

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ: СОГЛАСОВАННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ И ЛАБОРАТОРНЫЕ МОДЕЛИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Ю.Д. Чашечкин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Москва, Российская Федерация
e-mail: chakin@ipmnet.ru; yulidch@gmail.com

Приведены результаты согласованного аналитического, численного и лабораторного моделирования динамики течений и их внутренней структуры. Математическую основу работы составляет фундаментальная система уравнений механики неоднородных жидкостей, включающая в себя дифференциальные уравнения неразрывности, баланса импульса, энергии, диффузии компонентов и замыкающее уравнение состояния, которая анализируется с учетом условий совместности и наблюдаемости входящих физических величин. Симметрии фундаментальной системы соответствуют основным принципам физики в отличие от многих редуцированных и конститутивных моделей. Приведена полная математическая классификация компонентов периодических крупно- и мелкомасштабных течений. В качестве примера рассмотрены полное решение задачи описания двумерных течений, индуцированных диффузией на топографии, и линеаризованная теория периодических внутренних волн. Изложены физическое и математическое содержание понятий “механическое движение” и “течение жидкости”, требования к измерительной технике и методике, обеспечивающие выполнение условия полноты эксперимента.

Ключевые слова: фундаментальная система, полное решение, стратификация, лабораторный эксперимент, тонкая структура, динамика.

FLUID MECHANICS: CONSISTENT ANALYTICAL, NUMERICAL AND LABORATORY MODELS OF STRATIFIED FLOWS

Yu.D. Chashechkin

Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation
e-mail: chakin@ipmnet.ru; yulidch@gmail.com

The results of the consistent analytical, numerical and laboratory modeling of dynamics and internal structure of flows are presented. A fundamental set of equations of the inhomogeneous fluids mechanics is mathematical basis. This set includes the differential equations of continuity, momentum balance, energy, diffusion components and closing equation of state. This simultaneous equations is analyzed under accounting of compatibility and observability conditions of incoming physical quantities. Symmetries of the fundamental set correspond to the basic principles of physics in contrast to many reduced and constitutive models. A complete mathematical classification for the components of periodic large- and small-scales flows is given. As an example, the full solution of definition problem for two-dimensional flows induced by diffusion on the topography and the linearized theory of periodic internal waves are considered. We discuss the physical and mathematical content of the concepts of "mechanical motion" and the "fluid flow", following requirements for measurement technique and methodology in order to ensure the fulfillment of the condition for the experiment efficiency.

Keywords: fundamental set, full solution, stratification, laboratory experiment, fine structure, dynamics.

Основу современного математического описания течений жидкостей составляют законы сохранения, первый из которых — закон сохранения импульса — сформулировал Р. Декарт в 1644 г. [1]. Закон сохранения механической энергии (“живой силы”) спустя сорок два года представил в полемической заметке Г.В. Лейбниц [2]. Одновременно с разработкой общих принципов и Декарт, и Лейбниц развивали математический анализ как инструмент описания физики явлений, формализовали геометрию. Современный подход к построению математических моделей открыли работы Ж.Л. Даламбера, в которых для описания физических явлений впервые были использованы уравнения в частных производных и получено уравнение неразрывности — дифференциальная форма закона сохранения плотности сплошной среды [3].

Статью, содержащую первую замкнутую систему уравнений гидродинамики, Л. Эйлер закончил утверждением: “. . . Все, что содержит Теория жидкостей, заключено в двух приведенных выше уравнениях (§ 34), так что нам не хватает для продолжения этих исследований не законов Механики, а только Анализа, который пока еще недостаточно развит для этой цели” [4]. До настоящего времени уравнения Эйлера считаются точными, хотя уже к моменту выхода статьи были известны парадоксы теории потенциальных течений, ограничивающие возможности их использования. Сохраняется неизменным и понятие “жидкая частица” — малый элемент среды, движение которого характеризуется *скоростью* в фиксированной системе координат [4]. Хотя в основу современной теоретической гидродинамики положены фундаментальные законы сохранения, а не понятие “сила, действующая на частицу”, интерес к анализу уравнений динамики идеальной жидкости продолжает сохраняться [4].

Очевидная противоречивость результатов наблюдений движений тел в сопротивляющейся среде и теории течений идеальной жидкости (парадокс Даламбера) привела к необходимости учета внутреннего трения. Новые уравнения первым получил К. Навье, основываясь на идеях П.С. Лапласа о молекулярном строении вещества [5], затем еще несколько французских ученых, и окончательно, более чем через двадцать лет, — Дж. Стокс в модели жидкости, как сплошной среды [6]. Все найденные Стоксом точные одномерные решения сохраняют свою ценность до настоящего времени [7]. Однако вопрос разрешимости трехмерных уравнений Навье–Стокса в приближении однородной жидкости все еще остается открытым.

По мере уточнения механизмов переноса теплоты и вещества, термодинамики и кинетики переноса вещества, теория течений жидкости становилась все более развитой и сложной. Наряду с динамическими,

широкое развитие получило статистическое описание течений, которое проявилось в разработке многочисленных теорий турбулентности, незамкнутых и не согласующихся между собой [7].

В конце XIX в. начали формироваться представления о необходимости учета влияния состава среды на течения сложных жидкостей, плотность которых зависит от температуры и концентрации растворенных веществ или взвешенных частиц. Связи параметров среды задаются *уравнениями состояния*, выражающими зависимость плотности ρ и внутренней энергии e от других термодинамических величин — давления P , температуры T , солёности S : $\rho = \rho(T, S, P)$; $e = e(T, S, P)$. Особое внимание анализу свойств массы и плотности как физических величин, определению вида уравнений состояния газов и жидкостей уделял Д.И. Менделеев [8, 9].

В силу малости вариаций влияние неоднородности плотности длительное время рассматривалось как малая добавка, “подправляющая” расчеты течений однородной среды. Однако постепенно стали накапливаться опытные данные, указывающие на не только количественные, но и качественные отличия динамики однородных и многокомпонентных сред в естественных условиях и промышленных установках. Течения сложных жидкостей включают в себя различные виды волн и характеризуются структурами, отсутствующими в однородной среде.

По мере развития оптических средств наблюдений регулярные и хаотические структуры природных систем стали регистрироваться во всем доступном для наблюдения диапазоне пространственных масштабов — от световых лет в межзвездной среде до микронов в лабораторных течениях. В качестве примера упорядоченных кольцевых и радиальных структур разного масштаба приведены фотографии газового облака после раздувания красного гиганта UCam в созвездии Жирафа диаметром 1 а. е. (рис. 1) и высыхающей капли суспензии наночастиц песка диаметром 0,63 см [10]. Теория формирования структур еще не разработана, что не позволяет оценивать степень их влияния на динамику течений.

В последние годы теоретическая гидродинамика развивается одновременно в нескольких направлениях: уточняется вид уравнений, образующих фундаментальную систему; находятся частные решения, описывающие линейные и нелинейные волны, струи, вихри; создаются новые конститутивные модели, среди которых наибольшее распространение получили различные версии теории турбулентности; развиваются численные подходы. Хотя каждая модель позволяет описывать свойства изучаемого вида течения в некотором диапазоне параметров, в целом они не обладают необходимой степенью полноты и универсальности.

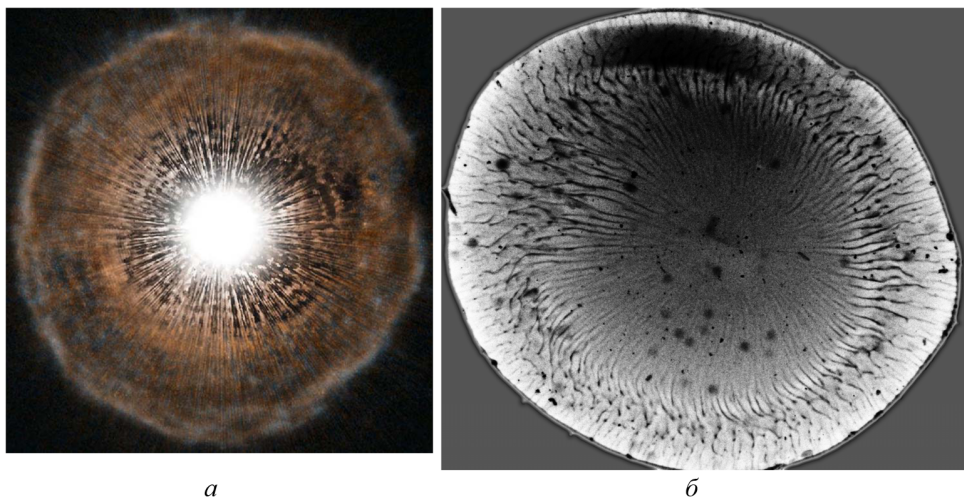


Рис. 1. Регулярные структуры течений в оболочке звезды USam (а) и в высыхающей капле суспензии наночастиц песка (б) [10]

Точность гидродинамических измерений существенно отстает и от потребностей практики, и от стандартов определения параметров движения твердого тела. По мере развития экономики расширяется список таких нерешенных проблемных задач, как прогноз погоды, идентификация предвестников перехода процессов в атмосфере и океане в катастрофические формы, разработка методов эффективного управления течениями в технологических аппаратах, двигателях и движителях.

Расхождение расчетов и наблюдений течений указывает на необходимость более тщательного рассмотрения теоретических основ механики сплошной среды, методов построения и интерпретации решений, степени реализуемости необходимого свойства рациональной теории — наблюдаемости физических величин, входящих в математические выражения, сформулированного Дж.К. Максвеллом [11].

