастихин А.В.* Решение стационарного первого уравнения Колмогорова для марковского процесса эпидемии со схемой $T_1 + T_2 \to T_1 + T_3$; $T_1 + T_3 \to T_1$; $T_1 \to 0$ // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2005. № 2 (17). С. 75–86.
7. *Ланге А.М.* О распределении числа финальных частиц ветвящегося процесса с превращениями и парными взаимодействиями // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51. Вып. 4. С. 801–809.
8. *Калинкин А.В.* Финальные вероятности для ветвящегося случайного процесса с взаимодействием частиц // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. Вып. 6. С. 1309–1312.
9. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.
10. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с.
11. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1968. 472 с.
12. *Сборник* задач по теории аналитических функций / М.А. Евграфов, К.А. Бежанов, Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. М.: Наука, 1972. 416 с.
13. *Калинкин А.В.* Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // Успехи математических наук. 2002. Т. 57. № 2. С. 23–84.
14. *Anderson W.J.* Continuous-time markov chains: an application-oriented approach. N.Y.: Springer, 1991. 340 p.
15. *Дорогов В.И.*, *Чистяков В.П.* Вероятностные модели превращения частиц. М.: Наука, 1988. 112 с.
16. *Гихман И.И.*, *Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 568 с.
17. *Чжун Кай Лай.* Однородные цепи Маркова. М.: Наука, 1964. 426 с.

REFERENCES

[1] Spitzer F. Principles of random walk. Princeton, Van Nostrand Company, 1964. 406 p. (Russ. ed.: Printsipy sluchaynogo bluzhdaniya. Moscow, Mir Publ., 1969. 472 p.).

[2] Chen A., Li J., Chen Y., Zhou D. Extinction probability of interacting branching collision processes. *Adv. Appl. Probab*, 2012, vol. 44, no. 1, pp. 226–259.

[3] Fayolle G., Iasnogorodski R., Malyshev V.A. Random walks in the quarter-plane: algebraic methods, boundary value problems and applications. Berlin, Springer-Verlag, 1999. 156 p.

[4] Kalinkin A.V. On the probability of the extinction of branching process with interaction of particles. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya* [Theory of Probability and Its Applications], 1982, vol. 27, no. 1. pp. 192–197.

[5] Kalinkin A.V. Absorption probability at the border of a random walk in a quadrant and a branching process with interaction of particles. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya* [Theory of Probability and Its Applications], 2002, vol. 47, no. 3. pp. 452–474.

[6] Mastikhin A.V. Solving stationary first Kolmogorov's equation for Markovian process of epidemic developing according to the scheme $T_1 + T_2 \to T_1 + T_3$; $T_1 + T_3 \to T_1$; $T_1 \to 0$. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2005, no. 2 (17), pp. 75–86 (in Russ.).

[7] Lange A.M. On the distribution of the number of final particles in a branching process with transformations and pairwise interactions. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya* [Theory of Probability and Its Applications], 2006, vol. 51, no. 4, pp. 801–809.

[8] Kalinkin A.V. Final probabilities for a random branching process with interaction of particles. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1983, vol. 269, no. 6, pp. 1309–1312 (English transl. in Soviet Math. Dokl. 1983, vol. 27, no. 2. pp. 493–497).

[9] Sevast'yanov B.A. Vetvyashchiesya protsessy [Branching processes]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 436 p. (German ed.: Sewastjanow B.A. Verzweigungsprozesse. Berlin, Akademie-Verlag, 1974).

[10] Gel'fond A.O. Ischislenie konechnykh raznostey. Moscow, Nauka Publ., 1967. 376 p. (Eng. ed. Gelfond A.O. Calculus of finite differences. Hindustan Publ. Corp., Delhi, 1971. 451 p.).

[11] Evgrafov M.A. Analiticheskie funktsii. Moscow, Nauka Publ., 1968. 472 p. (Eng. ed.: Evgrafov M.A. Analytic functions. Dover Pubns, 1978. 336 p.).

[12] Evgrafov M.A., Bezhanov K.A., Sidorov Yu.V., Fedoryuk M.V., Shabunin M.I. Sbornik zadach po teorii analiticheskikh funktsiy [A collection of problems on the theory of analytic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1972.

[13] Kalinkin A.V. Markov's branching processes with interaction. *Uspehi Matematicheskih Nauk*, 2002, vol. 57, no. 2, pp. 23–84 (Eng. ed.: Russian Mathematical Surveys, 2002, vol. 57, no. 2, pp. 241–304).

[14] Anderson W.J. Continuous-time markov chains: an application-oriented approach. New York, Springer, 1991. 340 p.

[15] Dorogov V.I., Chistyakov V.P. Veroyatnostnye modeli prevrashcheniya chastits [Probabilistic models of the transformation of particles]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 112 p.

[16] Gikhman I.I., Skorokhod A.V. Vvedenie v teoriyu sluchaynykh protsessov. Moscow, Nauka Publ., 1977 (Eng. ed.: Gihman I.I., Skorohod A.V. Introduction to the theory of random processes. New York, 1969, Dover, 1996).

[17] Chung K.L. Markov chains with stationary transition probabilities. New York, Springer-Verlag, 1967 (Russ. ed.: Chung K.L. Odnorodnye tsepi Markova. Moscow, Nauka Publ., 1964. 426 p.).

Статья поступила в редакцию 25.06.2014

Калинкин Александр Вячеславович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области теории вероятностей и математического моделирования.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kalinkin A.V. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 60 publications in the field of probability theory and mathematical simulation.
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.