УДК 517.928.4

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

В.Н. Орлов, **Т.Ю. Леонтьева**

Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, Чебоксары, Российская Федерация
e-mail: orlowvn@rambler.ru; betty2784@yandex.ru

Дифференциальные уравнения представляют собой математические модели различных процессов и явлений. В отличие от линейных, нелинейные дифференциальные уравнения мало изучены. Сложности в изучении нелинейных дифференциальных уравнений связаны с наличием подвижных особых точек. Предложен метод приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения с подвижными особыми точками, включающий в себя решение шести задач. Решены первые две задачи: теорема существования и единственности решения нелинейного дифференциального уравнения; построение приближенного решения и исследование влияния возмущения начальных условий на приближенное решение. Приведено доказательство теоремы существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки и получена структура приближенного решения.

***Ключевые слова*: подвижная особая точка, нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, приближенное решение, метод мажорант, окрестность подвижной особой точки.

CONSTRUCTION OF APPROXIMATE SOLUTION OF ONE NONLINEAR DIFFERENTIAL SECOND-ORDER EQUATION IN THE NEIGHBORHOOD OF MOVABLE SINGULAR POINT

V.N. Orlov, **T.Yu. Leont'eva**

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russian Federation
e-mail: orlowvn@rambler.ru; betty2784@yandex.ru

Differential equations are mathematical models of various processes and phenomena. In contrast to linear, the nonlinear differential equations have been poorly studied. Difficulties in the study of nonlinear differential equations are associated with movable singular points. The method to solve approximately a nonlinear differential equation with movable singularities comprising the decision of six problems, is proposed. First two problems — theorem of existence and uniqueness of solutions of nonlinear differential equations as well as construction of approximate solutions and study of the initial condition perturbation influence on the approximate solution, are considered. Proof of the theorem of the solution existence and uniqueness of this nonlinear differential equation in the neighbourhood of movable singular point, and the approximate solution structure, are given.

***Keywords*:** movable singular point, nonlinear differential equation of second order, approximate solution, method of majorants, neighbourhood of movable singular point.

Введение. Нелинейные дифференциальные уравнения представляют большой интерес в связи с их приложением во многих областях науки и техники [1]. Решения нелинейных уравнений связаны с большими трудностями, вызванными наличием подвижных особых точек у интегралов этих уравнений, которые и являются препятствием к использованию известных в настоящее время приближенных численных и аналитических методов решения [2, 3]. Отметим работы, направленные на разрешение в квадратурах нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками, но это удается сделать лишь в частных случаях [4].

Материалы и методы решения задачи и принятые допущения. Применяется метод решения нелинейных дифференциальных уравнений, предложенный в работах [1, 5], который состоит из шести этапов. В статьях [6–9] были решены первые две задачи указанного выше метода для области аналитичности.

В настоящей работе предложено решение следующих задач: доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки и построено приближенное решение в указанной области. При доказательстве теоремы существования был применен метод мажорант, но не к правой части дифференциального уравнения, как это сделано в классической литературе [10], а к решению самого нелинейного дифференциального уравнения [1, 5, 11].

В статье использовано понятие “нормальная форма” для нелинейных дифференциальных уравнений, введенное в работе [1], когда общая структура уравнения с полиномиальной правой частью $y^{(\kappa)}(x) = a_0(x)\, y^n(x) + a_1(x)\, y^{n-1}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)\, y(x) + a_n(x)$ с помощью некоторой замены приводится к виду $y^{(\kappa)}(x) = y^n(x) + r(x)$, где κ — порядок производной; n — степень функции. Эта терминология является продолжением для упрощенной структуры нелинейного дифференциального уравнения, упомянутой для уравнения Абеля в работе [12].