Сравнительная аксиоматика гидродинамики и механики твердого тела. Теоретическая гидродинамика базируется на понятиях “число”, “пространство”, “сплошная среда, погруженная в это пространство” и “течения” — изменения динамического состояния и физических параметров жидкостей и газов. Математический базис теории составляет понятие “вещественное число”, свойства которого задаются аксиоматически [12].

Понятия “пространство” и “время” в классической механике вводятся априорно. Они предполагаются однородными, изотропными, независимыми друг от друга, собственно материи и протекающих материальных процессов. Основной характеристикой физических тел в механике является *масса* — мера инерции, гравитационного притяжения и количества вещества.

В физической механике принимается, что пространство — место-положение тел, является метрическим и трехмерным, допускающим использование декартовой системы координат (евклидовым). Введением системы координат каждой точке ставится в соответствие набор вещественных чисел, минимальное число элементов которого характеризует размерность пространства. Стандартный базис евклидова пространства задается положением начала координат O и ортами e_1, e_2, e_3 .

Аксиоматика векторных множеств включает в себя операции сложения и умножения, внутренней композиции (сложения векторов), ассоциативности, коммутативности с правилом алгебраического сложения (вычитания) векторов, ассоциативности произведения множителей; умножения на единицу, дистрибутивности и правило **внешней композиции** — сохранения в векторном пространстве произведения скаляра и вектора. Именно последнее условие обеспечивает внутреннее единство теоретической механики твердого тела, абстрактной и прикладной математики, основанное на единстве физического и математического определения понятия “движение материальной точки” — модели твердого тела. Параметр движения — скалярная величина время.

Физическое определение механического движения базируется на регистрации расстояний между телами, характеризующих собственной массой M_i , и их изменений во времени. При этом некоторые тела, расстояния между которыми остаются фиксированными, образуют базис, в нем и регистрируется положение перемещающегося тела (материальной точки). Расстояния — инварианты, их величины не зависят от выбора системы координат, а значения при переходе от одной системы к другой преобразуются в соответствии с выбранными шкалами, которые определяются системами мер. Стандарты длины, времени и массы имеют достаточно высокую точность, обеспечивающую функционирование таких сложных инструментов, как системы глобального позиционирования.

Математические определения движения основаны на введении абсолютной системы координат с центром в точке O , в которой радиус-вектор r задает положение материальной точки массой M в начальный и последующие моменты времени.

В **кинематическом определении** движение в неподвижном пространстве \mathbb{R}^3 описывается траекторией $S_t(x, y, z)$, огибающей концы радиус-векторов r положения материальной точки, и характеризуется скоростью $\mathbf{v} = \frac{dS_t}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dS} = \boldsymbol{\tau} \frac{dS_t}{dt}$ и ускорением $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ ($\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, задающий направление касательной к траектории S_t).

В *геометрическом определении* движение — один из видов непрерывного преобразования пространства в себя с параметром t , при котором сохраняются расстояния между объектами и их относительное расположение [12]. При этом определитель, составленный из коэффициентов матрицы преобразования координат a_{ik} , равен $\|a_{ik}\| = +1$. Преобразование с определителем $\|a_{ik}\| = -1$, не сохраняющее ориентацию фигур, характеризует отражение относительно некоторой оси. Кинематическое и геометрическое определения движения эквивалентны.

В *динамическом определении* движение тела массой M характеризуется импульсом $\mathbf{p}(x_1, x_2, x_3)$ и энергией $E = \mathbf{p}^2/(2M)$.

Декомпозиция движений в механике включает в себя прямолинейное перемещение со скоростью \mathbf{v}_t и (или) вращение вокруг мгновенного центра с угловой скоростью Ω , $\delta \mathbf{r} = \mathbf{v}_t \delta t + \Omega \times \delta \mathbf{r}$. Движению соответствует группа преобразований, состоящая из независимых подгрупп перемещений и вращений (коммутативная специальная ортогональная $SO(2)$ в двумерном пространстве и специальная некоммутирующая $SO(3)$ в трехмерном). Преобразования, задаваемые группой движений, изучает элементарная геометрия.

В силу свойства внешней композиции скорость \mathbf{v} и импульс $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$, которые отличаются скалярным множителем M , принадлежат одному векторному пространству. Следовательно, скорости, определенные математически и кинематически $\mathbf{v} = \tau \frac{dS_t}{dt}$ или геометрически и динамически $\mathbf{v}_d = \mathbf{p}/M$ (как отношение двух инвариантов) тождественны.

В силу свойств векторного пространства перечисленные определения движения твердого тела — физическое, кинематическое, геометрическое и динамическое — эквивалентны. Именно единство определения разных форм движения связывает инвариантные свойства пространства (однородность, изотропность) с законами сохранения (теорема Нетер). Все параметры движения — координаты, скорость, ускорение, импульс, энергия — наблюдаемы, т.е. измеримы независимыми способами с объективным контролем погрешности и сводятся к измерениям расстояний, временных интервалов и массы, для которых существуют прецизионные образцы — эталоны.

Движения тел описываются на основе законов Ньютона [13] в алгебрах вещественных, комплексных чисел и кватернионов (последнее предпочтительно при символьном программировании задач навигации). Описание динамики движений также проводится в фазовом пространстве (скоростей, импульсов или волновых чисел). Для полного описания движений используется расширенное шестимерное пространство, объединяющее пространства координат и скоростей.

Модели макроскопической гидродинамики базируются на концепции “сплошной среды”, заполняющей часть или все пространство, которая устанавливает возможность использования непрерывных функций для описания течений во всем диапазоне масштабов. “Сплошная среда”, включающая в себя вещества в различных фазовых состояниях (жидкость, газ, плазма), описывается величинами двойственной природы — механическими (характеризующими инерционные и гравитационные свойства) и атомно-молекулярными, определяющими термодинамические и кинетические параметры.

Традиционно сплошная среда характеризуется плотностью $\rho(x_1, x_2, x_3)$, давлением $P(x_1, x_2, x_3)$, концентрацией растворенных или взвешенных частиц $S_i(x_1, x_2, x_3)$, температурой $T(x_1, x_2, x_3)$, термодинамическими потенциалами и их производными — величинами, имеющими ясный физический смысл и доступными для наблюдения. Такая двойственность существенно усложняет описание течений — самосогласованных изменений физических полей, характеризующих динамику среды. Основной параметр — инвариант течения — импульс единицы объема среды \mathbf{p} , проявляющийся в силовом действии потока на погруженные тела или в расходе жидкости в выбранном сечении потока.

Важное свойство сплошной среды — текучесть (способность деформироваться при сколь угодно малых воздействиях). Согласно определению Коши–Гельмгольца [14], декомпозиция скорости жидкости \mathbf{v} кроме перемещения и вращения учитывает возможность изменения формы элемента среды

$$v_i(r_r + \delta r_k) = v_i(r_k) + \varepsilon_{ijk} \Omega_j \delta r_k + \frac{\partial v_i}{\partial x_l} \delta r_l, \quad (1)$$

где ε_{ijk} — единичный антисимметричный тензор третьего ранга. Дополнительный сдвиговый член уничтожает независимость действия операторов перемещения и вращения, изменяет групповые свойства оператора движения в целом.

Отличие декомпозиций “движения” и “течения” отражает различие пространств \mathbb{R}^3 (движения которого образуют группу) и погруженной в него среды (кинематика течения содержит оператор сдвига). Для сохранения этого различия при определении понятия “течение жидкости”, кроме кинематических параметров (координат, скоростей и ускорений) необходимы дополнительные параметры. Кроме того, появление оператора сдвига исключает тождественность кинематического и динамического определения скорости, поскольку плотность жидкости — независимая переменная величина, функция координат и времени $\rho = \rho(x, y, z, t)$, а не постоянная масса материальной точки.

Для описания движения достаточно использовать трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 (неизменная масса M тела — параметр, связывающий кинематически определенную скорость \mathbf{v} с импульсом $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$). Для описания течений кроме координат пространства необходимо привлекать дополнительные физические величины, характеризующие термодинамические параметры среды, и учитывать их изменения, т.е. размерность расширенного пространства задач гидродинамики более высокая, чем в механике твердого тела

Переход в пространство более высокой размерности существенно меняет технику математического описания течений и физическое содержание математических величин, в частности кинематической завихренности $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$, темп генерации которой определяется не пространственно-временными параметрами, а градиентами термодинамических величин $d\boldsymbol{\omega}/dt = \nabla P \times \nabla \rho^{-1}$ (теорема Бьеркнеса).

В интерпретации Гельмгольца завихренность жидкости $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}$ отождествляется с вращением элементов среды [14]. Различие понятий “вращение части сплошной среды” и “завихренность” (как мера деформации частицы жидкости) отмечали еще Дж. Бертран и С. Ли в конце XIX в. Однако в силу недостаточного развития некоторых разделов математики и техники гидродинамического эксперимента их идеи не получили конструктивного развития.

Одна из скрытых трудностей описания течений состоит в том, что предположения однородности, непрерывности и деформируемости сплошной среды исключают возможность идентификации отдельной “частицы”, которая не имеет физически различимых границ. При стремлении размеров к нулю масса “частицы” также неограниченно убывает и объект изучения теряется.

