

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 519.6

## МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕПЛОВЫХ НАГРУЗОК

**М.П. Галанин, В.В. Лукин, А.С. Родин, М.А. Семерикова**

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
Москва, Российская Федерация  
e-mail: galan@keldysh.ru; vvlukin@gmail.com

*Рассмотрена модель образования и эволюции трещин в хрупком материале. Использована модель размазанных трещин, позволяющая описывать разрушение материала в рамках предположений механики сплошной среды. Учет трещин приводит к ослаблению эффективных прочностных свойств материала. Модель рассмотрена в двумерном плоском и осесимметричном приближениях. Подход размазанных трещин применен для моделирования поведения топливных таблеток из диоксида урана. Результаты расчетов физически непротиворечивы.*

**Ключевые слова:** математическое моделирование, термоупругость, хрупкое разрушение, размазанные трещины, ядерное топливо.

## FRACTURE MODEL FOR BRITTLE MATERIAL UNDER THE THERMAL LOADS

**M.P. Galanin, V.V. Lukin, A.S. Rodin, M.A. Semerikova**

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation  
e-mail: galan@keldysh.ru; vvlukin@gmail.com

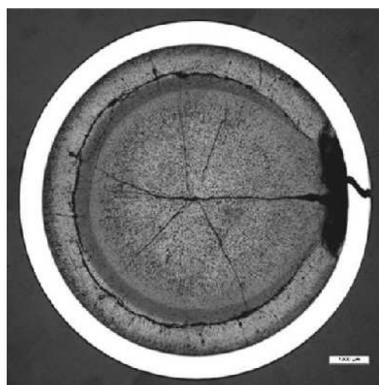
*Model of the formation and evolution of cracks in brittle materials was considered. Smeared crack model allowing to describe the material fracture in the framework of continuum mechanics assumptions has been used. Accounting of cracks leads to weakening of effective strength properties of the material. The model examined in a two-dimensional plane and axisymmetric approximations. Smeared crack approach is applicable to model the behavior of fuel pellets based on uranium dioxide. The calculation results are physically consistent.*

**Keywords:** mathematical simulation, thermoelasticity, brittle fracture, smeared cracks, nuclear fuel.

**Введение.** При анализе работоспособности любых конструкций ставится задача анализа их прочности, жесткости и надежности в различных условиях. Создание новой техники для эксплуатации в экстремальных условиях при больших нагрузках разной природы (статических и динамических) требует обширных знаний теории прочности и понимания условий разрушения конструкций при тех или иных нагрузках [1, 2]. Задача об исследовании разрушения той или иной конструкции является нелинейной и в отличие от хорошо разработанных

и достаточно точных методов решения линейных задач термоупругости остается сложной и малоисследованной [2–6].

Особый интерес среди подобных задач представляет моделирование процесса разрушения топливных таблеток в твэлах ядерных реакторов [7], поскольку подобное разрушение происходит в рамках рабочего режима и является неотъемлемой частью поведения топлива. Интерес вызывает задача моделирования поведения ядерного топлива с учетом трещин после их образования и распространения, прочностных и тепловых свойств разрушенных таблеток. Экспериментально установлено [7], что ядерное топливо из диоксида урана ( $UO_2$ ) растрескивается в реакторах (при большом выгорании — полностью) в процессе работы под воздействием совокупности факторов. Фотография трещин в использованной топливной таблетке приведена на рис. 1 [8].



**Рис. 1.** Трещины в топливной таблетке

Размеры таблеток могут различаться. В исходном состоянии таблетки рассматриваемого типа имеют форму цилиндра радиусом 3,8 мм с фаской и внутренним отверстием радиусом 0,8 мм. Высота цилиндра составляет от 10 до 18 мм.

Цилиндрическая симметрия топливной таблетки и внешней нагрузки в твэле определяет осесимметричную постановку задачи численного моделирования. Развитие трещин также удобно исследовать в сечении таблетки горизонтальной плоскостью. Далее рассмотрим каждую задачу.

Поскольку процессы, происходящие в таблетках, необходимо знать на протяжении большей части или всего длительного срока эксплуатации топлива, а возникающие колебания имеют большую скорость распространения, они затухают за время, малое по сравнению с временем работы топлива. Учет таких колебаний в динамической задаче возможен, но нерационален, так как при численном моделировании накладывает жесткие условия на временной шаг и усложняет расчет. Во избежание этого будем решать квазистационарную задачу термомеханики в моделях, описывающих непосредственно топливную таблетку.

Цель настоящей работы — построение и анализ математической модели разрушения хрупкого материала, позволяющей исследовать развитие трещин в теле в рамках представлений механики сплошной среды без выделения и детального описания эволюции конкретных

трещин. Описанная здесь и в работах [9, 10] модель будет далее применяться в предметных решателях платформы Теметос [11].

**Математическая модель.** При построении моделей хрупких материалов будем исходить из следующей математической модели термоупругого материала. Рассмотрим сплошную среду в квазистационарном двумерном приближении, а в качестве базовых выберем приведенные ниже соотношения<sup>1</sup> [12].

1. Тензор малых деформаций Коши в предположении существования его аддитивного разложения

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^0, \quad (1)$$

где  $u_k = u_k(\mathbf{x}, t)$  — компоненты вектора перемещений сплошной среды в точке  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}^T$  (в одномерном случае  $x_1 \equiv x$ ) в момент времени  $t$ ;  $\varepsilon_{kl}^e$  — компоненты упругой составляющей тензора деформаций;  $\varepsilon_{kl}^0$  — компоненты тензора неупругих деформаций среды. В частности, для термоупругого тела

$$\varepsilon_{kl}^0 = \varepsilon_{kl}^T = \alpha_{kl}^T \Delta T,$$

где  $\alpha_{ij}^T$  — компоненты (симметричного) тензора коэффициентов температурной деформации;  $T(\mathbf{x}, t)$  — температура;  $\Delta T = T(\mathbf{x}, t) - T_0$  — приращение температуры относительно уровня нулевых деформаций.

2. Определяющее соотношение (закон Гука)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e$$

или с учетом аддитивного разложения (1)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0), \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора упругих коэффициентов.

3. Уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0, \quad i = \overline{1, 3} \quad (3)$$

вместе с граничными условиями  $u_i(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}_i(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in S_u$  и  $\sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) = \tilde{p}_i(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in S_p$ , где  $S = S_u \cup S_p$  — поверхность рассматриваемого тела;  $\sigma_{ji}$  — компоненты тензора напряжений;  $b_i$  — компоненты вектора объемных сил.

После применения метода возможных перемещений и дискретизации по пространству методом конечных элементов (МКЭ) задача

<sup>1</sup>Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

деформирования термоупругого тела (1)–(3) сводится к решению следующего матричного уравнения [13, 14]:

$$[K] \{U\} = \{R\}.$$

Здесь использованы стандартные обозначения МКЭ:  $\{U\}$  — глобальный (узловой) вектор перемещений;  $\vec{\varepsilon} = [B] \{U\}$  — вектор деформаций;  $[B]$  — геометрическая матрица аппроксимации, зависящая от вида конечных элементов;  $\vec{\sigma} = [C] (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^0)$  — вектор напряжений;  $[C]$  — матрица упругих коэффициентов;  $[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dV$  — глобальная матрица жесткости,

$$\{R\} = \{R_p\} + \{R_V\} + \{R_{\varepsilon^0}\}$$

— глобальный вектор нагрузки, в котором составляющая  $\{R_p\}$  отвечает за вклад поверхностных нагрузок, составляющая  $\{R_V\}$  — за вклад объемных нагрузок, составляющая  $\{R_{\varepsilon^0}\}$  — за вклад неупругих деформаций  $\varepsilon^0$ .