Результаты. Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''(x) = a_0(x)\, y^5(x) + a_1(x)\, y^4(x) + a_2(x)\, y^3(x) + a_3(x)\, y^2(x) + a_4(x)\, y(x) + a_5(x), \quad (1)$$

где a_i, $i = 0, 1, \ldots, 5$ — аналитические функции в рассматриваемой области. Заменой переменной $y(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt[4]{a_0(x)}} - \dfrac{a_1(x)}{5a_0(x)}$ при выполнении условий

$$\frac{a_1(x)}{5a_0(x)} = \frac{a_2(x)}{2a_1(x)} = \frac{a_3(x)}{a_2(x)} = \frac{2\left(a_4(x) + \dfrac{a_0''(x)}{4a_0(x)} - \dfrac{5}{16}\left(\dfrac{a_0''(x)}{a_0(x)}\right)^2\right)}{a_3(x)}$$

уравнение (1) приводится к нормальной форме [6] $u''(x) = u^5(x) + r(x)$. Здесь

$$r(x) = -\frac{a_1^5(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{5^5 a_0^4(x)} - \frac{3a_0''(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{20a_0^2(x)} + a_5(x)\sqrt[4]{a_0(x)} + \frac{a_1''(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{5a_0(x)} - \frac{2a_0'(x)\,a_1'(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{5a_0^2(x)} + \frac{2\left(a_0'(x)\right)^2 a_1(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{5a_0^3(x)} - \frac{\left(a_0''(x)\right)^2 a_1(x)\sqrt[4]{a_0(x)}}{16a_0^3(x)} + \frac{a_0'(x)}{2a_0(x)}u'(x),$$

в каждой области, в которой $a_0(x) \neq 0$.

Рассмотрим задачу Коши

$$y''(x) = y^5(x) + r(x); \tag{2}$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть x^* — подвижная особая точка $y(x)$ задачи (2), (3) и функция $r(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $r(x) \in C^\infty$ *в области* $|x^* - x| < \rho_0$, $\rho_0 = \text{const} > 0$;

2) $\exists M_0 : \dfrac{\left|r^{(n)}(x^*)\right|}{n!} \le M_0$, $M_0 = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Тогда существует единственное решение задачи Коши (2), (3) в виде

$$y(x) = (x^* - x)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2}, \quad C_0 \neq 0, \tag{4}$$

правильная часть которого сходится в области

$$|x^* - x| < \rho_2, \tag{5}$$

где $\rho_2 = \min\{\rho_0, \rho_1\}$, $\rho_1 = \dfrac{1}{4\sqrt[5]{(+1)^2}}$, $M = \max\{M_0, \alpha\}$, α — *параметр, зависящий от условий* (3).

◀ В соответствии с условием теоремы имеем

$$r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x^* - x)^n. \tag{6}$$

Учитывая структуру решения в окрестности подвижной особой точки, в общем случае $y(x) = (x^* - x)^\rho \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2}$, $C_0 \neq 0$, из уравнения (2) получаем

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2+\rho}\right)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x^* - x)^{n/2+\rho}\right)^5 + \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x^* - x)^n.$$

После выполнения соответствующих операций имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (n/2+\rho)(n/2+\rho-1)(x^*-x)^{n/2+\rho-2} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{**} (x^*-x)^{n/2+5\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x^*-x)^n, \quad (7)$$

где $D_n^{**} = \sum\limits_{i=0}^{n} D_{n-i}^{*} C_i$, $D_n^* = \sum\limits_{i=0}^{n} D_{n-i} D_i$, $D_n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_{n-i} C_i$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Равенство (7) обратится в тождество при выполнении условий

$$1)\ n/2+\rho-2 = n/2+5\rho; \quad (8)$$
$$2)\ C_n (n/2+\rho)(n/2+\rho-1) = D_n^{**}. \quad (9)$$

Здесь

$$D_n^{**} = \begin{cases} D_n^{**}, n \in \{0,1,2,3,4,6,8,...,2k\}; \\ D_n^{**} + B_{n-5}, n \in \{5,7,9,...,2k+1\}. \end{cases} \quad (10)$$

Из условия (8) следует $\rho = -1/2$, а соотношение (9) позволяет однозначно определить все коэффициенты C_n. При этом вариант $C_0 = 0$ отбрасываем, так как в этом случае получаем противоречие с предположением относительно характера особой точки x^*. Согласно соотношению (9), $C_0 = \sqrt[4]{\dfrac{3}{4}}$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, $C_5 = -\dfrac{4}{7}B_0$, $C_6 = \alpha$, $C_7 = \dfrac{4}{9}B_1$, $C_8 = 0$, $C_9 = \dfrac{4}{33}B_2$, $C_{10} = \dfrac{20}{147}\sqrt[4]{\dfrac{27}{4}}B_0^2$. Таким образом, получено однозначно формальное представление решения задачи (2), (3) в окрестности точки x^* в виде (4).

