УДК 517.57

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В МНОГОМЕРНОМ БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

О.Д. Алгазин, **А.В. Копаев**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: mopi66@yandex.ru; 5736234@mail.ru

Решена смешанная краевая задача нахождения гармонической функции n переменных в области, ограниченной двумя параллельными гиперплоскостями, по ее значениям на одной гиперплоскости и значениям ее нормальной производной на другой гиперплоскости. Полученное решение представлено в виде суммы двух интегралов, ядра которых выражены только через элементарные функции в случае пространства четной размерности, а в случае пространства нечетной размерности — еще и через функции Бесселя. Если заданные граничные значения являются обобщенными функциями медленного роста, то решение записывается в виде свертки ядер с этими функциями. На примере построения фильтрационного течения под точечной плотиной с водоупором показана возможность практического применения полученных формул.

***Ключевые слова*:** гармонические функции, преобразование Фурье, обобщенные функции медленного роста, теория фильтрации.

SOLUTION OF THE MIXED BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR LAPLACE EQUATION IN MULTIDIMENTIONAL INFINITE LAYER

O.D. Algazin, **A.V. Kopaev**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: mopi66@yandex.ru; 5736234@mail.ru

For the domain confined by two parallel hyper-planes the authors have offered a solution of the mixed boundary-value problem of finding a harmonic function of n variables. This function was determined by its values on a one hyper-plane and using values of the normal derived function for another hyper-plane. The obtained solution is presented as a sum of two integrals whose kernels are expressed only in term of elementary functions in the case of the even-dimension space. In contrast for odd-dimension space they are expressed also through Bessel functions. If the given boundary values are tempered distributions, then the solution is written as a convolution of the kernels with these functions. The opportunity of practical application of the obtained formulas is shown for the example with forming up a filtration flow under spot dam with aquiclude.

***Keywords*:** harmonic functions, Fourier transform, generalized functions of slow growth, filtration theory.

Гармонические функции двух и трех переменных описывают многие стационарные процессы подземной гидродинамики, теплопроводности и т.д. Поэтому поиск решений различных краевых задач для уравнения Лапласа (и новых более простых форм решений) весьма актуален. Для плоских односвязных областей (например, полосы) решение этих задач конформными преобразованиями сводится к их решению для канонических областей — круга и полуплоскости. Если число переменных больше двух, то такой возможности нет, и для каждой области приходится искать свои методы решения. Для полупространства основным методом решения краевых задач для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами является преобразование Фурье по переменным в граничной гиперплоскости [1]. Ядра Пуассона и Неймана интегралов, решающих первую (задача Дирихле) и вторую (задача Неймана) краевые задачи для уравнения Лапласа в полупространстве, хорошо известны [2, 3]. Для полосы и бесконечного слоя в трехмерном пространстве ядра интегралов, представляющих решения различных краевых задач для уравнения Лапласа, можно получить методом отражений в виде сумм бесконечных рядов [4, 5]. Для бесконечного слоя в n-мерном пространстве первая краевая задача решалась одним из авторов работы [6]. При этом указанные ряды удалось просуммировать, выразив их суммы через элементарные функции. В настоящей работе решается смешанная краевая задача Дирихле – Неймана для уравнения Лапласа в бесконечном слое n-мерного пространства. Для полосы и бесконечного слоя в трехмерном пространстве решения этой задачи, полученные методом отражений, известны [5]. Здесь такая задача решается методом преобразования Фурье. Было получено рекуррентное соотношение, связывающее ядра интегралов для n-мерного и $(n+2)$-мерного слоев, а для $n = 2, 3, 4$ эти ядра выражены через элементарные функции (для $n = 3$ используются еще и функции Бесселя).

Обозначения. Постановка задачи. Введем следующие обозначения:

$$x = (x_1,\ \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad y \in \mathbb{R};$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \quad \langle x, t\rangle = x_1 t_1 + \cdots + x_n t_n,\ dx = dx_1 \cdots dx_n;$$

$$\Delta u\,(x, y) = \Delta u = u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n} + u_{yy}$$

— оператор Лапласа;

$$F\,(t) = \mathcal{F}\,[f]\,(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\,(x)\, e^{i\langle x,t\rangle} dx$$

— преобразование Фурье суммируемой функции $f\,(x)$. Если суммируемая по x функция $f(x, y)$ зависит от переменных x и y, то ее преобразование Фурье по x обозначим как

$$\mathcal{F}_x\,[f]\,(t, y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\,(x, y)\, e^{i\langle x,t\rangle} dx.$$

Аналогично определяется обратное преобразование Фурье суммируемой функции $F(t)$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(t)\, e^{-i\langle x,t\rangle} dt$$

и суммируемой по t функции $F(t,y)$

$$\mathcal{F}_t^{-1}[F](x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(t,y)\, e^{-i\langle x,t\rangle} dt.$$

Определение преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста приведено в работе [7].