**Моделирование разрушения.** Разрушение тела зависит от различных факторов, многие из которых имеют случайный характер, не всегда изучены качественно или даже неизвестны: это структура материала, характер нагрузок, внешние условия, состояние материала в процессе использования, внутренние дефекты и др.

В связи с характером задач моделирования хрупкого разрушения [2] — множеством возникающих практически мгновенно трещин и невозможности отслеживания развития каждой из них — интерес представляют модели, учитывающие трещины эффективным образом [3–6, 15]. Наиболее простым и реалистичным при исследовании разрушения и оценке прочности является анализ состояния материала на основе положений механики сплошной среды с учетом особенностей структуры материала [3, 12]. Модели, описывающие изменение механических свойств материала в рамках модели сплошной среды, рассмотрены в работах [3, 4]. Будем основываться на подобных моделях, поскольку они позволяют рассмотреть развитие трещин и изменение напряженного и деформированного состояний.

Для моделирования разрушения топливных таблеток из диоксида урана ( $UO_2$ ) применяют подход размазанных (фиктивных) трещин и модели разрушения, первоначально сформулированные для бетона или керамики [5]. При нагружении конструкции из хрупкого материала, когда значения напряжений превышают предел прочности материала, модель размазанных трещин описывает растрескивание как разгрузку по всему объему конструкции в сочетании с дополнительным ее растяжением. Таким образом, модель размазанных трещин формулируется через связь напряжений и удлинений в зоне трещины

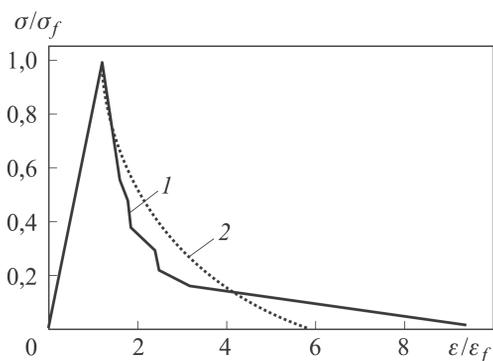
[5, 6, 15], причем внимание уделяется лишь изменению свойств материала, а не траекториям распространения каждой трещины. Недосток такого подхода — вид трещин в расчетной области и даже условия их возникновения могут зависеть от шага сетки [5].

Основная идея модели размазанных трещин заключается в том, что до полного разрушения материала образуется так называемая зона трещины, в которой напряжение изменяется по определенным экспериментальным зависимостям. Эта модель применима для материалов, в которых замечено образование микротрещин и пластические деформации пренебрежимо малы. Важным требованием также является линейность поведения материала до предела прочности. Примерами таких материалов являются бетон, керамика, некоторые виды пластиков и дерево [15].

Экспериментально подтверждено образование трещин в таблетке топлива из диоксида урана при относительно низких нагрузках, тепловых или механических [7, 8]. Топливная таблетка ведет себя как хрупкий материал, ее пластическими деформациями можно пренебречь. Свойства диоксида урана близки к свойствам керамических материалов, для которых характерно следующее [15]: при напряжениях, меньших некоторого условного предела прочности при растяжении  $\sigma_f$ , и соответствующих ему деформациях  $\varepsilon_f$  материал ведет себя как линейно-упругий, а при превышении предела прочности имеет место разгрузка по нелинейному закону (рис. 2).

При значениях напряжений, равных пределу прочности, и соответствующих деформациях полагается, чтобы трещина инициировалась, но не сформировалась полностью до достижения значений деформаций, больших деформации  $\varepsilon_f$  в 5–10 раз. Область нелинейного снижения напряжений при увеличении деформаций называется послепиковой [15].

Экспериментальную кривую (см. рис. 2) можно аппроксимировать следующей зависимостью напряжений от деформаций  $\sigma(\varepsilon)$ :



**Рис. 2.** Экспериментальная (1) и аналитическая (2) кривые нормализованного растягивающего отклика для керамических материалов

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}, \quad (4)$$

где  $A \approx -0,024$ ;  $B \approx 1,69$ ;  $C = 0,5$ . Полагается, что зависимость (4) справедлива при  $\varepsilon < \varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0$  — значение деформации, большее предела прочности в 5–10 раз, при котором материал не способен передавать напряжения в одномерном случае, а в многомерном — не передает напряжения в направлении, ортогональном направлению трещины) [5].

**Одномерная модель.** Для определения напряжений в материале с описанными свойствами будем использовать подход, аналогичный подходу в моделях упругопластических материалов [12]. В качестве численного метода применим метод дополнительных деформаций [16]. Введем понятие переменного предела прочности  $\sigma_f^v(\varepsilon)$ , который в недеформированном состоянии материала равен пределу прочности при растяжении [2]:  $\sigma_f^v(0) = \sigma_f$ . Напряжения при заданных значениях деформаций не могут превышать значения переменного предела прочности, определяемого экспериментальной кривой, представленной на рис. 2. Если в процессе численного решения задачи указанное условие не выполняется, то напряжения определяются из экспериментальной зависимости (4) при вычисленных значениях деформаций. Используем следующую нелинейную зависимость напряжения от деформации:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma = E\varepsilon^e, & E\varepsilon^e < \sigma_f^v(\varepsilon); \\ \sigma_f^v(\varepsilon) = \sigma_f \left( A + B e^{-C \frac{\varepsilon^e}{\varepsilon_f}} \right), & E\varepsilon^e \geq \sigma_f^v(\varepsilon), \end{cases} \quad (5)$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\varepsilon^e$  — упругая деформация. Как и ранее, предполагаем наличие аддитивного разложения тензора полных деформаций, поэтому значение упругой деформации определяется как

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^T - \varepsilon^{\text{crk}}.$$

Здесь  $\varepsilon$  — значение полной деформации, полученное в результате решения уравнений движения;  $\varepsilon^T$  — значение температурной деформации;  $\varepsilon^{\text{crk}}$  — значение деформации за счет трещин, рассчитанное на предыдущем временном шаге,

$$\varepsilon^{\text{crk}} = \varepsilon - \varepsilon^T - \sigma(\varepsilon)/E;$$

напряжение  $\sigma(\varepsilon)$  определяется по (5). Отметим, что при первоначальном нагружении, когда материал не подвергается нагрузкам, большим предела прочности, значение деформации за счет трещин равно нулю, а в послепиковой области, где материал ведет себя по нелинейным законам,  $\varepsilon^{\text{crk}} > 0$ . При разгрузке значение деформаций за счет трещин, полученное на предыдущем шаге нагружения, не изменяется, а

материал ведет себя как линейно-упругий с пределом прочности  $\sigma_f^v(\varepsilon)$  и модулем Юнга  $E$ .

Результаты тестовых расчетов для этой модели приведены в работе [17].

**Многомерная модель.** Математическую модель разрушения в многомерном случае построим по аналогии с моделью, приведенной в работе [15]. Отметим, что зависимость (4) можно переписать в виде

$$\frac{\sigma}{\sigma_f} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} \frac{\varepsilon_f}{\sigma_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}.$$

Учитывая соотношения  $\sigma/\varepsilon = E$  и  $\sigma_f/\varepsilon_f = E_0$  ( $E$  и  $E_0$  — текущий и начальный модули Юнга), получаем

$$\frac{E}{E_0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} = A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}}.$$

В таком случае можно утверждать о функции памяти  $e(t)$ , имеющей смысл отношения текущего и начального модуля Юнга:

$$e(t) = \frac{E}{E_0} = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon} \left( A + B e^{-C \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}} \right). \quad (6)$$

Зависимость (6) справедлива, когда  $\varepsilon_f \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ; при  $\varepsilon < \varepsilon_f$   $e(t) = 1$ , при  $\varepsilon > \varepsilon_0$   $e(t) = 0$ . С использованием построенной функции памяти для одномерного случая модифицируются определяющие соотношения в математической модели топливной таблетки.