Докажем сходимость правильной части ряда (4) в области (5). Из условия теоремы следует $M = \sup\limits_n \dfrac{\left|r^{(n)}(x^*)\right|}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, тогда для коэффициентов ряда (6) справедлива оценка

$$|B_n| \leq M. \quad (11)$$

Из выражения (9) с учетом (10), (11) для коэффициентов C_n предполагаем оценку: $|C_n| \leq \dfrac{1}{(n+2)(n-6)} 2^n M (M+1)^{[n/5]} = v_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Исходя из закономерности образования коэффициентов C_n, с помощью метода математической индукции докажем эту оценку для коэффициента C_{n+1} при $n+1 = 5(2k+1) = 10k+5$:

$$|C_{10k+5}((10k+5)/2+\rho)((10k+5)/2+\rho-1)| \leq$$
$$\leq \left|D_{10k+5}^{**}\right| \leq \left|D_{10k+5}^{**} + B_{10k}\right| \leq \left|D_{10k+5}^{**}\right| + |B_{10k}| \leq$$

$$\le \left| \sum_{i=0}^{10k+5} D^*_{10k+5-i} C_i \right| + |B_{10k+5}| \le \left| \sum_{i=0}^{10k+5} \left(\sum_{j=0}^{10k+5-i} D_{10k+5-i-j} D_j \right) C_i \right| + |B_{10k+5}| \le$$

$$\le \left| \sum_{i=0}^{10k+5} \left(\sum_{j=0}^{10k+5-i} \left(\sum_{m=0}^{10k+5-i-j} C_{10k+5-i-j-m} C_m \right) \left(\sum_{l=0}^{j} C_{j-l} C_l \right) \right) C_i \right| + |B_{10k+5}| .$$

Тогда при $\rho = -1/2$ после преобразований получим

$$|C_{10k+5}| \le \frac{2^2}{(10k+7)(10k-1)} \times$$
$$\times \left| \sum_{i=1}^{10k} \left(\sum_{j=1}^{10k-i} \left(\sum_{m=1}^{10k-i-j} \frac{2^{10k-i-j-m} M (M+1)^{\frac{10k-i-j-m}{5}}}{(10k-i-j-m+2)(10k-i-j-m-6)^*} \times \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. \times \frac{2^m M (M+1)^{\frac{m}{5}}}{(m+2)(m-6)^*} \right) \left(\sum_{l=1}^{j} \frac{2^{j-l} M (M+1)^{\frac{j-l}{5}}}{(j-l+2)(j-l-6)^*} \frac{2^l M (M+1)^{\frac{l}{5}}}{(l+2)(l-6)^*} \right) \right) \times$$
$$\left. \times \frac{2^i M (M+1)^{\frac{i}{5}}}{(i+2)(i-6)^*} + M \right| \le \frac{2^2}{(10k+7)(10k-1)} \times$$
$$\times \left(\sum_{i=1}^{10k} \left(\sum_{j=1}^{10k-i} \left(2^{10k-i-j} M^2 (M+1)^{\frac{10k-i-j}{5}} \, 2^j M^2 (M+1)^{\frac{j}{5}} \times \right.\right.\right.$$
$$\times \left(\sum_{m=1}^{10k-i-j} \frac{1}{(m+2)(m-6)^* (10k-i-j-m+2)(10k-i-j-m-6)^*} \right) \times$$
$$\left.\left.\left. \times \left(\sum_{l=1}^{j} \frac{1}{(l+2)(l-6)^* (j-l+2)(j-l-6)^*} \right) \right) \right) \frac{2^i M (M+1)^{\frac{i}{5}}}{(i+2)(i-6)^*} + M \right) \le$$
$$\le \frac{2^2}{(10k+7)(10k-1)} 2^{10k} M^5 (M+1)^{2k} \, 2 \left(1 + \frac{1}{2^{10k} M^4 (M+1)^{2k}} \right) \le$$
$$\le \frac{2^{10k+2} M (M+1)^{2k}}{(10k+7)(10k-1)} 2^2 \le \frac{2^{10k+5} M (M+1)^{2k+1}}{(10k+7)(10k-1)},$$