Рассмотрим смешанную краевую задачу: найти функцию $n+1$ переменной $u(x,y)$, гармоническую в области

$$D = \{(x,y) : 0 < y < a\} \subset \mathbb{R}^{n+1};$$

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < y < a\ ,$$

по краевым условиям

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

$$u_y(x,a) = \psi(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Решение задачи для общего случая. Вывод рекуррентного соотношения. Применим преобразование Фурье по x к уравнению Лапласа, обозначив

$$U(t,y) = \mathcal{F}_x[u](t,y)\,; \quad \Phi(t) = \mathcal{F}[\varphi](t)\,; \quad \Psi(t) = \mathcal{F}[\psi](t).$$

Получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром $t \in \mathbb{R}^n$:

$$-|t|^2 U(t,y) + U_{yy}(t,y) = 0;$$

$$U(t,0) = \Phi(t)\,, \quad U_y(t,a) = \Psi(t)\,.$$

Решением этой краевой задачи будет функция

$$U(t,y) = \Phi(t)\,\frac{\operatorname{ch}(|t|\,(a-y))}{\operatorname{ch}(a|t|)} + \Psi(t)\,\frac{\operatorname{sh}(|t|\,y)}{|t|\operatorname{ch}(a\,|t|)}\ .$$

Применив обратное преобразование Фурье, найдем решение исходной смешанной краевой задачи в виде свертки

$$u(x,y) = \varphi(x) * K_n(x,y) + \psi(x) * L_n(x,y)\,, \tag{1}$$

где ядра обозначены как

$$K_n(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}[k_n](x,y)\,, \quad k_n(|t|\,,y) = \frac{\operatorname{ch}(|t|\,(a-y))}{\operatorname{ch}(a|t|)}, \ t \in \mathbb{R}^n;$$

$$L_n(x,y) = \mathcal{F}_t^{-1}[l_n](x,y), \quad l_n(|t|,y) = \frac{\operatorname{sh}(|t|\,y)}{|t|\operatorname{ch}(a\,|t|)}, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y} l_n(|t|,y) = k_n(|t|, a-y),$$

то

$$\frac{\partial}{\partial y}\, L_n(x,y) = K_n(x, a-y)$$

и $\dfrac{\partial}{\partial y}\, L_n(x,y)$ при $y \to a-0$ ведет себя так же, как и $K_n(x,y)$ при $y \to +0$.

Нетрудно заметить, что $k_n(|t|,y)$ и $l_n(|t|,y)$ — бесконечно дифференцируемые и быстро убывающие функции $t \in \mathbb{R}^n$, т.е. принадлежат пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ [7]. Эти функции еще и сферически симметричные, поэтому при вычислении обратного преобразования Фурье можно перейти к сферическим координатам в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим $|x| = r$, $|t| = \rho, \sigma_{n-1}$ — площадь единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для любой сферически симметричной функции $h_n(|t|) = h_n(\rho) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$H_n(|x|) = H_n(r) = \mathcal{F}_t^{-1}[h_n](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} h_n(|t|) e^{-i\langle x,t\rangle} dt =$$

$$= \frac{\sigma_{n-1}}{(2\pi)^n} \int\limits_0^\infty h_n(\rho)\, \rho^{\frac{n}{2}} d\rho \int\limits_0^\pi e^{-ir\rho\cos\theta} \sin^{n-2}\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} r^{\frac{n}{2}-1}} \int\limits_0^\infty h_n(\rho)\, \rho^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(r\rho)\, d\rho,$$

где $J_{\frac{n}{2}-1}(r\rho)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\nu = n/2 - 1$ [7, 8]. Приведенная формула справедлива и при $n = 1$, что легко проверить.

Дифференцируя предыдущее равенство по r и учитывая формулу из теории функций Бесселя [4]

$$\frac{\nu J_\nu(r\rho)}{r\rho} - J'_\nu(r\rho) = J_{\nu+1}(r\rho),$$

получаем рекуррентную формулу

$$H_{n+2}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} H_n(r).$$

Для этой формулы необходимо знать ядра $K_n(x,y)$ и $L_n(x,y)$ только для $n = 1$ и $n = 2$.