Для применения понятия функции памяти необходимо выбрать такую систему координат, в которой тензор деформаций можно привести к трем независимым компонентам — главным осям тензора деформаций. Пусть матрица перехода  $\hat{T}$  диагонализует тензор деформаций  $\hat{\varepsilon}$ :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \hat{T}^{-1} \hat{\varepsilon} \hat{T},$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — главные значения тензора деформаций  $\hat{\varepsilon}$ . Из компонент матрицы  $\hat{T}$  размерностью  $3 \times 3$  единственным образом можно составить матрицу преобразования  $\hat{P}$  размерностью  $4 \times 4$ , которая приводит вектор деформаций  $\vec{\varepsilon}$  в нотации Фойгта к виду  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, 0\}^T$ :

$$\vec{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \hat{P} \vec{\varepsilon},$$

где  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}$  — сдвиговая деформация.

<sup>2</sup>Здесь и далее векторы деформаций и напряжений, записанные в главных осях тензора деформаций, обозначены символом  $\vec{\cdot}$ .

В отличие от одномерного случая для тензора деформаций не предполагается возможности аддитивного выделения деформаций растрескивания. Вместо этого рассмотрим две конфигурации тела — без растрескивания ( $K_1$ ) и с учетом образования трещин ( $K_2$ ). Для конфигурации  $K_1$  справедлив закон Гука:

$$\vec{\sigma} = [C] \vec{\varepsilon}^e. \quad (7)$$

Рассмотрим в конфигурации  $K_1$  систему координат, связанную с главными направлениями тензора деформаций. В этой системе координат перепишем закон Гука (7) в виде

$$\vec{\sigma} = [C] \vec{\varepsilon}^e.$$

Отметим, что матрица перехода  $\hat{P}$  к главным направлениям тензора деформаций является ортогональной, поэтому

$$\vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma} = \vec{\varepsilon}^T \vec{\sigma}.$$

Закон Гука для конфигурации  $K_2$  имеет вид

$$\vec{\sigma} = \tilde{C} \vec{\varepsilon}^e = \tilde{C} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T).$$

Поскольку матрица перехода  $\hat{E}$  из конфигурации  $K_1$  в конфигурацию  $K_2$  является диагональной и поворота осей при этом не происходит, справедливы соотношения

$$\vec{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}; \quad \vec{\varepsilon}^T = \bar{\varepsilon}^T; \quad \vec{\sigma} = \bar{\sigma},$$

а определяющее соотношение можно записать как

$$\bar{\sigma} = \tilde{C} (\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^T),$$

где  $[\tilde{C}] = E^T \bar{C} E$ .

Вернемся к исходной системе координат с помощью соотношений

$$\vec{\sigma} = \hat{P}^T \bar{\sigma}; \quad \vec{\varepsilon} = \hat{P}^{-1} \bar{\varepsilon}; \quad \vec{\varepsilon}^T = \hat{P}^{-1} \bar{\varepsilon}^T; \\ \bar{C} = (\hat{P}^{-1})^T [C] \hat{P}^{-1},$$

отсюда  $\vec{\sigma} = \hat{P}^T \tilde{C} \hat{P} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T)$ , причем  $\hat{P}^T \tilde{C} \hat{P} = \hat{P}^T \hat{E}^T \bar{C} \hat{E} \hat{P} = (\hat{P}^T \hat{E}^T (\hat{P}^{-1})^T) [C] (\hat{P}^{-1} \hat{E} \hat{P})$ . Введем обозначение  $Z = P^{-1} E P$ , тогда

$$\vec{\sigma} = \hat{Z}^B \hat{C} \hat{Z} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T) = \hat{C}^{\text{crk}} (\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^T).$$

Осталось определить вид матрицы  $\hat{E}$  перехода из конфигурации без растрескивания в конфигурацию с учетом образования трещин. Выполним это, обобщив функцию памяти (6) на многомерный случай и определив аналогичным образом функцию памяти трещины,

развивающейся в плоскости, перпендикулярной  $i$ -му главному направлению:

$$e_i(t) = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_i} \left( A + B e^{-C \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_f}} \right).$$

Тогда можно определить матрицу перехода  $\hat{E}$ , имеющую в системе координат, связанной с главными осями тензора деформаций, диагональный вид. В общем случае эта матрица будет иметь вид

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 e_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_1 e_2 \end{bmatrix}.$$

Итак, значения трех функций памяти вместе с главными направлениями тензора деформаций полностью определяют состояние растрескавшегося материала в текущий момент времени. При решении двумерной задачи в случае плоской деформации имеют смысл две функции памяти и матрица  $\hat{E}$  будет иметь вид

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 e_2 \end{bmatrix}.$$

В осесимметричном случае найдены три функции памяти, однако функция, связанная с угловой координатой, определяет не зависящую от других направлений трещину. Таким образом, в осесимметричных задачах всегда существует выделенное направление развития трещин — радиальное. Матрица памяти в этом случае выглядит так:

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 e_2 \end{bmatrix}.$$

**Конечно-элементная постановка задачи.** Решим двумерную квазистационарную задачу (3) с помощью МКЭ на четырехугольной сетке. Представим расчетную область  $\Omega$  как объединение четырехугольных подобластей  $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$ , где  $N$  — число элементов. Выберем пространство пробных функций, состоящее из билинейных финитных функций  $\tilde{\varphi}_{ij}$ ,  $i = N$ ,  $j = 1, 4$ . Будем аппроксимировать поле перемещений функциями из указанного пространства. Представив поле

перемещений в виде  $u = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 u_{ij} \tilde{\varphi}_{ij}(x, y)$ , где  $u_{ij}$  — перемещения в узлах, можно записать уравнения равновесия в слабой постановке и перейти к системе линейных алгебраических уравнений [13, 14]:

$$[K(e_1, e_2, e_3)] \{U\} = \{R_U(e_1, e_2, e_3, T)\}.$$

Отметим, что вид матрицы жесткости  $K$  зависит от типа решаемой двумерной задачи и используемой матрицы упругих коэффициентов. В случае плоского деформированного состояния матрица упругих коэффициентов имеет вид

$$C = E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix},$$

при решении осесимметричной задачи —

$$C = E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \end{bmatrix}.$$

Будем рассматривать изменение перемещений, деформаций и напряжений во времени, разбив временной отрезок  $[0, t_f]$  на  $P$  временных слоев с шагом  $\tau = t_f / (P - 1)$ , на каждом из которых решается стационарная задача теории упругости с учетом температуры и влияния размазанных трещин.

Для анализа рассмотренной математической модели разработан программный комплекс, результаты тестирования которого приведены в работе [15].

**Результаты расчетов.** Применим построенную модель размазанных трещин к моделированию разрушения топливной таблетки. Диоксид урана обладает следующими физическими характеристиками [18]: плотность  $\rho = 10\,800$  кг/м<sup>3</sup>; модуль Юнга  $E = 1,75 \cdot 10^{11}$  Па; коэффициент Пуассона  $\nu \simeq 0,316$ ; теплопроводность  $\lambda = 3,487$  Вт/(м·К); удельная теплоемкость  $c_e = 310$  Дж/(кг·К); предел прочности  $\sigma_f = 1,1 \cdot 10^8$  Па; коэффициент теплового расширения  $\alpha = 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>. Температуру естественного состояния примем равной  $T_0 = 300$  К.