В эксперименте для идентификации течений применяются маркеры (твердые частицы, газовые пузырьки, капельки несмешивающихся жидкостей), обладающие неизменными индивидуальными признаками, которые позволяют отслеживать их перемещения в потоке. Появление дополнительного физического объекта — маркера — усложняет поведение новой, более сложной многокомпонентной среды. Декарт отмечал, что макроскопическое твердое тело не только переносится потоком, но и закручивается течением вокруг собственной оси [1]. Вращающееся тело дополнительно возмущает окружающую среду. Слишком малый маркер оказывается вовлеченным в броуновское движение. На перенос растворимой примеси влияют эффекты диффузии, на динамику капель несмешивающихся жидкостей — эффекты поверхностного натяжения и диффузии.

Совместное действие многих факторов приводит к неконтролируемому отличию движения маркеров от течения окружающей среды, в которую они погружены. Общепринятая гипотеза “пассивности”

примесей не находит подтверждения в тонких опытах по изучению перераспределений примесей и в волнах, в которых первоначально однородная суспензия приобретает тонкую структуру [15], и в вихрях, где пятно краски трансформируется в спиральные рукава, винтовые линии и расщепляется на отдельные волокна [16].

Отсутствие критериев идентификации “жидкой частицы” означает, что “скорость жидкости” — производное математическое понятие, а не физически наблюдаемый параметр течения, для которого можно указать методику оценки погрешности в ходе опыта и возможность ее уменьшения до заданного значения. Необходимость выполнения критерия наблюдаемости физических величин отмечали Дж.Г. Стокс, Дж.К. Максвелл, О. Рейнольдс и другие гидродинамики, однако анализ условий наблюдаемости “жидкой частицы” ранее не проводился.

Наблюдаемый параметр течения — импульс \mathbf{p} , который может оцениваться по силовому действию движущейся жидкости на препятствие и по расходу жидкости через выбранное сечение потока. Два независимых метода определения позволяют строить процедуру непосредственной оценки погрешности измерения. Скорость жидкости определяется как отношение двух наблюдаемых переменных величин: импульса и плотности жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\rho$ в выбранной системе координат. При этом “движение” (преобразование системы координат в себя) теряет эквивалентность с “течением” (потоком импульса среды).

Еще одно важное следствие различия понятий “движение” и “течение” заключается в следующем. В механике твердого тела существует универсальный временной масштаб, задаваемый отношением линейного масштаба (расстояния, или размера тела) к скорости. В течениях жидкости, где происходит обмен энергией между внешними (механическими) и внутренними (атомно-молекулярными) степенями свободы, появляется дополнительный временной масштаб, характеризующий его скорость, который может быть и большим (влияние диффузионных эффектов) и достаточно малым (уничтожение свободной поверхности и быстрое освобождение доступной потенциальной энергии). Указанный свободный параметр затрудняет разработку универсальных методов описания течений.

К числу наиболее распространенных параметров, определяющих механические, термодинамические и кинетические свойства жидкости, относятся термодинамические потенциалы (внутренняя энергия e , энтальпия, свободная энергия и потенциал Гиббса), которые характеризуются параметрами состояния (плотность ρ , давление P , температура T , энтропия s , концентрация i -й примеси S_i). С учетом удобства описания выделенными полагаются плотность $\rho = \rho(p, T, S_i)$

и внутренняя энергия $e = e(p, T, S_i)$ — основные формы уравнения состояния среды. Вследствие деформации жидкости в течениях происходит переход части энергии механического движения во внутреннюю энергию, и наоборот. Такие переходы при условиях, когда проявляются короткодействующие силы атомно-молекулярной природы, происходят достаточно быстро. Импульсное воздействие меняет картину течения и порождает новые высокочастотные компоненты — короткие капиллярные волны и звук (например, при падении капель в жидкость [17]). Таким образом, в набор наблюдаемых параметров течения входят вектор импульса p единицы объема среды, термодинамические величины (плотность, давление, температура, концентрация растворенных веществ), диссипативные и кинетические параметры. В течениях все они изменяются под действием и крупномасштабных процессов механической природы, и тонких компонент при участии атомно-молекулярных процессов.

Динамическое определение понятия “течение”. Физическое определение течения жидкости — перенос импульса p , сопровождающийся самосогласованными изменениями других физических величин. Число физических величин обусловлено видом модели процесса и системы фундаментальных уравнений, выражающих законы сохранения вещества, энергии и переноса импульса. Среда характеризуется уравнением состояния, термодинамическими параметрами и диссипативными (кинетическими) коэффициентами, определяющими вязкость и молекулярный перенос теплоты или вещества (в упрощенном описании не учитываются термо- и бародиффузия, а также другие перекрестные эффекты).

Определяющие уравнения, составляющие фундаментальную систему, были приведены еще в работе [7], и в дальнейшем неоднократно повторялись во многих монографиях и учебниках. Однако во всех из них в качестве базовой характеристики течения выбрана скорость жидкости v — ненаблюдаемая величина (которой авторы работы [7] придали смысл импульса единицы массы жидкости, в то время как остальные величины взяты для единицы объема). Для устранения путаницы целесообразно относить все величины, в том числе и импульс p_i , к единице объема. Тогда фундаментальный набор законов сохранения для жидкости с выбранным уравнением состояния включает в себя:

1) уравнение неразрывности, сохраняющее форму, которую ему придали Даламбер и Эйлер [3, 4]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0; \quad (2)$$

2) уравнение Навье – Стокса в векторной записи

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha i}}{\partial x_\alpha} = \rho f_i; \quad (3)$$

3) уравнение Фурье – переноса полной энергии (внутренняя энергия e , кинетическая энергия движения и потенциальная энергия среды в полях внешних сил) элементарного объема жидкости ε

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon p_i + J^{i(\varepsilon)}) = 0. \quad (4)$$

Баланс компонентов определяется обобщенным уравнением Фика

$$\frac{\partial \rho_{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (p_{i,n} + J_{(n)}^i) = 0; \quad \rho = \sum \rho_{(n)}, \quad (5)$$

где $\Pi_{ij} = p_i p_j / \rho + P \delta_{ij} - \sigma_{ij}$ – тензор потока импульса; σ_{ij} – тензор вязких напряжений; $p_{i,n}$ – импульс i -й примеси; f_i – внешняя сила (силы плавучести и сила Кориолиса).

При расчете потока энергии, когда необходимо учитывать изменение внутренней энергии, используется второе начало термодинамики для необратимых процессов – условие положительной определенности производства энтропии $P^{(s)}$, которое в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (s p_i + J^{(s)}) = P^{(s)}, \quad (6)$$

где s – энтропия единицы массы; $\mathbf{J}^{(\varepsilon)}$, $\mathbf{J}_{(n)}$ и $\mathbf{J}^{(s)}$ – потоки энергии, n -й примеси и энтропии; $P^{(s)}$ – производство энтропии.

Система уравнений (1)–(5) записана в предположении существования локального термодинамического равновесия, учитывающего, что характерные атомно-молекулярные процессы быстрые и времена установления равновесия существенно меньше времен механических процессов, формирующих градиенты термодинамических величин. В предположении малости градиентов определяющие уравнения системы (2)–(6) принимают традиционную форму [7]:

$$\rho = \rho(P, S, T), \quad \frac{\partial \rho}{dt} + \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial (p_i)}{\partial t} + \left(\frac{p_j}{\rho} \nabla_j \right) p_i = -\nabla_i P + \rho g_i + \nu \Delta (p_i) + 2\varepsilon_{ijk} p_j \Omega_k + f_i; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \nabla_j (p_j T) = \Delta (\kappa_T \rho T) + Q_T; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho S_i}{\partial t} + \nabla_j (p_j S_i) = \Delta (\kappa_{S_i} \rho S_i) + Q_{S_i}. \quad (10)$$

Здесь g_i — ускорение свободного падения; Ω_k — угловая скорость глобального вращения жидкости; f_i — внешняя сила; ν , κ_T , κ_S — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии; Q_T , Q_{S_i} — плотности источников температуры и соли. Скорость жидкости $v_i = p_i/\rho$ определена только динамически, как отношение двух инвариантных величин. Вид уравнения состояния выбирается с учетом состава среды и характера изучаемых течений. Система (7)–(10) включает в себя диссипацию импульса, но не учитывает влияние процессов с быстрыми изменениями внутренней энергии.

Анализ системы (7)–(10) обычно проводится без учета условия совместности, определяющего ранг нелинейной системы, порядок линейной версии, степень характеристического (дисперсионного) уравнения и, следовательно, число независимых функций, составляющих полное решение линеаризованной задачи. В силу сложившейся исторической традиции система (7)–(10) существенно упрощается или преобразуется с заменой базовых уравнений конститутивными. Степени соответствия преобразованных систем исходной, как правило, не изучаются.

Для решения отдельных задач базовая система уравнений дополняется физически обоснованными начальными и граничными условиями, учитывающими затухание движений в диссипативной среде, условия непротекания и прилипания жидкости к твердым поверхностям, постоянства напряжений на разных сторонах поверхности раздела жидких сред.

Симметрии фундаментальной системы уравнений. Система (7)–(10) определена, самосогласованна и разрешима. Согласно условию совместности, эта система имеет высокий ранг и размерность расширенного пространства задачи.