Поскольку преобразование Фурье переводит пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в себя, ядра $K_n(x,y) = K_n^*(|x|,y)$ и $L_n(x,y) = L_n^*(|x|,y)$ при $\forall y \in (0,a)$ являются сферически симметричными функциями x из пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому свертка (1) существует для любых обобщенных функций медленного роста $\varphi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и записывается в виде

$$\varphi(x) * K_n(x,y) + \psi(x) * L_n(x,y) = \\ = (\varphi(t), K_n(x-t,y)) + (\psi(t), L_n(x-t,y)).$$

Когда $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — обычные функции полиномиального роста, свертка (1) записывается в виде суммы интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) K_n(x-t,y)\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(t) L_n(x-t,y)\,dt\ .$$

Легко проверить выполнимость следующих свойств в области D:

1) $K_n(x,y) > 0$;

2) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} K_n(x,y)\,dx = 1$;

3) для $\forall\delta > 0$, $\lim\limits_{y\to+0} \sup\limits_{|x|\ge\delta} K_n(x,y) = 0$.

Эти свойства означают, что $K_n(x,y)$ является *аппроксимативной единицей*, или δ-образной системой функций x (с параметром y), при $y \to +0$, $K_n(x,y)$ слабо сходится к δ-функции $\delta(x)$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y} L_n(x,y) = K_n(x,a-y),$$

$\dfrac{\partial}{\partial y} L_n(x,y)$ является аппроксимативной единицей при $y \to a-0$.

Поэтому, если $\varphi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\psi(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то формула (1) дает обобщенное решение задачи: $\lim\limits_{y\to+0} u(x,y) = \varphi(x)$ в $\mathcal{S}'$; $\lim\limits_{y\to a-0} u_y(x,y) = \psi(x)$ в $\mathcal{S}'$.

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — обычные функции полиномиального роста, то в каждой точке непрерывности

$$\lim_{y\to+0} u(x,y) = \varphi(x); \quad \lim_{y\to a-0} u_y(x,y) = \psi(x).$$

Решение смешанной краевой задачи для полосы на плоскости. В случае двух переменных с учетом четности функций по t ($k_1(|t|,y) = k_1(t,y)$, $l_1(|t|,y) = l_1(t,y)$), находим обратное преобразование Фурье по таблицам [9]:

$$\mathcal{F}_t^{-1}\left[k_1\right](x,y)=\frac{1}{a}\frac{\sin\left(\dfrac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)}=K_1(x,y);$$

$$\mathcal{F}_t^{-1}\left[l_1\right](x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi x}{2a}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi y}{2a}\right)}\right)=L_1(x,y).$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции полиномиального роста, то решение смешанной задачи записывается интегральной формулой

$$u(x,y)=\frac{1}{a}\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi(x-t)}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi(x-t)}{a}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)}dt+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi(x-t)}{2a}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\pi(x-t)}{2a}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi y}{2a}\right)}\right)dt\ .$$

Решение этой задачи известно, но с ядром в виде бесконечного ряда [5]:

$$u(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G(x,y,t,\tau)\right]_{\tau=0}dt+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(t)G(x,y,t,a)\,dt,$$

где

$$G(x,y,t,\pi)=$$
$$=\frac{1}{a}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}\exp\left(-\mu_n\left|x-t\right|\right)\sin(\mu_n y)\ \ \sin(\mu_n\tau),\quad \mu_n=\frac{\pi(2n+1)}{2a}.$$

Решение смешанной краевой задачи для бесконечного слоя в трехмерном пространстве. Для трех переменных ядра не выражаются через элементарные функции:

$$K_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}(\rho(a-y))}{\operatorname{ch}(a\rho)}\rho J_0(\rho|x|)\,d\rho;$$

$$L_2(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{ch}(a\rho)}J_0(\rho|x|)\,d\rho.$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции полиномиального роста, то решение смешанной задачи записывается интегральной формулой

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi(t)\,dt\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\rho(a-y))}{\operatorname{ch}(a\rho)}\rho J_0(\rho|x-t|)\,d\rho+ \\ +\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\psi(t)\,dt\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}(\rho y)}{\operatorname{ch}(a\rho)}J_0(\rho|x-t|)\,d\rho.$$