где

$$(10k-i-j-m-6)^* =$$
$$= \begin{cases} 1, (10k-i-j-m) = 1,2,3,4,5,6; \\ (10k-i-j-m-6), (10k-i-j-m) = 7,8,9,\ldots; \end{cases}$$

$$(j-l-6)^* = \begin{cases} 1, (j-l) = 1,2,3,4,5,6, \\ (j-l-6), (j-l) = 7,8,9,\ldots; \end{cases}$$

$$(m-6)^* = \begin{cases} 1, m = 1,2,3,4,5,6, \\ (m-6), m = 7,8,9,\ldots; \end{cases}$$

$$(l-6)^* = \begin{cases} 1, l = 1,2,3,4,5,6, \\ (l-6), l = 7,8,9,\ldots; \end{cases}$$

$$(i-6)^* = \begin{cases} 1, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \\ (i-6), i = 7, 8, 9, \ldots \end{cases}$$

Аналогичное доказательство имеем и при $n + 1 = 10k + 1$, $n + 1 = 10k + 2$, $n + 1 = 10k + 3$, $n + 1 = 10k + 4$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \left|x^* - x\right|^{(n-1)/2}, \tag{12}$$

который является мажорирующим для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n \left|x^* - x\right|^{(n-1)/2}$.

Учитывая закономерность структуры коэффициентов C_n, ряд (12) представляем в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \left|x^* - x\right|^{(n-1)/2} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} v_{5k} \left|x^* - x\right|^{(5k-5)/2} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{5k+1} \left|x^* - x\right|^{(5k-4)/2} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} v_{5k+2} \left|x^* - x\right|^{(5k-3)/2} + \sum_{k=1}^{\infty} v_{5k+3} \left|x^* - x\right|^{(5k-2)/2} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} v_{5\mathrm{k}+4} \left|x^* - x\right|^{(5k-1)/2}.$$

На основании признака Даламбера устанавливаем сходимость ряда (12) в области $\rho_1 = \dfrac{1}{4\sqrt[5]{(+1)^2}}$. Полагая $\rho_2 = \min\left\{\rho_0, \rho_1\right\}$, получаем сходимость ряда (4) в области (5), что доказывает теорему. ►

Полученные в теореме 1 оценки позволяют построить приближенное решение задачи (2), (3):

$$y_N(x) = (x^* - x)^{-1/2} \sum_{n=0}^{N} C_n (x^* - x)^{n/2}, \quad C_0 \neq 0. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть выполняются пп. 1 и 2 теоремы 1, тогда для приближенного решения* (4) *задачи* (2), (3) *в области* $|x^* - x| < \rho_2$ *справедлива оценка погрешности*

$$\Delta y_N(x) = |y(x) - y_N(x)| \leq \Delta, \tag{14}$$

где

$$\Delta \leq \frac{2^{5n} M (M+1)^n \left|x^* - x\right|^{(5n-1)/2}}{1 - 2^5 (M+1) \left|x^* - x\right|^{5/2}} \times$$

$$\times\left(\frac{1}{(5n+2)(5n-6)}+\frac{2\left|x^*-x\right|^{1/2}}{(5n+3)(5n-5)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2^2\left|x^*-x\right|}{(5n+4)(5n-4)}+\frac{2^3\left|x^*-x\right|^{3/2}}{(5n+5)(5n-3)}+\frac{2^4\left|x^*-x\right|^{2}}{(5n+6)(5n-2)}\right),$$

в случае $N+1=5n$. *Для вариантов* $N+1=5n+1$, $N+1=5n+2$, $N+1=5n+3$, $N+1=5n+4$ *соответственно*:

$$\Delta\le\frac{2^{5n+1}M\left(M+1\right)^n\left|x^*-x\right|^{5n/2}}{1-2^5\left(M+1\right)\left|x^*-x\right|^{5/2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(5n+3)(5n-5)}+\frac{2\left|x^*-x\right|^{1/2}}{(5n+4)(5n-4)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2^2\left|x^*-x\right|}{(5n+5)(5n-3)}+\frac{2^3\left|x^*-x\right|^{3/2}}{(5n+6)(5n-2)}+\frac{2^4\left(M+1\right)\left|x^*-x\right|^{2}}{(5n+7)(5n-1)}\right);$$