Проведенные расчеты непрерывных симметрий показали, что система (7)–(10) инвариантна относительно точечной десятипараметрической группы Галилея с операторами

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \partial_t; & X_2 &= \partial_x; & X_3 &= \partial_y; \\
 X_4 &= \partial_z; & X_5 &= y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v; \\
 X_6 &= \left(z + \frac{gt^2}{2}\right) \partial_x - x\partial_z + (w + gt) \partial_u - u\partial_w; \\
 X_7 &= \left(z + \frac{gt^2}{2}\right) \partial_y - y\partial_z + (w + gt) \partial_v - v\partial_w; \\
 X_8 &= t\partial_x + \partial_u; & X_9 &= t\partial_y + \partial_v; & X_{10} &= t\partial_z + \partial_w.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Набор симметрий (11) включает в себя генераторы групп сдвигов по времени и пространству, вращения в горизонтальной плоскости,

вращения в системе координат, движущейся относительно нее с ускорением свободного падения (существование таких симметрий – следствие однородности поля силы тяжести, пространство в указанной системе координат оказывается изотропным) [18]. В набор (11) также входят генераторы групп преобразований Галилея, обеспечивающие сохранение вида системы при переходе в новую систему координат, движущуюся равномерно и прямолинейно относительно исходной, которые являются следствием вида левых частей уравнений механики, содержащих полные временные производные первого порядка. Набор (11) отражает “первые принципы”, вытекающие из однородности пространства и времени, изотропии пространства и эквивалентности инерциальных систем отсчета.

В пренебрежении эффектами сжимаемости, переноса температуры и примеси уравнение диффузии выпадает, уравнение переноса теплоты удовлетворяется тождественно и для течений в однородном поле силы тяжести с потенциалом Φ система (7)–(10) принимает стандартный вид уравнений Навье – Стокса [7] в приближении однородной жидкости:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}; \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad \mathbf{g} = \nabla \Phi.$$

Набор симметрий системы (12), найденный в некоторых работах, включает в себя следующие операторы:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t; \quad X_2 = \partial_x; \quad X_3 = \partial_y; \quad X_4 = \partial_z; \\ Y_{\chi_2} &= \chi_2 \partial_y + \dot{\chi}_2 \partial_v - \rho \ddot{\chi}_2 y \partial_p; \quad Y_{\chi_1} = \chi_1 \partial_x + \dot{\chi}_1 \partial_u - \rho \ddot{\chi}_1 x \partial_p; \\ Y_{\chi_3} &= \chi_3 \partial_z + \dot{\chi}_3 \partial_w - \rho \ddot{\chi}_3 z \partial_p; \\ Z_1^* &= 2t \partial_t + r \partial_r - v \partial_v - 2p' \partial_{p'}; \\ Y_\pi &= \pi(t) \partial_p; \quad p' = p + \pi(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Набор симметрий (13) заметно расширен по сравнению с набором (11). Наряду с сохранением операторов пространственно-временных сдвигов, произошло существенное изменение вида операторов $Y_{\chi_1} - Y_{\chi_3}$, свидетельствующее о расширении действия принципа Галилея. Здесь вид уравнений сохраняется при переходе в ускоренно движущиеся системы координат.

В наборе (13) есть оператор растяжения Z_1^* , отсутствующий в наборе (11). Его вид объясняет эффективность приближения пограничного слоя – основы современных моделей расчета обтекания препятствий. Одновременно в наборе (13) появилась бесконечномерная подалгебра сдвигов давления $X_\pi = \pi(t) \partial_p$, обосновывающая универсальность

действия закона Бернулли, который очевидно не выполняется в энергонагруженных процессах.

Существенное расширение симметрий уравнений Навье–Стокса (12) свидетельствует о потере их эквивалентности в фундаментальной системе (7)–(10). Разрыв связей термодинамических и механических свойств течений жидкости приближением $\rho = \text{const}$ приводит к потере физической корректности преобразованной системы (12), в которой исчезают различия пространства и погруженной в него среды.

В приближении однородной плотности система координат пространства и погруженная в него среда, связанные положительной константой, отождествляются. Одно и то же общее пространство допускает и движение (преобразование в себя с сохранением расстояний), и течение (преобразование пространства со сдвигом скорости (1)), т.е. одновременно приобретает свойства абсолютно жесткого и деформируемого тела. Потеря единственности определения фундаментального понятия исключает возможность построения замкнутой внутренне непротиворечивой теории трехмерных течений однородной жидкости.

Анализ линеаризованных систем методами теории сингулярных возмущений в случае слабодиссипативных сред показывает, что все корни дисперсионного уравнения фундаментальной системы (7)–(10) оказываются различными, а в приближении однородной жидкости (12) — кратными [19].

Применение статистического осреднения и других способов построения конститутивных уравнений меняет симметрии анализируемых систем, что указывает на их неприводимость к фундаментальной форме [18]. Смена симметрий также отражает изменение свойств физических величин, обозначаемых одинаковыми символами. Конститутивные модели (теории турбулентности) обычно характеризуются бедными группами симметрий, что указывает на ограниченность их прогностического потенциала [19].

Общие свойства решения характеризуют ранг полной системы (например, порядок наивысшей производной при возможности сведения системы к уравнению для одной переменной), порядок ее линеаризованной версии или степень соответствующего характеристического (дисперсионного) уравнения. Ранг системы определяет размерность расширенного пространства задачи, объединяющего конфигурационное пространство, пространства импульсов (скоростей или волновых векторов), времени, энергии и других варьируемых физических величин. Качественно можно указать, что течение как преобразование расширенного пространства задачи высокой размерности в себя более сложное понятие, чем движение — преобразование в себя трехмерного

евклидова пространства с сохранением расстояний и относительного расположения объектов.

Собственные масштабы фундаментальной системы уравнений.

Системы уравнений с граничными условиями в механике жидкостей характеризуются набором собственных масштабов, описывающих среду (как правило, стратифицированную) и протекающие процессы. Среда с линейным или экспоненциальным профилем плотности определяется масштабом $\Lambda = |d \ln \rho / dz|^{-1}$, частотой $N = \sqrt{g/\Lambda}$ и периодом плавучести $T_b = 2\pi/N$.

Граничные условия и уравнения системы с размерными коэффициентами определяют набор масштабов длины геометрической и динамической природы. Большой масштаб Λ характеризуется исходной стратификацией (обычно слабой) и геометрией течения (размером препятствия L). Скорость источника U задает длину гравитационных поверхностных ($\lambda_s = 2\pi U^2/g$), внутренних ($\lambda_i = UT_b$) и других видов вынужденных волн.

Микромасштабы диссипативной природы определяют поперечные размеры тонкоструктурных компонентов в картинах полей скорости $\delta_N^\nu = \sqrt{\nu/N}$, температуры $\delta_N^{\kappa_T} = \sqrt{\kappa_T/N}$ и солёности $\delta_N^{\kappa_S} = \sqrt{\kappa_S/N}$ (аналоги масштаба Стокса $\delta_N^\omega = \sqrt{\omega/N}$ [7]), а также масштабы типа $\delta_\Omega^\nu = \sqrt{\nu/\Omega}$ во вращающихся жидкостях. Компоненты структур с масштабами Прандтля и Пекле ($\delta_U^\nu = \nu/U$, $\delta_U^{\kappa_T} = \kappa_T/U$, $\delta_U^{\kappa_S} = \kappa_S/U$) выражены в струях и следах. Масштабный анализ задачи играет важную роль при разработке методики полного эксперимента: макромасштабы характеризуют размер области наблюдения, которая должна содержать все изучаемые компоненты течения, а микромасштабы – пространственное разрешение регистрирующих инструментов. Последнее условие часто не соблюдается.

Отношения макро- и микромасштабов, задающие традиционные безразмерные комплексы (число Рейнольдса $Re = UL/\nu = L/\delta_U^\nu \gg 1$ и числа Пекле по температуре и солёности $Pe_T = UL/\kappa_T = L/\delta_U^{\kappa_T} \gg 1$, $Pe_S = UL/\kappa_S = L/\delta_U^{\kappa_S} \gg 1$), как правило, большие. Шкала масштабов $C = \Lambda/L = \rho_0/\delta\rho \gg 1$ (малые изменения плотности на масштабе L) и диссипативные отношения с коэффициентами кинематической вязкости $C_N^\nu = L/\delta_N^\nu = \sqrt{L^2 N/\nu} \gg 1$ (аналогично, температуропроводности и диффузии $C_N^{\kappa_T}$, $C_N^{\kappa_S}$), также велики.

Большое число масштабов, заметно различающихся по своим значениям, указывает на сложность картины течений, обусловленной сосуществованием большого числа разнородных структурных компонентов. Большие значения отношений масштабов (безразмерных критериев) в слабодиссипативных средах обосновывают возможность применения теории возмущений для расчета процессов, в первую



Рис. 2. Индустриальные выбросы в атмосферу в Южно-Сахалинске (19 сентября 2011 г.)

очередь медленных (течения, обусловленные неоднородностями вертикального потока плавучести (индуцированные диффузией на топографии)), и внутренних волн.

Течения, индуцированные диффузией на топографии. Под действием силы тяжести неоднородные жидкости и газы легко расслаиваются, причем более тяжелые слои опускаются под более легкие (инверсии в атмосфере, сезонный и годовой пикноклины в океане). Неоднородности вертикального молекулярного потока вещества, вызванные непроницаемыми препятствиями в толще жидкости или наклоном ее границ, создают горизонтальные градиенты плотности, которые образуют течения даже при отсутствии дополнительных силовых факторов. К их числу относятся горные и долинные ветры в атмосфере или плотностные течения в океане, играющие важную роль в переносе и перераспределении вещества. Пример наблюдения такого течения в Южно-Сахалинске, визуализированного индустриальными выбросами, приведен на рис. 2.