И в этом случае известно решение рассматриваемой задачи с ядром в виде бесконечного ряда [5]:

$$u(x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi(t)\left[\frac{\partial}{\partial\tau}G(x,y,t,\tau)\right]_{\tau=0}dt+\int\limits_{\mathbb{R}^2}\psi(t)\,G(x,y,t,a)\,dt,$$

где

$$G(x,y,t,\tau)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{r_{n1}}-\frac{1}{r_{n2}}\right);$$

$$r_{n1}=\sqrt{|x-t|^2+[y-(-1)^n\tau-2na]^2};$$

$$r_{n2}=\sqrt{|x-t|^2+[y+(-1)^n\tau-2na]^2}.$$

Решение смешанной краевой задачи для бесконечного слоя в четырехмерном пространстве. Покажем, как применяется рекуррентное соотношение для решения смешанной краевой задачи для пространства произвольной размерности на примере бесконечного слоя в четырехмерном пространстве. Ядра находим по рекуррентным формулам

$$K_3(x,y)=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}K_1(r,y)=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{a}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\pi r}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi r}{a}\right)-\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)}\right)= \\ =\frac{\left(2+\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)+\operatorname{ch}\left(\frac{\pi r}{a}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi r}{2a}\right)}{4a^2r\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)-\operatorname{ch}\left(\frac{\pi r}{a}\right)\right)^2}= \\ =\frac{\left(2+\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)+\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{a}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{2a}\right)}{4a^2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)-\operatorname{ch}\left(\frac{\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{a}\right)\right)^2};$$

$$L_3(x,y)=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}L_1(r,y)=-\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi r}{2a}\right)+\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi r}{2a}\right)-\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}\right)\right)= \\ =\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{\pi r}{2a}\right)}{2\pi ar\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)+\operatorname{ch}\left(\frac{\pi r}{a}\right)\right)}=$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{2a}\right)}{2\pi a\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)+\mathrm{ch}\left(\frac{\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}{a}\right)\right)}.$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — обычные функции полиномиального роста, то решение задачи записывается интегральной формулой

$$u(x,y) = \frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{4a^2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\varphi(t)\frac{\left(2+\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)+\mathrm{ch}\left(\frac{\pi|x-t|}{a}\right)\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\pi|x-t|}{2a}\right)}{|x-t|\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)-\mathrm{ch}\left(\frac{\pi|x-t|}{a}\right)\right)^2}dt +$$

$$+\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{2\pi a}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\psi(t)\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi|x-t|}{2a}\right)}{|x-t|\left(\cos\left(\frac{\pi y}{a}\right)+\mathrm{ch}\left(\frac{\pi|x-t|}{a}\right)\right)}dt.$$

Применение в подземной гидродинамике. В качестве примера применения формулы для двух переменных рассмотрим решение задачи теории фильтрации об описании течения под точечной плотиной с водоупором. Фильтрация жидкости (воды) вызывается разностью давлений на верхнем ($P_1 = -\varphi_1$) и нижнем ($P_2 = -\varphi_2$) бьефах (рисунок). Поле скоростей фильтрующейся жидкости описывается вектором $\overrightarrow{v} = k\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}$, где коэффициент k характеризует проницаемость среды (грунта) [10, 11]:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < a;$$

$$u(x,0) = \varphi_1, \quad x < 0, \quad u(x,0) = \varphi_2, \quad x > 0;$$

$$u_y(x,a) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Решением этой задачи будет функция

$$u(x,y) = \frac{\varphi_1}{a}\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{ch}(\pi(x-t)/2a)}{\mathrm{ch}(\pi(x-t)/a)-\cos(\pi y/a)}dt +$$

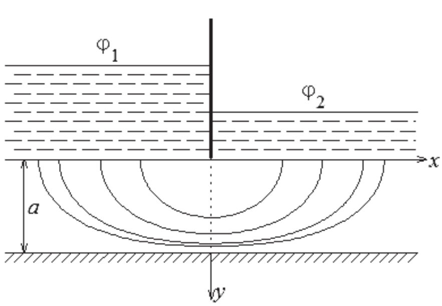

Схема фильтрационного течения под точечной плотиной с водоупором

$$+\frac{\varphi_2}{a}\sin\left(\frac{\pi y}{2a}\right)\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\left(\pi\left(x-t\right)/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi\left(x-t\right)/a\right)-\cos\left(\pi y/a\right)}dt =$$

$$= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\pi x/2a\right)}{\sin\left(\pi y/2a\right)}\right) + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}.$$

Сопряженная гармоническая функция имеет вид

$$v\left(x,y\right) = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2\pi}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}\left(\pi x/2a\right)+\cos\left(\pi y/2a\right)}{\operatorname{ch}\left(\pi x/2a\right)-\cos\left(\pi y/2a\right)}\right),$$

уравнения линий тока $v\left(x,y\right) = \mathrm{const}$ (см. рисунок).