Для полного описания трещин в таблетке недостаточно двумерной постановки, поэтому рассмотрим два сечения:

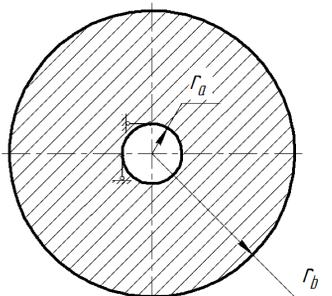


Рис. 3. Горизонтальное сечение таблетки

1) горизонтальной плоскостью, позволяющее проанализировать радиальные и полярные трещины;

2) вертикальной плоскостью, содержащей ось  $O_z$ , в котором можно отследить развитие поперечных трещин.

Примем, что, если не оговорено иное, при переходе на следующий временной слой температура внутри и снаружи таблетки изменяется по линейному закону, причем так, чтобы на внутреннем радиусе таблетки температура возрастала до  $T_a = 1700$  К, а на внешнем — до  $T_b = 600$  К на последнем временном слое при  $t = t_f$  ( $t_f$  — время окончания расчета):

$$T(r_a, z, t) = (T_a - T_0) \frac{t}{t_f} + T_0 = T_1(t);$$

$$T(r_b, z, t) = (T_b - T_0) \frac{t}{t_f} + T_0 = T_2(t).$$
(8)

Зависимость температуры от пространственных координат  $T(x_1, x_2, t_n)$ , где  $x_1, x_2 = r, z$  в осесимметричной постановке;  $x, y$  — в двумерной постановке, задается на каждом временном слое с номером  $n$ .

**Растрескивание топливной таблетки в горизонтальном сечении.** Рассмотрим сечение топливной таблетки горизонтальной плоскостью. Оно представляет собой кольцо с внутренним радиусом  $r_a = 0,8$  мм, внешним радиусом  $r_b = 3,8$  мм. Для предотвращения его вращения закрепим его в одной точке на горизонтальной оси по вертикали и на вертикальной оси по горизонтали (рис. 3). Остальные границы будем считать свободными.

Будем решать поставленную задачу в координатах  $(x, y)$ . Двумерный вектор перемещений обозначим  $\vec{u} = (u, v)^T$ . Граничные условия в таком случае имеют следующий вид:

$$u(0, r_a) = v(-r_a, 0) = 0;$$

$$\sigma|_{x^2+y^2=r_a^2} = \sigma|_{x^2+y^2=r_b^2} = 0.$$

Температуры  $T_1(t)$  и  $T_2(t)$  на границах выберем в соответствии с (8); примем, что температура зависит от радиуса кольца ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) по закону [19]:

$$T(x, y, t) = \frac{T_1(t) \ln(r_b/r) - T_2(t) \ln(r_a/r)}{\ln(r_b/r_a)}.$$

При таком задании граничных условий и нагрузок при отсутствии анизотропных эффектов для напряжений в зоне упругости (до возникновения трещин) вдали от внутренней границы должна иметь место симметрия относительно общего центра окружностей, задающих границы. Следовательно, имеем двумерную задачу в случае плоского деформированного состояния. В двумерной задаче в общей постановке нет четкого соответствия между координатами и функциями памяти, поэтому в исходной системе координат по уменьшению функции памяти можно утверждать лишь о наличии трещины ортогонально одному из главных направлений тензора деформаций и общем ослаблении прочностных характеристик материала. По виду одной из функций памяти нельзя судить обо всех размазанных трещинах в области. Местоположение зон ослабленного материала показывает величина  $\min\{e_1, e_2\} \in [0,01, 1]$ . Распределения величины  $\min\{e_1, e_2\}$ , а также напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  в различные моменты времени представлены на рис. 4 и 5 (видны зоны размазанных трещин).

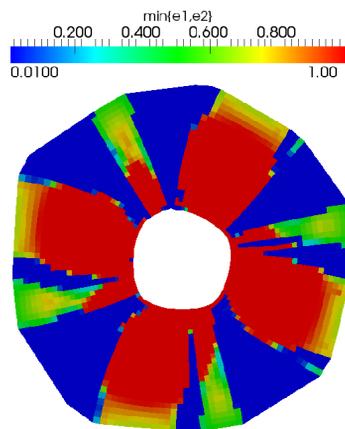


Рис. 4. Распределение величины  $\min\{e_1, e_2\}$  в деформированной области на момент окончания расчета

Напряжения  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  показаны на рис. 5 в моменты времени, соответствующие выбранным для функций  $e_1$  и  $e_2$  временным слоям. При  $t \geq 0,1t_f$  заметно влияние трещин на поле напряжений. Наибольшие значения напряжений возникают вблизи границ размазанных трещин, что объясняет дальнейшее увеличение ослабленной области. Напряжения имеют порядок  $10^7$  Па, что не превышает известный из экспериментов уровень напряжений в топливной таблетке [18].

Расположение трещин хорошо видно на рис. 6, где показаны перемещения  $u$  (рис. 6, а) и  $v$  (рис. 6, б), и рис. 4, на котором приведена деформированная область с изображенными на ней размазанными трещинами на момент окончания расчета. Заметны восемь радиальных трещин, соответствующих разрывам компонент перемещений.

**Растрескивание топливной таблетки в вертикальном сечении.** Пренебрежем наличием фаски в таблетке и будем решать осесимметричную задачу. В качестве расчетной области рассмотрим половину сечения таблетки вертикальной плоскостью, проходящей через  $O_z$  (рис. 7).

Зафиксируем основание таблетки по вертикали, остальные границы области будем считать свободными. Вектор перемещений, как и в