В предрассветные часы пар и дым из трубы ТЭЦ переносится направо в форме типичной турбулентной струи. Струи пара из градирен слева от трубы поднимаются вертикально и несколько сближаются с высотой. Неподвижное облачко пара, которое располагается не над струями, а смещено влево, свидетельствует, что ветер выражен только в относительно тонком слое вблизи поверхности Земли. Темный дым из трубы котельной сносится влево, причем довольно быстро клубы трансформируются в полосчатые структуры, вытянутые по ветру. Концентрация дыма вдоль слоев изменяется немонотонно.

Общая структура изображения типична для стратифицированных течений, в которых силы плавучести подавляют вертикальное движе-

ние и на больших (поворот плавучих струй из вертикальных в горизонтальные) и на малых (ламинаризация картины течения) масштабах. Направления струй свидетельствуют о формировании расходящихся восходящих вдольсклоновых течений и погружающегося компенсационного течения в центре долины.

Течения, индуцированные диффузией на топографии, активно изучаются последние семьдесят лет. Однако в силу внутренней многомасштабности впервые полный расчет такого течения даже на простой топографии (пластина конечной длины, клин) удалось выполнить только с применением суперкомпьютерных технологий [20].

Определяющая система включает в себя уравнение состояния в форме $\rho = \rho(S(z))$, уравнение неразрывности, уравнение Навье–Стокса в приближении Буссинеска и диффузии стратифицирующей компоненты:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{00} (\exp(-z/\Lambda) + s + s_0), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho_{00}} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} - (s + s_0) \mathbf{g}; \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s &= \kappa_S \Delta s + \frac{v_z}{\Lambda}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь s — возмущение солёности (входит коэффициент солевого сжатия); $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — скорость; P — давление за вычетом гидростатического; ∇ и Δ — операторы Гамильтона и Лапласа.

Начальные условия и граничные условия (прилипания для скорости, непротекания для вещества и затухания всех возмущений на бесконечности) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}, s|_{t \leq 0} &= 0; \quad v_x|_{\Sigma} = v_z|_{\Sigma} = 0; \quad \left[\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} \right] \Big|_{\Sigma} = \left[\frac{\partial s}{\partial \mathbf{n}} \right] \Big|_{\Sigma} - \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial z}{\partial n} = 0; \\ [s_0] \Big|_{\Sigma_0} &= c_0; \quad \mathbf{v}, s, s_0|_{x,z \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности препятствия Σ .

Для численной реализации метода конечного объема был разработан оригинальный решатель stratifiedFlow на основе стандартного солвера isoFoam, реализующего численное решение нестационарных уравнений Навье–Стокса для однородной вязкой несжимаемой жидкости в пакете OpenFOAM с открытым исходным кодом на языке C++. В него были введены дополнительные уравнения для расчета переменной плотности, концентрации стратифицирующего компонента, а также новые параметры — частота плавучести, масштаб стратификации, коэффициент диффузии, ускорение свободного падения и другие, обеспечивающие учет эффектов нелинейности, стратификации и диффузии. Решатель был дополнен программными фрагментами

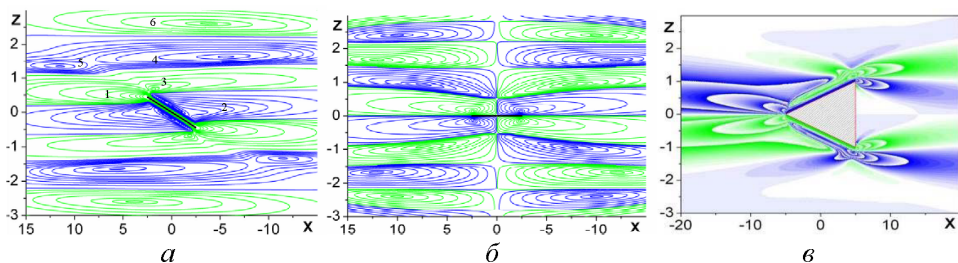


Рис. 3. Картины линий тока течений, индуцированных прерыванием диффузионного потока на наклонной (а) и горизонтальной (б) пластинах, на клине (в): 1–6 – регулярные ячейки

расчета таких информативных физических величин, как полная плотность, функция тока, динамическая завихренность $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$, темп бароклинной генерации завихренности $\dot{\Omega} = \nabla P \times \nabla \rho^{-1}$, компонента тензора вязких напряжений, скорость диссипации механической энергии, распределение сил и моментов, воздействующих на обтекаемое препятствие.

Расчеты в параллельном режиме с применением метода декомпозиции расчетной области проведены на суперкомпьютерных комплексах “Ломоносов” и “Чебышев” НИВЦ МГУ им. М.В. Ломоносова и вычислительного кластера МСЦ РАН в рамках технологической платформы UniHUB.

В качестве примера представлены картины линий тока течений, индуцированных на неподвижной пластине и симметричном клине, которые погружены в непрерывно стратифицированную жидкость.

В картине линий тока есть регулярные ячейки (рис. 3, а), разделенные тонкими прослойками (положительное направление вращения обозначено серым цветом). Над горизонтальной полосой ячейки разных знаков расположены оппозитно относительно главных плоскостей (рис. 3, б). Около угловых точек клина формируются дополнительные тонкоструктурные компоненты (рис. 3, в).

Еще более отчетливо тонкая структура течения выражена в полях динамической завихренности $\Omega = \text{rot } \mathbf{v}$ (рис. 4, а) и темпа бароклинной генерации завихренности $\dot{\Omega} = (0, \dot{\Omega}, 0)$ в пересекающихся полях градиентов давления и плотности (рис. 4, б). Формирование новых компонентов в окрестности краев пластины обусловлено совместным действием эффектов плавучести, ограничивающих высоту подъема сходящих струек, и вязкости. Появление “розеток” — систем изолиний, сходящихся в физическую точку, — типично для картин диссипативно-гравитационных волн (или волн “нулевой частоты”). Пересечения изопикн и изобар приводят к порождению дополнительной завихренности и в непосредственной окрестности и на некотором

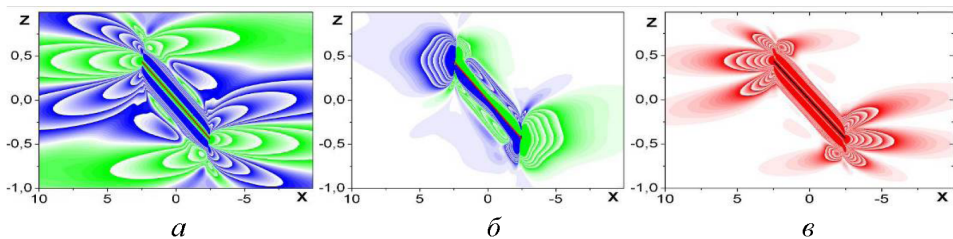


Рис. 4. Поля динамической завихренности (*a*), темпа бароклининой генерации завихренности (*б*), скорости диссипации энергии течения ϵ на наклонной пластине (*в*):

$N = 1,256 \text{ c}^{-1}$, $L = 5 \text{ см}$, $\varphi = 10^\circ$ (масштабы по осям разные)

удалении от препятствия (см. рис. 4, *б*). Сложная картина скорости диссипации механической энергии (рис. 4, *в*) существенно отличается от гладкого поля линий тока.

Рассчитанные поля возмущений градиента плотности для течений, индуцированных диффузией на горизонтальной или наклонной пластине и клине, в которых проявляются и крупномасштабные компоненты с размерами, задаваемыми размерами препятствия пластины, и тонкие прослойки с масштабами $\delta_N^\nu = \sqrt{\nu/N}$ и $\delta_N^{\kappa_S} = \sqrt{\kappa_S/N}$ на больших временах согласуются с картинами визуализации (“цветной теневой метод” с горизонтальной щелью и решеткой) распределения градиента коэффициента преломления около пластины в лабораторном бассейне (рис. 5).

В изображениях выделяются протяженные полосчатые структуры, примыкающие непосредственно к экстремальным точкам препятствий. Течения, индцированные диффузией, приводят к самодвижению препятствий нейтральной плавучести в стратифицированной среде при произвольной геометрии препятствия и его ориентации в пространстве, и отсутствуют в однородной жидкости. Такие течения служат начальными условиями в задачах формирования течений при движении тел в жидкости или обтекании препятствий.

Качественно результаты расчетов течения на наклонной полосе согласуются с картиной долинных ветров, представленных на рис. 2.

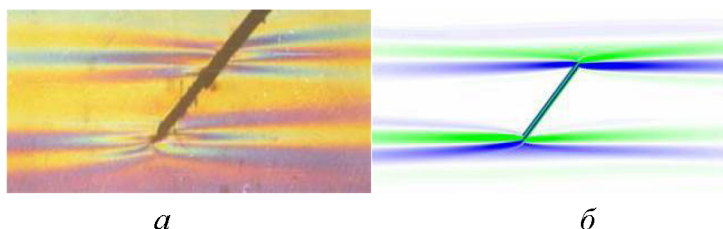


Рис. 5. Теневая (*a*) и численная (*б*) визуализации течения, индуцированного диффузией на неподвижной наклонной пластине ($L = 5 \text{ см}$, $N = 0,84 \text{ c}^{-1}$, $T_b = 7,5 \text{ с}$, $\varphi = 40^\circ$)

Более детально картины течений, индуцированных диффузией в клиновидной впадине, рассчитаны аналитически в работе [21].