Заключение. Отметим, что полученные формулы для решения смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа в бесконечном слое применимы и тогда, когда граничные значения являются обобщенными функциями медленного роста. В этом случае решение — обобщенное, т.е. $u\left(x,y\right)$ и $u_y\left(x,y\right)$ при $y\to+0$ и, соответственно, $y\to a-0$ слабо сходятся в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ к заданным граничным значениям. При двух переменных указанные формулы могут быть использованы для решения плоских задач подземной гидродинамики (теории фильтрации).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Комеч А.И.* Линейные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. 1988. Т. 31. С. 127–261.
2. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977. 430 с.
3. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1976. 296 с.
4. *Тихонов А.Н.*, *Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
5. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
6. *Касьянов Е.Ю.*, *Копаев А.В.* О решении задачи Дирихле для некоторых многомерных областей методом воспроизводящих ядер // Известия вузов. Математика. 1991. № 6. С. 17–20.
7. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
8. *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. 360 с.
9. *Диткин В.А.*, *Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.
10. *Радыгин В.М.*, *Голубева О.В.* Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высш. шк.,1983. 160 с.
11. *Голубева О.В.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1972. 367 с.

REFERENCES

[1] Komech A.I. Linear partial differential equations with constant coefficients. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat.: Fund. Napr.* [Results of science and technology. Ser. “Modern Problems of Mathematics: Fundamental Directions”], 1988, vol. 31, pp. 127–261 (in Russ.). Available at: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=intf&paperid=113&option_lang=eng (accessed 01.11.2014).

[2] Mikhlin S.G. Lineynye uravneniya v chastnykh proizvodnykh [Linear partial differential equations]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1977. 430 p.

[3] Bitsadze A.V. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1976. 296 p. (Engl. ed.: Bitsadze A.V. Equations of mathematical physics. Moscow, Mir Publishers, 1980. 318 p.). Available at: http://www.amazon.com/Equations-Mathematical-Physics-A-V-Bitsadze/dp/0714715433 (accessed 01.11.2014).

[4] Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow, MGU Publ., 1999. 798 p. (Engl. ed.: Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. Dover Publications; Reprint edition, 2011. 800 p.). Available at: http://www.amazon.com/Equations-Mathematical-Physics-Dover-Books/dp/0486664228 (accessed 01.11.2014).

[5] Polyanin A.D. Spravochnik po lineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p. (Engl. ed.: Polyanin A.D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. USA, Chapman and Hall/CRC, 2001. 800 p.).

[6] Kas’yanov E.Yu., Kopaev A.V. On the solution of the Dirichlet problem for some multidimensional domains by the method of reproducing kernels. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.* [Russ. Math.], 1991, no. 6, pp. 17–20 (in Russ.).

[7] Vladimirov V.S. Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike [Tempered distributions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p.

[8] Bochner S. Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m.b. H. VIII, 1932. 229 p. (Engl. ed.: Bochner S. Lectures on Fourier integrals. Trans. from the Ger. Princeton Uni. Press, 1959. 333 p. Russ. ed.: Bokhner S. Lektsii ob integralakh Fur’e [Lectures on Fourier integrals]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1962. 360 p.).

[9] Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integral’nye preobrazovaniya i operatsionnoe ischislenie [Integral transforms and operator calculus]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 524 p.

[10] Radygin V.M., Golubeva O.V. Primenenie funktsiy kompleksnogo peremennogo v zadachakh fiziki i tekhniki [Application of function of complex variable in physics and engineering problems]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1983. 160 p.

[11] Golubeva O.V. Kurs mekhaniki sploshnykh sred [The course of continuum mechanics]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1972. 367 p.

Статья поступила в редакцию 25.12.2013

Алгазин Олег Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 15 научных работ в области краевых задач для аналитических функций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, Москва, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Algazin O.D. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 15 publications in the field of boundary-value problems for analytic functions.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Копаев Анатолий Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области комплексного анализа, теории гармонических функций и их применений в подземной гидродинамике.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, Москва, 105005, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kopaev A.V. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of complex analysis, harmonic functions theory and their applications in underground hydrodynamics (porous medium flow theory).
Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.