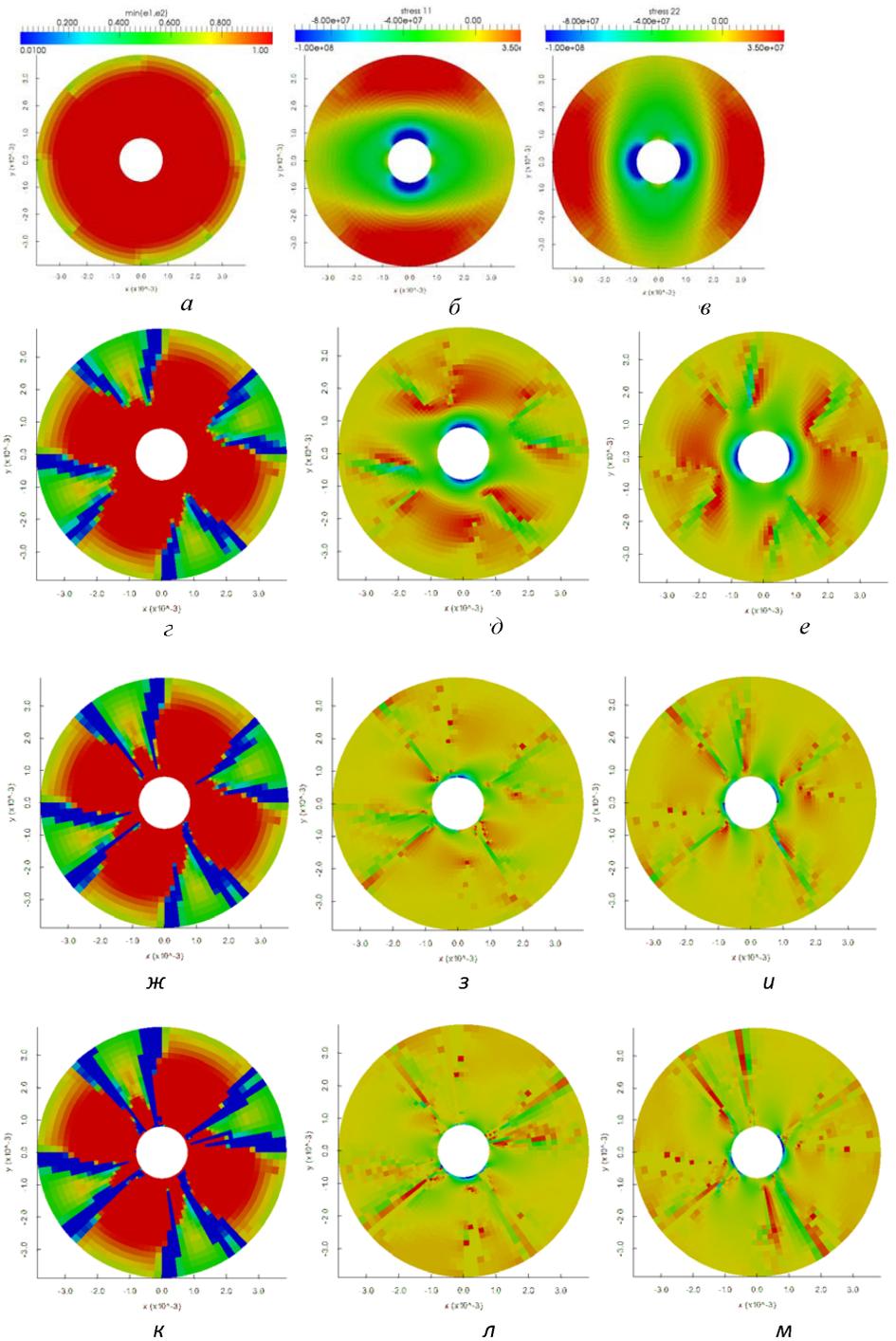
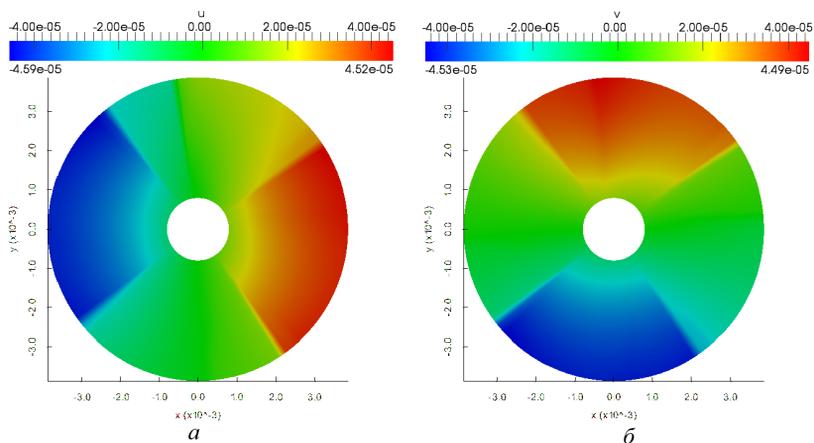


Рис. 5. Распределения величины  $\min \{e_1, e_2\}$  (а, г, ж, к) и напряжения  $\sigma_{11}$  (б, д, з, л) и  $\sigma_{22}$  (в, е, и, м) в моменты времени  $t = 0, 0,9t_f$  (а-в),  $t = 0, 1t_f$  (г-е),  $t = 0, 2t_f$  (ж-и) и  $t = t_f$  (к-м)



**Рис. 6.** Перемещения  $u$  (а) и  $v$  (б) на момент окончания расчета в горизонтальном сечении таблетки

квазиодномерной задаче, обозначим  $\vec{u} = (u, w)^T$ . Граничные условия для этой задачи в координатах  $(r, z)$  имеют следующий вид:

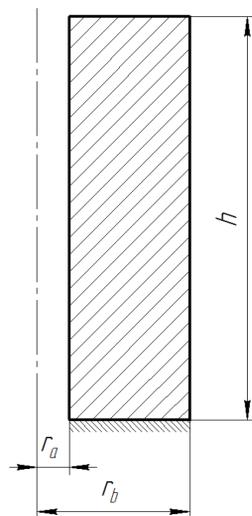
$$w|_{z=0} = 0; \\ \sigma|_{r=r_a} = \sigma|_{r=r_b} = \sigma|_{z=h} = 0.$$

Примем, что температура распределена по пространству линейно на каждом временном слое. Выберем  $T_1(t)$  и  $T_2(t)$  в соответствии с (8), тогда поле температуры зададим так:

$$T(r, z, t) = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{r_a - r_b} r + \frac{T_2(t)r_a - T_1(t)r_b}{r_a - r_b}.$$

Рассмотрим задачу с размерами области, соответствующими размерам топливной таблетки  $r_a = 0,8$ ,  $r_b = 3,8$ .

Распределения функций памяти  $e_1, e_2, e_3$  в различные моменты времени на сетке из 20 000 точек приведены на рис. 8, 9. Отметим, что при более ранних моментах времени функция  $e_1$  равна единице, и лишь впоследствии, когда трещина сформировалась, появляются растрескавшиеся области. Это связано с отсутствием областей растяжения в первом главном направлении тензора деформаций до тех пор, пока трещина не сформировалась полностью в данной области. В зоне ослабленного материала в одном направлении в модели размазанных трещин поле напряжений теряет гладкость, поэтому в указанном направлении возможны появление растягивающих напряжений и выполнение критерия образования трещины.



**Рис. 7.** Расчетная область

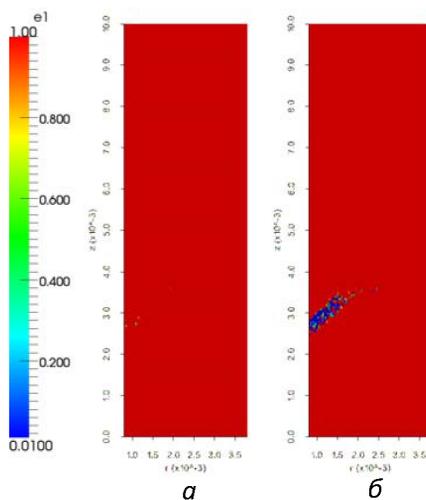


Рис. 8. Функция памяти  $e_1$  в моменты времени  $t = 0,25t_f$  (а) и  $t = t_f$  (б)