$$\Delta\le\frac{2^{5n+2}M\left(M+1\right)^n\left|x^*-x\right|^{(5n+1)/2}}{1-2^5\left(M+1\right)\left|x^*-x\right|^{5/2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(5n+4)(5n-4)}+\frac{2\left|x^*-x\right|^{1/2}}{(5n+5)(5n-3)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2^2\left|x^*-x\right|}{(5n+6)(5n-2)}+\frac{2^3\left(+1\right)\left|x^*-x\right|^{3/2}}{(5n+7)(5n-1)}+\frac{2^4\left(+1\right)\left|x^*-x\right|^{2}}{(5n+8)\,5n}\right);$$

$$\Delta\le\frac{2^{5n+3}M\left(M+1\right)^n\left|x^*-x\right|^{(5n+2)/2}}{1-2^5\left(M+1\right)\left|x^*-x\right|^{5/2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(5n+5)(5n-3)}+\frac{2\left|x^*-x\right|^{1/2}}{(5n+6)(5n-2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2^2\left(+1\right)\left|x^*-x\right|}{(5n+7)(5n-1)}+\frac{2^3\left(+1\right)\left|x^*-x\right|^{3/2}}{(5n+8)\,5n}+\frac{2^4\left(+1\right)\left|x^*-x\right|^{2}}{(5n+9)(5n+1)}\right);$$

$$\Delta\le\frac{2^{5n+4}M\left(M+1\right)^n\left|x^*-x\right|^{(5n+3)/2}}{1-2^5\left(M+1\right)\left|x^*-x\right|^{5/2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(5n+6)(5n-2)}+\frac{2\left(+1\right)\left|x^*-x\right|^{1/2}}{(5n+7)(5n-1)}+\right.$$

$$+\frac{2^2(+1)|x^*-x|}{(5n+8)\,5n}+\frac{2^3(+1)|x^*-x|^{3/2}}{(5n+9)(5n+1)}+\frac{2^4(+1)|x^*-x|^2}{(5n+10)(5n+2)}\Bigg),$$

при этом $\rho_2=\min\left\{\rho_0,\dfrac{1}{4\sqrt[5]{(M+1)^2}}\right\}$, $M=\max\{M_0,\alpha\}$.

◄ По определению

$$\Delta y_N(x)=|y(x)-y_N(x)|=$$
$$=\left|\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x^*-x)^{(n-1)/2}-\sum_{n=0}^{N}C_n(x^*-x)^{(n-1)/2}\right|=$$
$$=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}C_n(x^*-x)^{(n-1)/2}\right|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}|C_n|\,|x^*-x|^{(n-1)/2}.$$

Учитывая закономерность образования коэффициентов C_n из теоремы 1, имеем

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|C_n|\,|x^*-x|^{(n-1)/2}=$$
$$=\sum_{k=N+1}^{\infty}|C_{5k}|\,|x^*-x|^{(5k-1)/2}+\sum_{k=N+1}^{\infty}|C_{5k+1}|\,|x^*-x|^{5k/2}+$$
$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}|C_{5k+2}|\,|x^*-x|^{(5k+1)/2}+\sum_{k=N+1}^{\infty}|C_{5\mathrm{k}+3}|\,|x^*-x|^{(5k+2)/2}+$$
$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}|C_{5k+4}|\,|x^*-x|^{(5k+3)/2},$$

при $N+1=5k$ находим

$$\Delta=\sum_{k=N+1}^{\infty}|C_{5k}|\,|x^*-x|^{\frac{5k-1}{2}}\le\frac{2^{5k}M(M+1)^k|x^*-x|^{(5k-1)/2}}{1-2^5(M+1)|x^*-x|^{5/2}}\times$$
$$\times\Bigg(\frac{1}{(5k+2)(5k-6)}+\frac{2|x^*-x|^{1/2}}{(5k+3)(5k-5)}+\frac{2^2|x^*-x|}{(5k+4)(5k-4)}+$$
$$+\frac{2^3|x^*-x|^{3/2}}{(5k+5)(5k-3)}+\frac{2^4|x^*-x|^2}{(5k+6)(5k-2)}\Bigg).$$

Аналогично получаем оценки для коэффициентов $N+1=5k+1$; $N+1=5k+2$; $N+1=5k+3$; $N+1=5k+4$. ►