Классификация инфинитезимальных компонентов периодических течений. Из условия совместности следует, что полностью линеаризованная форма системы (7)–(10), включающая в себя уравнение состояния с постоянными коэффициентами теплового расширения, солевого сжатия и адиабатической сжимаемости (влиянием которой далее пренебрегается) и уравнения неразрывности, Навье – Стокса, теплопроводности и диффузии имеет десятый порядок [19]. Решения линеаризованной системы с малыми коэффициентами при старших пространственных производных находятся методами теории сингулярных возмущений, позволяющей найти корни, регулярные по малому параметру μ задачи

$$k = k_0 + \mu k_1 + \mu^2 k_2 + \dots, \quad (16)$$

и сингулярные

$$k_z = \mu^\beta (k_0 + \mu k_1 + \mu^2 k_2 + \dots), \quad \beta > 0, \quad (17)$$

характеристического (дисперсионного) уравнения, необходимые для построения полного решения. Значение коэффициента γ определяется при подстановке (17) в исследуемую систему из условия старшинства полученного главного члена разложения [22].

Для прямого учета пространственного затухания расчеты малых периодических течений проводят с использованием действительной частоты ω и комплексного волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + + i\mathbf{k}_2$. Переменные представляются в мультипликативном виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \tau(r, t), \quad \bar{p} = p_0 \tau(r, t), \quad \bar{\rho} = \rho_0 \tau(r, t), \quad \tau(r, t) = \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)). \quad (18)$$

Решение линеаризованной системы (7)–(10) в приближении Буссинеска в безграничной среде находится в виде разложений по плоским волнам

$$A = \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_j(k_x, k_y) \exp(i(k_{zj}(k_x, k_y)z + + k_x x + k_y y - \omega t)) dk_x dk_y, \quad (19)$$

где A — компоненты скорости, давление, температура, соленость или плотность. Суммирование в разложении (19) выполняется по всем корням дисперсионного уравнения, выражающего условие разрешимости линеаризованной системы, которые удовлетворяют граничным условиям задачи или условию излучения в безграничной среде (затухания всех возмущений на бесконечности).

Дисперсионное соотношение для линеаризованной системы (7)–(10), включающей в себя уравнения переноса теплоты и вещества, имеет вид [19]

$$D_\nu(k, \omega)F(k, \omega) = 0; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} F(k, \omega) = & \\ = -D_\nu(k, \omega)D_{\kappa_T}(k, \omega)D_{\kappa_S}(k, \omega) & \left(k^2 + i \frac{k_z(\Lambda_T + \Lambda_S)}{\Lambda_T \Lambda_S} \right) + \\ + D_{\kappa_T}(k, \omega) & \left(\frac{\omega k_z}{\Lambda_S} D_\nu(k, \omega) - N_S^2 k_\perp^2 \right) + \\ + D_{\kappa_S}(k, \omega) & \left(\frac{\omega k_z}{\Lambda_T} D_\nu(k, \omega) - N_T^2 k_\perp^2 \right); \end{aligned} \quad (21)$$

$$D_\nu(k, \omega) = -i\omega + \nu k^2; \quad D_{\kappa_T}(k, \omega) = -i\omega + \kappa_T k^2;$$

$$D_{\kappa_S}(k, \omega) = -i\omega + \kappa_S k^2; \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

В пренебрежении всеми диссипативными эффектами дисперсионное уравнение десятой степени (20) переходит в квадратное уравнение, описывающее внутренние волны в идеальной жидкости (и другие виды волн — инерциальные, поверхностные гравитационные, акустические и гибридные с учетом вращения и сжимаемости [19]). Ему соответствуют два регулярно возмущенных решения дисперсионного уравнения и системы дифференциальных уравнений (14) с граничными условиями, которые определяют форму конического пучка периодических внутренних волн. Масштаб течения задается размером источника, а малый коэффициент затухания ($|k_1| \gg |k_2|$) — кинетическими коэффициентами ($\gamma = i(\nu + \kappa_T + \kappa_S)k^2$).

Оставшиеся восемь корней уравнения (20), мнимая часть которых не мала ($|k_1| \sim |k_2|$), относятся к классу сингулярно возмущенных. В них значения волновых чисел обратно пропорциональны кинетическим коэффициентам ν , κ_T , κ_S . Такие корни определяют мелкомасштабные компоненты решения, задающие тонкую структуру среды. В безграничной среде четыре из них, нарушающие условие затухания на бесконечности, отбрасываются. Остальные решения образуют две различные группы.

Из уравнения (20), в котором присутствует множитель $D_\nu(k, \omega) = 0$, следует, что не только на границах, но и в толще текущей вязкой жидкости всегда присутствуют тонкоструктурные высокоградиентные компоненты — аналоги периодического течения Стокса на осциллирующей поверхности [7]. Поперечные размеры таких компонентов определяются кинематической вязкостью и частотой волны $\delta_\omega^\nu = \sqrt{\nu/\omega}$ (или частотой плавуности $\delta_N^\nu = \sqrt{\nu/N}$), а положение в жидкости — граничными условиями.

Действие остальных диссипативных факторов обуславливает существование еще одного вида тонкоструктурных компонентов, свойства которых определяются вторым и третьим слагаемым в (21). Их поперечные размеры зависят не только от частоты и кинематической вязкости, температуропроводности и диффузии, но и наклона излучающей поверхности (отношения k_z/k). Тонкоструктурные компоненты течений характеризуются собственной завихренностью и скоростью ее генерации в толще жидкости вследствие неколлинеарности градиентов плотности и давления.

Пренебрежение малыми изменениями плотности — наложение глобального условия постоянства плотности (приближение однородной несжимаемой жидкости) — приводит к сокращению числа уравнений, составляющих фундаментальную систему и исключению уравнения состояния, обеспечивающего связь плотности с другими термодинамическими параметрами. Такое упрощение приводит к вырождению системы определяющих уравнений вследствие отождествления (слияния) тонкоструктурных компонентов течений различной природы, обладающих различными свойствами [19].

Все решения, задаваемые и регулярно, и сингулярно возмущенными корнями дисперсионного уравнения (21), образуют единое семейство функций одного вида (19), но с различными отношениями действительных и мнимых частей в показателях экспонент. Они образуются, переносятся и исчезают одновременно, несмотря на различие характерных масштабов. Каждый компонент течений обуславливает перенос энергии, вещества и завихренности.

Механическая энергия течений сосредоточена в областях локализации крупномасштабных компонентов. Диссипация энергии происходит в тонкоструктурных компонентах, которые характеризуются большими значениями компонент тензора сдвига скорости. В традиционных методиках точечных измерений тонкоструктурные компоненты проявляются как случайные флуктуации измеряемого параметра. Для их надежной идентификации пространственная картина полей должна визуализироваться высокоразрешающими инструментами, например теневыми приборами.

Тонкая структура конического пучка периодических внутренних волн. Выбор подходящей геометрии источника облегчает проведение вычислений и анализ картины течения. В частности, изотропия течения в горизонтальной плоскости облегчает расчеты излучения волн горизонтальным круговым поршнем, лежащим на неподвижной горизонтальной плоскости и осциллирующим в вертикальном направлении. Поршень формирует в вязкой непрерывно стратифицированной жидкости конический пучок трехмерных периодических внутрен-

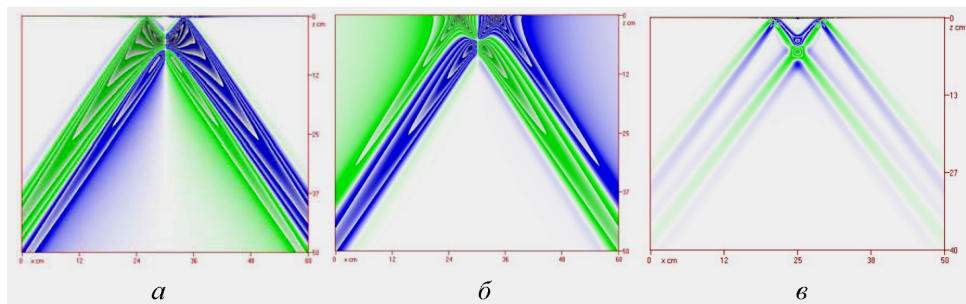


Рис. 6. Структуры центрального сечения конического пучка периодических внутренних волн в непрерывно стратифицированной среде $T_b = 5,2$ с (источник — диск радиусом $R = 4$ см, осциллирующим в вертикальном направлении с частотой $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ и амплитудой $U = 0,25 \text{ см/с}$):

a, б — поля горизонтальной компоненты скорости v_r при $t = 0; 0,25T_b$; *в* — поле второй производной скорости $\partial^2 v_r / \partial z^2$, $t = 0$

них волн, угол наклона которого к горизонту ϑ определяется отношением частот колебаний источника ω к плавучести N [23]. Энергия волн сосредоточена в центре волнового пучка, а диссипация происходит преимущественно в тонкоструктурных оболочках на краях пучка (рис. 6).

Рассчитанная картина волн удовлетворительно согласуется с результатами теневой визуализации пучка конических внутренних волн в лабораторном бассейне (рис. 7, диск осциллирует в стратифицированном растворе поваренной соли [24]). Угол наклона луча к горизонту ϑ определяется отношением частот колебаний ω источника и плавучести $\vartheta = \arcsin \omega / N$ (рис. 7, *a*). При критической частоте $\omega = N$ волновой луч ориентирован вертикально (рис. 7, *б*), при сверхкритических частотах $\omega > N$ волны не распространяются и крупномасштабные возмущения неволнового типа сосредоточены в окрестности источника. Выраженными остаются только тонкоструктурные компоненты — усиленные течения, индуцированные диффузией, которым соответствуют горизонтальные полосы на рисунке (рис. 7, *в*).