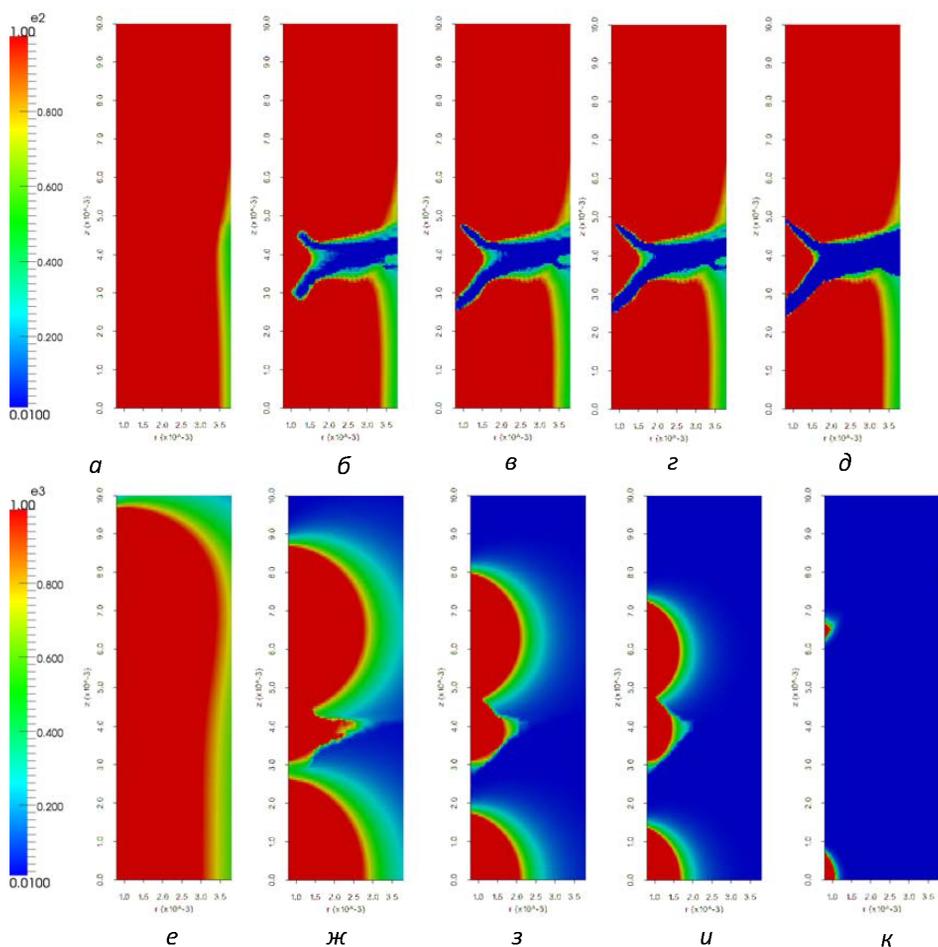


Рис. 9. Функции памяти  $e_2$  (а-д) и  $e_3$  (е-к) в моменты времени  $t = 0,07t_f$  (а, е),  $t = 0,11t_f$  (б, ж),  $t = 0,17t_f$  (в, з),  $t = 0,25t_f$  (г, и) и  $t = t_f$  (д, к)

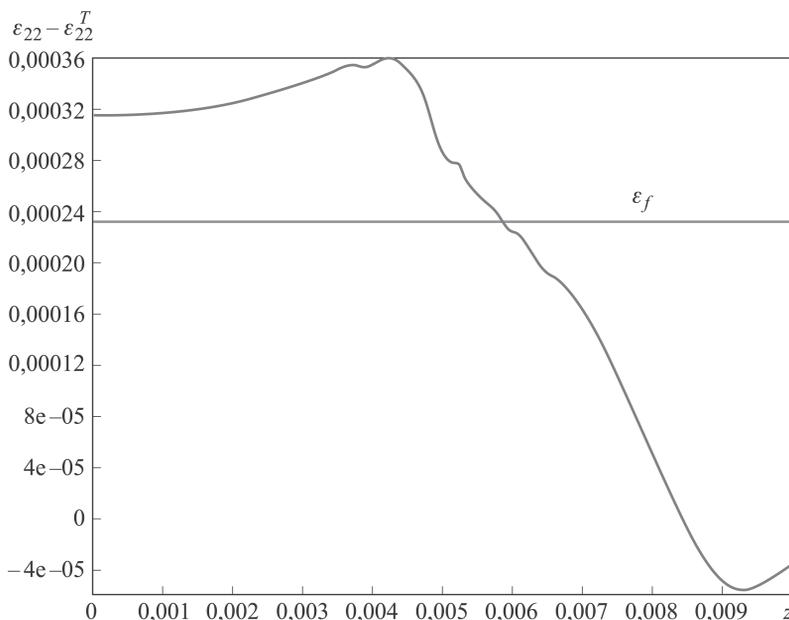


Рис. 10. Зависимость  $\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}^T$  от координаты  $z$  перед образованием магистральной трещины ( $t = 0,07t_f$ )

Функция памяти  $e_2$  (см. рис. 9,  $a-d$ ) показывает местоположение трещины в таблетке, серия рисунков, соответствующих разным временным слоям, позволяет проследить развитие трещины. Зона ослабленного материала вначале возникает в обширной зоне, где деформации в одном из главных направлений превышают значение деформации  $\varepsilon_f$ , соответствующее условному пределу прочности  $\sigma_f$ . В результате в этой зоне в одном из главных направлений, слабо отклоняющемся от направления вертикальной оси, возникает поле полных деформаций за вычетом температурных, имеющее глобальный максимум и близкий к нему локальный максимум, превышающие значение  $\varepsilon_f$ . Магистральная трещина возникает на месте этих максимумов. Деформации вдоль прямой  $r = r_b$  показаны на рис. 10.

Магистральная трещина образуется при достаточно низких температурах (на левой границе  $T \approx 400$  К), далее происходит незначительный по сравнению с первоначальным растрескиванием рост размеров трещины (см. рис. 9,  $a-d$ ).

Полярное направление при осесимметричной постановке задачи является выделенным; здесь, как и в квазиодномерном тесте, растрескивание происходит независимо от состояния таблетки в плоскости  $O_{rz}$ , однако наличие трещины в ней, изменяя прочностные свойства материала, влияет на все деформации и напряжения, поэтому на радиальной трещине можно видеть “след” магистральной трещины в плоскости. Значение деформации  $\varepsilon_{33}$  всегда является главным, в связи

с чем по рис. 9,  $e-k$  можно однозначно судить о виде трещины, чего нельзя утверждать о рис. 8 и рис. 9,  $a-d$ , где видим только элементы, “содержащие” трещину, но не направления трещин.

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  на различных временных слоях изображены на рис. 11,  $a-k$ . Отметим, что на виде полей напряжений  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$  сказывается наличие трещин во всех направлениях: полуокружности вблизи левой границы отделяют нерастрескавшуюся зону в направлении  $r$ , видны очертания трещины в плоскости  $O_{rz}$ . В момент времени  $t = 0,07t_f$  поперечная трещина еще не сформировалась, однако уже видна граница растрескавшегося в радиальном направлении материала. При  $t = 0,11t_f$  происходит активный рост поперечной трещины, вблизи ее “растущих” концов напряжения достигают наибольших значений. Затем этот рост замедляется, и наибольшие значения напряжений достигаются в концентраторах напряжений на границах обеих трещин: плоской и радиальной. Обратим внимание, что наличие трещин значительно разгружает материал. Мелкие трещины со временем сливаются с крупной. В областях, удаленных от трещин, напряжения близки к нулю, а максимумы напряжений имеют порядок  $10^7$  Па, что на 1–2 порядка меньше, чем без учета трещин (далее приведем распределения напряжений в случае решения аналогичной задачи без учета трещин).

Поля напряжений  $\sigma_{33}$  в те же самые моменты времени представлены на рис. 11,  $l-n$ . Особое внимание обратим на фронт распространения трещины — область наибольших напряжений на границе нерастрескавшейся области, заметную на всех изображениях (см. рис. 11,  $l-n$ ). В силу особого статуса полярного направления очертания фронта совпадают с областью, где  $e_3 = 1$  (см. рис. 9,  $e-k$ ). Наличие фронта соотносится с развитием трещины при растягивающих напряжениях; в нерастрескавшейся области имеют место сжимающие напряжения. Радиальная трещина, как и в квазиодномерном тесте, распространяется от границы таблетки к ее центру.

Для того чтобы показать, насколько сильно трещины меняют поведение топливной таблетки качественно и количественно, приведем поля напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{33}$  для чисто упругой задачи (рис. 12). Полученные наибольшие напряжения в области без учета трещин являются нефизическими, так как значительно превышают предел прочности диоксида урана. Наличие трещин снижает уровень напряжений в области, а также смещает положения максимумов напряжений с границ области к границам трещин. Снижение напряжений в области и приведение их значений к физически возможным является главным эффектом введения математической модели материала, учитывающей наличие трещин.