Пример. Найдем приближенное решение задачи (2), (3) в случае $r(x) = 0$ при начальных данных $y(0,5) = 1$, $y'(0,5) = 1/\sqrt{3}$ и $\alpha = 0{,}001$. Эта задача имеет точное решение $y = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}-2x}}$. Найдем радиус аналитичности $\rho_2 \approx 0{,}18946457$, точное значение подвижной особой точки $x^* = \left(1+\sqrt{3}\right)/2$. Выберем значение аргумента $x = 1,3$. С использованием (13) при $N = 12$ вычислим приближенные значения функции:

x	y_{12}	y	Δy_{12}	Δy	$\Delta_1 y$
1,3	3,6216787	3,6216776	0,00012	0,0000011	0,000002

Здесь y_{12} — приближенное решение (13); y — значение точного решения; Δy_{12} — оценка погрешности приближенного решения (14) по теореме 2; Δy — абсолютная погрешность приближенного решения y_{12}; $\Delta_1 y$ — апостериорная оценка погрешности, которая определяется путем решения обратной задачи теории погрешности. При $\varepsilon = 0{,}000002$ на основании апостериорной оценки убеждаемся в том, что в структуре приближенного решения (13) должно быть значение $N = 18$. В таком случае нет необходимости рассчитывать сумму 18 слагаемых, так как для номеров $n = 1{-}5$, $7{-}11$, $13{-}17$ коэффициенты $C_n = 0$. Добавка в структуре приближенного решения для $N = 18$ не превышает требуемой точности. Поэтому в структуре приближенного решения можем ограничиться значением $N = 12$, при котором приближенное решение, содержащее три отличных от нуля слагаемых, будет иметь погрешность $\varepsilon = 0{,}000002$.

Обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными. Полученные результаты позволяют строить приближенное решение в окрестности подвижной особой точки с любой наперед заданной точностью и в настоящее время не имеют аналогов для рассматриваемого уравнения. Для минимизации структуры приближенного аналитического решения используется апостериорная оценка погрешности.

Заключение. Доказана теорема существования и единственности решения рассматриваемого нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, технология доказательства которого позволяет построить приближенное решение в окрестности подвижной особой точки. Получено представление решения нелинейного дифференциального уравнения в ряд по смешанным степеням.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Орлов В.Н.* Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.

2. *Коллатц Л.* Численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. литер., 1953. 460 с.
3. *Озерецковский В.Б.* Ряды Тейлора как метод решения дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений математической физики. М., 1994. 71 с.
4. *Чичурин А.В.* Использование системы Mathematica при поиске конструктивных методов интегрирования уравнения Абеля // Вучоныя запіскі БрДУ імя А.С. Пушкіна. Брест, 2007. Т. 3. Ч. 2. С. 24–38.
5. *Орлов В.Н.* Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Чебоксары: Перфектум, 2012. 112 с.
6. *Орлов В.Н.*, *Леонтьева Т.Ю.* Построение приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в области аналитичности // Междунар. научно-практич. конф. "Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий". 12–15 августа 2013 г. Чебоксары. С. 47–52.
7. *Орлов В.Н. Леонтьева Т.Ю.* Влияние возмущения начальных данных на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области аналитичности / В.Н. Орлов, Т.Ю. Леонтьева // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2013. № 3 (17). С. 103–109.
8. *Орлов В.Н.*, *Леонтьева Т.Ю.* Построение приближенного решения одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области голоморфности // Вестник Чуваш. гос. пед. ун-та им. И.Я. Яковлева. Сер. Естественные и технические науки. 2013. № 4 (80). С. 156–162.
9. *Орлов В.Н.*, *Леонтьева Т.Ю.* Исследование влияния возмущения начальных данных на приближенное решение одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в области голоморфности // Вестник РГСУ. 2013. № 1 (28). С. 108–111.
10. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
11. *Орлов В.Н.*, *Гузь М.П.* Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение задачи Коши одного нелинейного дифференциального уравнения // Междунар. научно-практич. конф. "Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий". 12–15 августа 2013 г. Чебоксары. С. 36–46.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.