Рассчитанные и измеренные значения возмущений плотности, вызванные смещением слоев жидкости, согласуются с точностью до подгоночного коэффициента $0,7 < K < 1,1$. Измерения волновых возмущений контактными датчиками показали, что осциллирующие объемные тела являются более эффективными генераторами внутренних волн, чем плоский диск, и позволили проследить появление тонкоструктурных компонентов не только в окрестности движущегося тела, но и в толще жидкости.

При малых амплитудах движения картины волновых полей от осциллирующего шара и диска структурно подобны. С увеличением амплитуды колебаний шара в волновом поле образуются бегущие мел-

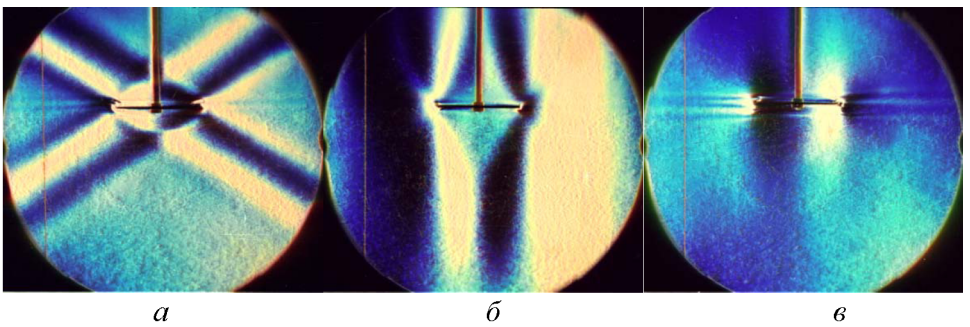


Рис. 7. Теневая визуализация внутренних волн, создаваемых вертикально осциллирующим диском ($N = 0,88 \text{ с}^{-1}$, $D = 5 \text{ см}$, $A = 0,25 \text{ см}$) при $\omega/N = 0,55$ (а), $0,97$ (б) и $1,27$ (в)

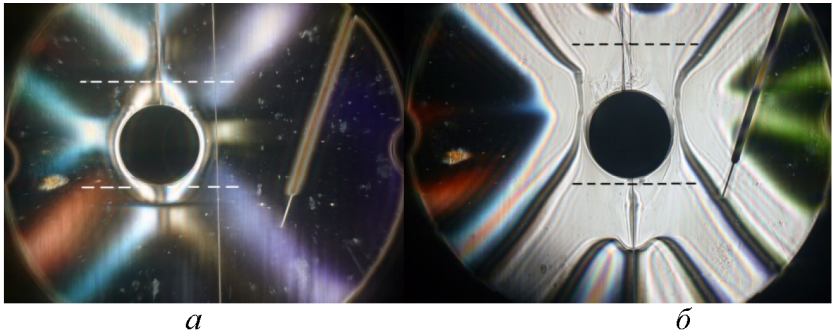


Рис. 8. Теневые картины высокоамплитудных пучков внутренних волн (шар $D = 4,5 \text{ см}$ осциллирует вертикально) при $A = 1 \text{ см}$ (а), $T_b = 11,2 \text{ с}$, $\omega = 0,7N$ и $A = 2,8 \text{ см}$, $T_b = 7,3 \text{ с}$, $\omega = 0,8N$ (б)

комасштабные неоднородности – двойные серые полосы около вертикальной оси и тонкая темная горизонтальная полоска под телом (рис. 8, а). Такие элементы, связанные с определенными фазовыми поверхностями волн и движущиеся синхронно с ними, относятся к мигрирующим инфинитезимальным типам течений, после их прохождения в жидкости не накапливаются остаточные возмущения. С увеличением амплитуды колебаний тела возрастают длина и степень выраженности наблюдаемых высокоградиентных конических оболочек волновых пучков (рис. 8, б).

При больших амплитудах колебаний тела в областях конвергенции оболочек начинают формироваться вихри, оконтуренные еще более тонкими прослойками типичной “грибовидной” формы (располагаются в областях смыкания внутренних оболочек в окрестности вертикальной оси на рис. 8, б). Толщина контуров оболочек вихрей в разы меньше длины волны. Вторичные вихри движутся по вертикали в сторону шара, в отличие от возмущений в непосредственной окрестности источника, внешние границы которых медленно продвигаются в окружающую среду. Аналогичные вихревые системы (автокумулятив-

ные струи) наблюдаются и при свободных колебаниях тел нейтральной плавучести в окрестности равновесных горизонтов в непрерывно стратифицированной жидкости [25].

Существование тонкоструктурных компонентов с выраженными агрегационными свойствами указывает на трудности измерения “скорости жидкой частицы” в силу невозможности идентификации “частицы” однородной несущей среды и зависимости картины течения от вида жидкого маркера. Введение твердотельных маркеров, которые вращаются вокруг центра течения и одновременно вокруг собственной оси в течениях со сдвигом, усложняет картину изучаемого течения вследствие внесения дополнительных мелкомасштабных возмущений.

Соглашение об использовании системы типа (7)–(10) в качестве базисной обеспечивает возможность формулировки требования полноты к методике гидродинамического эксперимента: в опытах должны измеряться все параметры, входящие в математическую модель с высокими пространственным и временным разрешениями.

Особую актуальность приобретает разработка методики непосредственного определения импульса (основанной, например, на измерениях сил, действующих на малое препятствие в потоке, или расхода вдоль выбранной линии тока) и плотности среды (например, по измерениям оптического коэффициента преломления и скорости звука).

Заключение. Проведенный анализ аксиоматики механики жидкостей показал, что все четыре определения понятия “движение твердого тела” — физическое, кинематическое, геометрическое и динамическое — тождественны и не эквивалентны понятию “течение жидкости” — перемещению сплошной среды, которое является более сложным вследствие свойства деформируемости.

Математическую основу описания течений — самосогласованных изменений физических величин, сопровождающих поток импульса, — составляет фундаментальная система уравнений сохранения физических величин — плотности, импульса, энергии, концентрации компонентов изучаемой среды, которая характеризуется уравнением состояния.

Условие совместности определяет ранг полной системы, порядок ее линеаризованной части и степень характеристического (дисперсионного) уравнения, определяющих число независимых структурных компонентов течений и их линейные масштабы. Полные решения фундаментальной системы согласуются с данными лабораторных экспериментов по моделированию течений, индуцированных диффузией, и внутренних волн, допускают прямой перенос на природные условия.

К числу наблюдаемых величин относятся импульс и термодинамические параметры среды — плотность, давление, температура, концентрация компонентов, устойчивые признаки протекающих процессов

(коэффициент оптического преломления, скорость звука и др.). Необходимы инструменты прямого измерения импульса течений. Скорость жидкости вследствие неопределенности границ “жидкой частицы” — ненаблюдаемая величина.

Требование полноты методики означает одновременность регистрации полей всех перечисленных выше фундаментальных физических переменных, визуализацию крупномасштабных и разрешение тонкоструктурных компонентов течений, возможность оценки погрешности непосредственно в процессе измерений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российской академии наук (Программа “Вихри и волны в сложных средах” ОЭММПУ РАН) и РФФИ (проект 12-01-00128).

Эксперименты проведены на стендах ТСТ и ЛПБ УНУ “ГФК ИПМех РАН”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Декарт Р. Первоначала философии. В 2 т. Т. 1. М.: Мысль, 1989. С. 297–422.
2. Лейбниц Г.В. Краткое доказательство примечательной ошибки Декарта и других, относящейся к вводимому ими и применяемому в механике естественному закону, согласно которому Бог хранит всегда одно и то же количество движения. В 4 т. М.: Мысль, 1981. Т. I. С. 118–125.
3. D’Alembert J.-R. Réflexions sur la cause générale des vents. Paris, 1747. 372 p.
4. Эйлер Л. Общие законы движения жидкостей // МЖГ. 1999. № 6. С. 26–54.
5. Navier C.-L.-M.-H. Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluids // Mém. d’Acad. des Sciences. 1822. Vol. 6. P. 389–417.
6. Stokes G.G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic bodies // Trans. Cam. Phil. Soc. 1845. Vol. 8. P. 287–305.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 2006. 732 с.
8. Менделеев Д.И. Об упругости газов. СПб. 1875. 262 с.
9. Менделеев Д.И. Исследование водных растворов по удельному весу. СПб. 1887. 520 с.
10. Чашечкин Ю.Д., Бардаков Р.Н., Шабалин В.В. Регулярная тонкая структура течений в высыхающей капле суспензии наночастиц кварца // ДАН. 2011. Т. 436. № 3. С. 336–338.
11. Maxwell J.C. Remarks on the Mathematical Classification of Physical Quantities // Proc. L. Math. Soc. 1871. Vol. 3. S. 1–3. P. 224–233.
12. Мантуров О.В., Солнцев Ю.К., Соркин Ю.И., Федин Н.Г. Толковый словарь математических терминов. М.: Просвещение, 1964. 540 с.
13. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 688 с.
14. Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // J. für die reine und angewandte Mathematik. 1858. Vol. 55. S. 25–55.