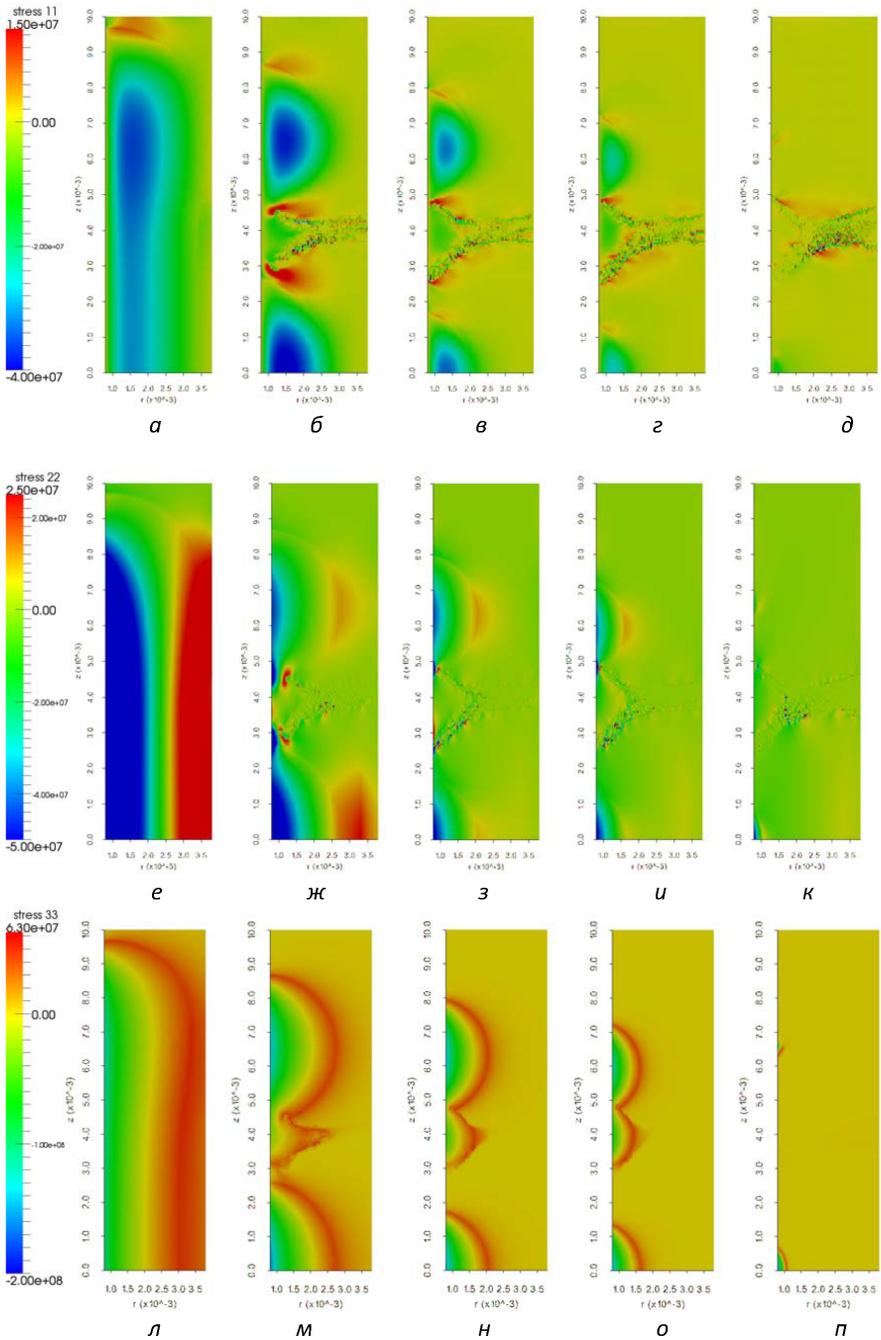
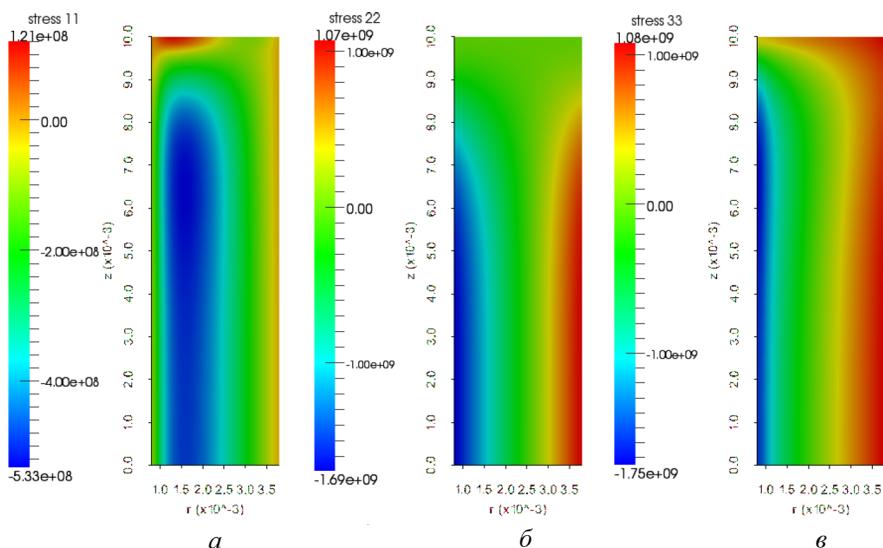


Рис. 11. Напряжения  $\sigma_{11}$  (а-д),  $\sigma_{22}$  (е-к) и  $\sigma_{33}$  (л-п) в моменты времени  $t \equiv 0,07t_f$  (а, е, л),  $t = 0,11t_f$  (б, ж, м),  $t = 0,17t_f$  (в, з, н),  $t = 0,25t_f$  (г, и, о) и  $t = t_f$  (д, к, п)



**Рис. 12.** Напряжения  $\sigma_{11}$  (*a*),  $\sigma_{22}$  (*б*),  $\sigma_{33}$  (*в*) на момент окончания расчета в модели без учета трещин

Отметим, что модель размазанных трещин позволяет продолжать расчет и после образования магистральной трещины без изменения сетки и геометрии области, когда на самом деле компоненты перемещений терпят разрыв и происходит образование новых границ. Безусловно, эта модель не способна описать саму трещину точно, однако она передает влияние трещины на состояние топливной таблетки.

**Заключение.** Для моделирования процесса разрушения ядерного топлива из диоксида урана рассмотрена модель размазанных трещин как наиболее просто интегрируемая в описание процессов с помощью математических моделей механики сплошной среды. Выбранная модель также является более выгодной в вычислительном отношении, нежели любая из моделей, непосредственно отслеживающих развитие магистральных трещин, в силу отсутствия необходимости перестроения сетки и задания новых граничных условий.

Построенная математическая модель разрушения может быть использована при моделировании хрупких материалов, когда необходимо учесть влияние наличия трещин в материале на его прочностные характеристики: способность передавать напряжения в определенном направлении, упругие коэффициенты, предел прочности.

Проведено математическое моделирование разрушения топливной таблетки в осесимметричной задаче, описывающей напряженно-деформированное состояние вертикального сечения таблетки, и двумерной задаче, описывающей горизонтальное сечение. Показано, что эффективный учет трещин в горизонтальном сечении таблетки дает

качественный результат, соответствующий имеющимся экспериментальным данным: размазанные трещины распространяются в радиальном направлении. Использование модели размазанных трещин в осесимметричной задаче привело к снижению уровня напряжений по сравнению с термоупругим случаем примерно на два порядка; качественные физические эффекты, такие как наличие фронта распространения трещины и наличие концентраторов на границе трещин, присутствуют.