REFERENCES

[1] Orlov V.N. Metod priblizhennogo resheniya pervogo, vtorogo differentsial'nykh uravneniy Penleve i Abelya [Method of approximate solution of the first, second differential Painleve's and Abe'sl equations]. Moscow, MPGU Publ., 2013. 174 p.
[2] Kollatts L. Chislennye metody resheniya differentsial'nykh uravneniy [Numerical methods of differential equations solution]. Moscow, Inostr. Liter. Publ., 1953. 460 p.
[3] Ozeretskovskiy V.B. Ryady Teylora kak metod resheniya differentsial'nykh, integral'nykh i integro-differentsial'nykh uravneniy matematicheskoy fiziki [Taylor's series as a method to solve differential, integral and integro-differential equations]. Moscow, 1994. 71 p.
[4] Chichurin A.V. Using of Mathematica system to find a constructive method for Abel's equation integration. *Vuchonyya zapiski BrDU imya A.S. Pushkina* [Scientific Articles, Brest State University named after A.S. Pushkin]. Brest, 2007, vol. 3, part. 2, pp. 24–38 (in Russ.).

[5] Orlov V.N. Metod priblizhennogo resheniya skalyarnogo i matrichnogo differentsial'nykh uravneniy Rikkati [Approximate method to solve scalar and matrix Riccati's differential equations]. Cheboksary, Perfektum Publ., 2012. 112 p.

[6] Orlov V.N., Leont'eva T.Yu. Construction of approximate solution of nonlinear differential equation in analyticity region. *Mezhdunar. Nauch.-Praktich. Konf.* "Fundamental'nye i prikladnye problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela, matematicheskogo modelirovaniya i informatsionnykh tekhnologiy" [International Scientific-Training Conf. "Fundamental and Applied Problems of Deformable Solids Mechanics, Mathematical Simulation, and Information Technologies]. Cheboksary. August 12–15, 2013, pp. 47–52 (in Russ.).

[7] Orlov V.N. Influence of initial data perturbation on approximate solution of one nonlinear second-order equation in analyticity region. *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. predel'n. sost.* [Herald of the I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Limit-State Mech.], 2013, no. 3 (17). pp. 103–109 (in Russ.).

[8] Orlov V.N., Leont'eva T.Yu. Construction of approximate solution of nonlinear differential equation in holomorphy region. *Vestn. Chuvash. Gos. Ped. Univ. im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Estestv. i tekhn. nauki* [Herald of the I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Nat. and Eng. Sci.], 2013, no. 4 (80), pp. 156–162 (in Russ.).

[9] Orlov V.N., Leont'eva T.Yu. Analysis of the influence of initial data perturbation on approximate solution of one nonlinear second-order equation in the holomorphy region]. *Vestnik RGSU* [Bull. of the Russian State Social University], 2013, no. 1 (28), pp. 108–111 (in Russ.).

[10] Golubev V.V. Lektsii po analiticheskoy teorii differentsial'nykh uravneniy [Lectures on analytical theory of differential equations]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1950. 436 p.

[11] Orlov V.N., Guz' M.P. Analysis of the movable singularity perturbation influence on Cauchy problem approximate solution of one nonlinear differential equation. Mezhdunar. Nauch.-Praktich. Konf. "Fundamental'nye i prikladnye problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela, matematicheskogo modelirovaniya i informatsionnykh tekhnologiy" [Inter. Scientific-Training Conf. "Fundamental and Applied Problems of Deformable Solids Mechanics, Mathematical Simulation, and Information Technologies"]. Cheboksary. August 12–15, 2013, pp. 36–46 (in Russ.).

[12] Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam [Reference book on ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 576 p.

Статья поступила в редакцию 22.05.2014

Орлов Виктор Николаевич — д-р физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Автор более 140 научных работ, в том числе монографии и патентов на изобретение, в области аналитической теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики, математического моделирования.
Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, Российская Федерация, 428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, д. 38.

Orlov V.N. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), head of the Algebra and Geometry department of the I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Author of more than 140 publications, including monographs and patents in the field of analytical theory of differential equations, computational mathematics, mathematical simulation.
I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, ul. K. Marksa 38, Cheboksary, 428000 Russian Federation.

Леонтьева Татьяна Юрьевна — аспирант кафедры алгебры и геометрии Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Автор шести научных работ в области аналитической теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики и математического моделирования.
Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, Российская Федерация, 428000, Чебоксары, ул. К. Маркса, д. 38.

Leont'eva T.Yu. — post-graduate of Algebra and Geometry department of the I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Author of six publications in the field of analytical theory of differential equations, computational mathematics, mathematical simulation.
I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, ul. K. Marksa 38, Cheboksary, 428000 Russian Federation.