15. Калинин В.А., Чашечкин Ю.Д. Структуризация и реструктуризация одно-родной суспензии в поле стоячих волн // МЖГ. 2012. № 6. С. 109–121.
16. Степанова Е.В., Чашечкин Ю.Д. Перенос маркера в составном вихре // МЖГ. 2010. № 6. С. 12–29.
17. Прохоров В.Е., Чашечкин Ю.Д. Генерация звука при падении капли на поверхность воды // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 6. С. 792–803.
18. Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д. Инвариантные свойства систем уравнений механики неоднородных жидкостей // Прикл. мат. и мех. 2011. Т. 75. № 4. С. 551–562.
19. Чашечкин Ю.Д. Иерархия моделей классической механики неоднородных жидкостей // Морск. Гидрофиз. ж. 2010. № 5. С. 3–10.
20. Чашечкин Ю.Д., Загуменный Я.В. Структура течения, индуцированного диффузией на наклонной пластине // ДАН. 2012. Т. 444. № 2. С. 165–171.
21. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Индуцированные диффузией нестационарные пограничные течения в клиновидной впадине // Прикл. мат. и мех. 1998. Т. 62. № 5. С. 803–809.
22. Найфе А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
23. Бардаков Р.Н., Васильев А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Расчет и измерения конических пучков трехмерных периодических внутренних волн, возбуждаемых вертикально осциллирующим поршнем // МЖГ. 2007. № 4. С. 117–133.
24. Chashechkin Yu.D. Visualization of singular components of periodic motions in a continuously stratified fluid // J. Vis. 2007. Vol. 10. No. 1. P. 17–20.
25. Чашечкин Ю.Д., Приходько Ю.В. Регулярные и сингулярные компоненты течений при вынужденных и свободных колебаниях сферы в непрерывно стратифицированной жидкости // ДАН. 2007. Т. 414. № 1. С. 44–48.

REFERENCES

- [1] Descartes R. Principia philosophiae. Amsterdam, Louis Elzevir, 1644 (in Latin). (Russ. Ed.: Dekart R. Pervonachala filosofii. V 2 t. [Engl. Ed.: Descartes R. Principles of Philosophy. Gardners Books, 2013]. Moscow, Mysl' Publ., 1989, vol. 1, pp. 297–654).
- [2] Leybnits G.V. Kratkoe dokazatel'stvo primechatel'noy oshibki Dekarta i drugikh, otosyashcheysya k vvodimomu imi i primenyaemому v mekhanike estestvennomu zakonu, soglasno ktoromu Bog khranit vseгда odno i tozhe kolichestvo dvizheniya. V kn.: “Sochineniya”, v 4 t., t. 1, pp. 118–125. [Leibniz G.W. A short proof of a remarkable error of Descartes and others, relating to restrictions imposed by them and mechanics employed in the natural law, which says that God always keeps the same amount of traffic]. Moscow, Mysl' Publ., 1981.
- [3] D'Alembert J.-R. Ré flexions sur la cause générale des vents [Reflections on the general cause of the winds]. Paris, 1747. 372 p.
- [4] Euler L. Principles of the motion of fluids. *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dyn.], 1999, no. 6, pp. 26–54 (in Russ.). (Fr. Ed.: Principes généraux du mouvement des fluides. Mémoires de l'Acad'emie royale des sciences et belles lettres. Berlin, 1755. vol. 11, pp. 274–315). Available at: <http://www.bbaw.de/bibliothek/digital/tiff/02-hist/1755/tif/00000282.tif> (accessed 27.07.2014).
- [5] Navier C.-L.-M.-H. M'emoire sur les Lois du Mouvement des Fluids [Memory on the Laws of Movement Fluids]. Mém. d l'Acad. des Sciences, 1822, vol. 6, pp. 389–417.
- [6] Stokes G.G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic bodies. *Trans. Cam. Phil. Soc.*, 1845, vol. 8, pp. 287–305.
- [7] Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaja fizika. V 10 t. T. 6. Gidrodinamika [Theoretical physics. Ten-volume set. Vol. 6. Fluid mechanic]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 752 p. (Eng. Ed.: Landau L.D., Lifshits E.M. Fluid Mechanics. Vol. 6 (Course of Theoretical Physics). Second Ed. Oxford, New York, Pergamon Press, 1987.)

- [8] Mendeleev D.I. Ob uprugosti gazov [Elasticity of gases]. SPb, 1875. 262 p.
- [9] Mendeleev D.I. Issledovanie vodnykh rastvorov po udel'nomu vesu [The study of aqueous solutions of specific weight]. SPb, 1887. 520 p.
- [10] Chashechkin Yu.D., Bardakov R.N., Shabalin V.V. The regular fine structure of flows in a drying drop of a suspension of quartz nanoparticles. *Dokl. Akad. Nauk* [Doklady Physics, vol. 56, iss. 1, pp. 62–64], 2011, vol. 436, no. 3, pp. 336–338 (in Russ.). DOI: 10.1134/S1028335810901161
- [11] Maxwell J.C. Remarks on the Mathematical Classification of Physical Quantities. *Proc. L. Math. Soc.*, 1871, vol. 3, s. 1–3, pp. 224–233.
- [12] Manturov O.V., Solntsev Yu.K., Sorkin Yu.I., Fedin N.G. Tolkovyy slovar' matematicheskikh terminov [Explanatory dictionary of mathematical terms]. Moscow, Prosveshchenie Publ., 1964. 540 p.
- [13] Newton I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. London, “The Royal Society of London for the Improvement of Natural Knowledge”, 1687 (in Latin). (Russ. Ed.: N'yuton I. *Matematicheskie nachala natural'noy filosofii*. Pod. red. Polaka L.S., per. s latinskogo Krylova A.N. Moscow, Nauka Publ., 1989. 688 p.).
- [14] Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen [About integrals of the hydrodynamic equations, which correspond to the vortex motion]. *J. für die reine und angewandte Mathematik* [J. of Pure and Applied Mathematics], 1858, vol. 55, pp. 25–55.
- [15] Kalinichenko V.A., Chashechkin Yu.D. Structuring and restructuring of a homogeneous suspension in the standing-wave field. *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dyn.], 2012, no. 6, pp. 109–121 (in Russ.).
- [16] Stepanova E.V., Chashechkin Yu.D. Marker transfer in a composite vortex. *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dyn.], 2010, no. 6, pp. 12–29 (in Russ.).
- [17] Prokhorov V.E., Chashechkin Yu.D. Sound generation as a drop falls on a water surface. *Akust. Zh.* [Acoust. Phys.], 2011, vol. 57, no. 6, pp. 792–803 (in Russ.).
- [18] Baydulov V.G., Chashechkin Yu.D. Invariant properties of systems of equations of the mechanics of inhomogeneous fluids. *Prikl. Mat. i mekh.* [J. Appl. Math. Mech.], 2011, vol. 75, no. 4, pp. 551–562 (in Russ.).
- [19] Chashechkin Yu.D. Hierarchy of the models of classical mechanics of inhomogeneous fluids. *Mors. Gidrof. Zh.* [Phys. Oceanogr, 2011, vol. 230, iss. 5, pp. 317–324], 2010, no. 5, pp. 3–10 (in Russ.). DOI: 10.1007/s11110-011-9087-5
- [20] Chashechkin Yu.D., Zagumennyi Ya.V. Structure of diffusion-induced flow on an inclined plate. *Dokl. Akad. Nauk* [Doklady Physics, vol. 57, iss. 5, p. 201–216], 2012, vol. 444, no. 2, pp. 165–171 (in Russ.).
- [21] Kistovich A.V., Chashechkin Yu.D. Diffusion induced unsteady boundary flows in the sphenoid cavity. *Prikl. Mat. i mekh.* [J. Appl. Math. Mech.], 1998, vol. 62, no. 54, pp. 803–809 (in Russ.).
- [22] Nayfeh Ali H. *Introduction to Perturbation Techniques*. 1st Ed. Wiley, 1981. 536 p. (Russ. Ed.: Nayfe A. *Vvedenie v metody vozmushcheniy*. Moscow, Mir Publ., 1984. 535 p.).
- [23] Bardakov R.N., Vasil'ev A.Yu., Chashechkin Yu.D. Calculation and measurement of conical beams of three-dimensional periodic internal waves excited by a vertically oscillating piston. *Izv. Akad. Nauk, Mekh. Zhidk. Gaza* [Fluid Dyn.], 2007, no. 46, pp. 117–133 (in Russ.). DOI:10.1134/S0015462807040114
- [24] Chashechkin Yu.D. Visualization of singular components of periodic motions in a continuously stratified fluid. *J. Vis.*, 2007, vol. 10, no. 1, pp. 17–20.
- [25] Chashechkin Yu.D., Prikhod'ko Yu.V. Regular and singular flow components for stimulated and free oscillations of a sphere in continuously stratified liquid. *Dokl. Akad. Nauk* [Doklady Physics, vol. 52, iss. 5, p. 261], 2007, vol. 414, no. 1, pp. 44–48 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 15.05.2014

Чашечкин Юлий Дмитриевич — д-р физ.-мат. наук, руководитель Научно-образовательного центра “Потоки и структуры в жидкостях: физика геосфер” физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в ИПМех РАН, профессор, заведующий Лабораторией механики жидкостей ИПМех РАН. Автор более 200 научных работ в области механики жидкостей и прикладной математики.

Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

Chashechkin Yu.D. — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, head of research and education center “Flows and Structures in Fluids: Physics of Geospheres” of “Physics” faculty of the Lomonosov MSU at the Ishlinskiy Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences. Head of “Fluid Mechanics” laboratory of the IPMech RAS. Author of more than 200 publications in the field of fluid mechanics and applied mathematics. IPMech RAS, pr. Vernadskogo 101 (korp. 1), Moscow, 119526 Russian Federation.