Применение описанной модели размазанных трещин приводит к физически непротиворечивым результатам и позволяет эффективно учитывать наличие трещин в материале, не отслеживая разрывы физических характеристик, возникающих в реальной трещине.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты 12-01-00109, 14-01-31496.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Феодосьев В.И.* Сопrotивление материалов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.
2. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
3. *Non-linear Mechanics of Materials / J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, S. Forest, M. Blety.* Springer, 2010. 450 p.
4. *Lemaitre J.* A Course on Damage Mechanics. Springer, 1996. 228 p.
5. *Dahlblom O., Ottosen N.S.* Smeared Crack Analysis of Concrete Using a Nonlinear Fracture Model // Fracture Mechanics of Concrete. Nordic Seminar Held at Division of Building Materials. November 6. 1986. P. 31–46.
6. *Hillerborg A.* Application of the Fictitious Crack Model to Different Types of Materials. Lund Institute of Materials. Lund, Sweden. 1990. P. 95–102.
7. *Фрост Б.* ТВЭЛы ядерных реакторов: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1986. 248 с.
8. *Marchal N., Campos C., Garnier C.* Finite element simulation of Pellet-Cladding Interaction (PCI) in nuclear fuel rods // Computational Materials Science. 2009. No. 45. P. 821–826.
9. *Семерикова М.А.* Математическое моделирование разрушения хрупкого материала в связанной задаче термоупругости // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. Спец. вып. “Математическое моделирование в технике”. С. 187–196.
10. *Семерикова М.А.* Математическое моделирование хрупкого материала под действием тепловых нагрузок. // Молодежный научно-технический вестник. 2013. Вып. 3. URL: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/563884.html> (дата обращения: 05.05.2013).
11. *Архитектура* программной платформы сопровождения вычислительного эксперимента Теметос / М.П. Галанин и др. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 99. 23 с.
12. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002. 168 с.
13. *Bathe K.-J.* Finite Element Procedures. Prentice-Hall, 1996. 1037 p.
14. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.
15. *Fuel Analysis and Licensing Code:FALCON MOD01.* Vol. 1. Theoretical and Numerical Bases. Final Report, December 2004.

16. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
17. *Математическое моделирование разрушения хрупкого материала под действием тепловых нагрузок / М.П. Галанин и др. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.* 2013. № 100. 36 с.
18. *SCDAP/RELAP5/MOD3.1 Code Manual.* Vol. IV. MATPRO — A Library of Materials. Properties for Light-Water-Reactor Accident Analysis. Idaho, 1993. 681 p.
19. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.

## REFERENCES

- [1] Feodos'ev V.I. Soprotivlenie materialov [The structural resistance]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 1999. 592 p.
- [2] Kachanov L.M. Osnovy mekhaniki razrusheniya [Fundamentals of fracture mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 312 p.
- [3] Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L., Forest S., Bletry M. Non-linear mechanics of materials. Springer, 2010. 450 p.
- [4] Lemaitre J. A course on damage mechanics. Springer, 1996. 228 p.
- [5] Dahlblom O., Ottosen N.S. Smeared crack analysis of concrete using a nonlinear fracture model. *Proc. "Fracture Mechanics of Concrete: Nordic Seminar Held at Division of Building Materials"*. Sweden, Lund Institute of technology, November 6, 1986, pp. 31–46.
- [6] Hillerborg A. Application of the fictitious crack model to different types of materials. *Int. J. Fracture*, 1991, no. 51, pp. 95–102.
- [7] Frost Brian R. T. Nuclear fuel elements: design, fabrication, and performance. Pergamon Press, 1982. 275 p. (Russ. Ed.: Frost B. TVELy yadernykh reaktorov. Per. s angl., Reshetnikov F.G. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1982. 248 p.).
- [8] Marchal N., Campos C., Garnier C. Finite element simulation of Pellet-Cladding Interaction (PCI) in nuclear fuel rod. *Computational Materials Science*, 2009, no. 45, pp. 821–826.
- [9] Semerikova M.A. Mathematical simulation of fracture of brittle material in the coupled problem for thermoelasticity. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki., Spetsvyv. "Mathematical simulation in the technique"* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci., Spec. Issue "Mathematical Simulation in Technique"], 2012, pp. 187–196 (in Russ.).
- [10] Semerikova M.A. Mathematical simulation of brittle material under the thermal loads. *El. Zhur. "Molodezhnyy nauchno-tehnicheskiiy vestnik" MGTU im. N.E. Baumana* [El. J. "Youth Sci. & Techn. Herald" of BMSTU], 2013, no. 3 (in Russ.). Available at: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/563884.html> (accessed 05.05.2013).
- [11] Galanin M.P., Gorbunov-Posadov M.M., Ermakov A.V., Lukin V.V., Rodin A.S., Shapovalov K.L. Arkhitektura programmnoy platformy soprovozhdeniya vychislitel'nogo eksperimenta Temetos [Architecture of the software environment for numerical experiments Themetos]. Moscow, Keldysh Inst. Appl. Math., preprint no. 99, IPM im. M.V. Keldysha Publ., 2013. 23 p. Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-99> (accessed 18.04.2014).
- [12] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli termomekhaniki [Mathematical models of thermomechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 168 p.
- [13] Bathe K.-J. Finite element procedures. Prentice-Hall, 1996. 1037 p.
- [14] Zienkiewicz O. The finite element method in engineering science. London, McGraw-Hill, 1971. 521 p. (Russ. Ed.: Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike. Moscow, Mir Publ., 1975. 543 p.).

- [15] Fuel Analysis and Licensing Code: FALCON MOD01. Vol. 1. Theoretical and numerical bases. Final Report of Electric Power Research Institute (EPRI). Palo Alto, USA, December 2004.
- [16] Malinin N.N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975. 400 p.
- [17] Galanin M.P., Lukin V.V., Rodin A.S., Semerikova M.A. Matematicheskoe modelirovanie razrusheniya khрупкого материала pod deystviem teplovykh nagruzok [Mathematical modeling of the brittle material fracture under the thermal loads]. Moscow, Keldysh Inst. Appl. Math., preprint no. 100, IPM im. M.V. Keldysha Publ., 2013. 36 p. Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-100> (accessed 18.04.2014).
- [18] SCDAP/RELAP5/MOD3.1 Code Manual. Vol. IV. MATPRO — A library of materials properties for light-water-reactor accident analysis. Idaho, 1993. 681 p.
- [19] Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity. 3rd Ed. Tokyo, McGraw-Hill, 1970. 567 p. (Russ. Ed.: Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. Teoriya uprugosti. Moscow, Nauka Publ., 1975. 576 p.).

Статья поступила в редакцию 18.04.2014

Галанин Михаил Павлович — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области математического моделирования многомерных нестационарных электродинамических и теплофизических процессов в сплошных средах.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

Galanin M.P. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, head of the Department of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of mathematical simulation of multi-dimensional non-stationary electrodynamic and thermophysical processes in continuous media.

Keldysh IPM RAS, Miusskaya pl. 4, Moscow, 125047 Russian Federation.

Лукин Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 25 научных работ в области математического моделирования астрофизических процессов, численных методов магнитной гидродинамики и теории переноса излучения, а также высокопроизводительных вычислений.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

Lukin V.V. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), researcher of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, assoc. professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 25 publications in the field of mathematical simulation of astrophysical processes, numerical methods for magnetohydrodynamics and radiation transfer theory, high-performance computing.

Keldysh IPM RAS, Miusskaya pl. 4, Moscow, 125047 Russian Federation.

Родин Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Автор 30 научных работ в области математического моделирования электродинамического ускорения тел, численных методов термомеханики, теории упругости, пластичности, прочности конструкций. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

Rodin A.S. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), researcher of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences. Author of 30 publications in the field of mathematical simulation of electrodynamic acceleration of bodies, numerical methods for thermal mechanics, theory of elasticity, plasticity, strength of structures.  
Keldysh IPM RAS, Miusskaya pl. 4, Moscow, 125047 Russian Federation.

Семерикова Мария Андреевна — инженер Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Автор научных работ в области моделирования разрушения хрупких материалов.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

Semerikova M.A. — engineer of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences. Author of some publications in the field of fracture modeling for brittle materials.

Keldysh IPM RAS, Miusskaya pl. 4, Moscow, 125047 Russian Federation.