УДК 621.3 (075)

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В.Ф. Судаков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: vvffss.inbox.ru

Рассмотрены чисто реактивная и высокодобротная цепи с одним изменяющимся реактивным параметром. Предложены два базовых вида параметрического воздействия, вызывающие переходные процессы базового типа (аналогичные переходной и импульсной характеристикам в цепях с внешним возбуждением). В качестве математической модели чисто реактивной цепи рекомендовано использовать гамильтониан специального вида, явно зависящий от времени. Каноническое преобразование гамильтониана к новым обобщенным координате и импульсу выполнено с помощью производящей функции, явно зависящей от времени. Указанные преобразования позволили получить усредненные гамильтоновы уравнения, из которых определены асимптотически верные импульс (действие) и координата (фаза), и как следствие — переходные процессы базового типа в исходных переменных состояния. Переходные процессы в цепи с потерями не могут быть получены тем же путем, что и для чисто реактивной цепи. Предложен другой подход, основанный на существовании двух больших параметров, отражающих плавность изменения емкости и высокую добротность цепи.

***Ключевые слова*:** переходные процессы, гамильтониан, канонические преобразования, производящая функция, высокодобротная электрическая цепь.

TRANSIENT PROCESSES WITHIN PARAMETRICALLY EXCITED LINEAR ELECTRIC CIRCUITS

V.F. Sudakov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: vvffss.inbox.ru

Purely reactive and high-quality circuits with one changing reactive parameter is considered. Two base types of parametric interference causing the transient processes of a base type (analogous for transition and pulse characteristics within externally excited circuits) is proposed. The time-dependent Hamiltonian of a special type has been recommended for use as mathematical model of purely reactive circuit. The canonical transformation of the Hamiltonian to new generalized coordinate and momentum is carried out using the generating function depending on explicitly input time. These transformations have allowed obtaining the averaged Hamiltonian equations, which has determined asymptotically valid impulse (action) and coordinate (phase) and also as a consequence the base type transients have been described within the initial variables of a state. Transients for the losses circuits cannot be obtained in the same path that for the purely reactive circuits. Another approach based on the existence of two large parameters fixing the smoothness of capacity changing and the high-quality circuit is proposed.

***Keywords*:** transition processes, Hamiltonian, canonical transformations, generating function, high-quality electric circuit.

Введение. При внешнем воздействии на линейную электрическую цепь (ЭЦ) выделяют два базовых воздействия: резкий перепад между двумя постоянными уровнями и предельно узкий интенсивный импульс. Реакцию ЭЦ на них называют базовыми переходными процессами, или условно переходной и импульсной характеристиками. Если в цепь введено параметрическое воздействие (например, через изменение одного из реактивных параметров), то оно в определенном смысле может заменить внешнее воздействие, так как и в этом случае в ЭЦ поступает энергия стороннего источника. Представляет определенный практический интерес ввести базовые параметрические воздействия, вызывающие реакции базового типа. По аналогии с внешними базовыми воздействиями выделим следующие базовые параметрические воздействия: плавный переход между двумя постоянными уровнями; сглаженный ("плавный") импульс. Реакции ЭЦ на такие параметрические воздействия также назовем переходными процессами базового типа. Цель настоящей работы — сформулировать задачу о таких процессах математически и получить их аналитическое описание в замкнутом виде (используя для этого только элементарные формулы), который допускает эффективный расчет на ЭВМ без применения специальных средств программирования.

Для определенности будем полагать, что в ЭЦ изменяется только емкость по закону

$$C^{-1}\left(t\right)C_0 = 1 + \alpha f\left(\frac{t - t_0}{T}\right).$$

Здесь параметры постоянны. Зависимость от времени может быть достаточно сильной, но медленной, т.е. характерное время изменения параметра много больше периода собственных колебаний цепи при $\alpha = 0$. Это важное допущение о медленности изменения параметра соответствует плавному характеру базовых воздействий.

Для сравнения особенностей в описании переходных процессов выберем две достаточно близкие цепи: чисто реактивную и высокодобротную. Покажем, что даже при незначительных потерях метод описания второй цепи целесообразно выбирать из других соображений, чем метод получения переходного процесса в чисто реактивной ЭЦ.

Цепи с плавно изменяющимися параметрами изучались и ранее. Значительный ряд изданий посвящен, например, исследованию параметрического резонанса, когда параметр изменяется по периодическому закону [1]. Известны работы и по приближенным методам решения задач с переменным, но непериодическим параметром. Механический аналог — маятник с переменной длиной. Электрические прототипы маятника с медленным изменением параметра рассмотрены, например, в работах [2, 3]. В этом случае основная математическая модель —

дифференциальное уравнение линейного осциллятора без потерь с переменной частотой. Применялись различные методы приближенного решения: метод Ван-дер-Поля [4]; метод сведения к нелинейному уравнению первого порядка (уравнению Риккати) [5]; метод Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (метод ВКБ) [6]; метод многих масштабов [7]. Таким образом, приближенное решение задачи о линейном осцилляторе с плавно изменяющейся частотой можно считать известным. В то же время представляет интерес и другой, энергетический, подход к указанной задаче, который в литературе не отражен. Это объясняется тем, что полная энергия чисто реактивной цепи в указанных условиях не сохраняется. Однако цепь остается гамильтоновой системой (очевидно, что справедлива теорема Лиувилля о сохранении фазового объема). Поэтому в качестве математической модели цепи можно попытаться, как и в случае консервативного контура с постоянными параметрами, выбрать специального вида гамильтониан. С помощью специальной производящей функции такой гамильтониан должен быть преобразован к подходящим каноническим переменным. Эта функция будет выбрана в настоящей работе. Новый гамильтониан допускает усреднение, что и позволяет получить приближенное решение.

Работы, где рассматривались бы переходные процессы в высокодобротной цепи с потерями и изменяющимся реактивным параметром, неизвестны автору. Особенность такой задачи заключается в том, что не только энергия, но и действие не являются адиабатическими инвариантами. Следовательно, использовать гамильтонов подход невозможно, чем объясняется необходимость выбора другого метода. Такие методы могут быть основаны на преобразованиях независимой и зависимой переменных, сводящих модельные уравнения к асимптотически приближенным уравнениям с постоянными коэффициентами [8]. Поэтому основное внимание будет уделено получению модельных уравнений в форме, когда эти преобразования можно применить.

Схемы. Рассмотрим две цепи с одной степенью свободы: одноконтурная чисто реактивная цепь с переменной емкостью (рис. 1, *а*); двухузловая цепь с параллельным соединением емкостного с переменной емкостью, индуктивного и резистивного элементов (рис. 1, *б*). Цепи находятся под параметрическим воздействием двух базовых типов. Закон изменения емкости

$$C^{-1}(t)!_0 = 1 + \frac{3}{\pi}\operatorname{arcctg}\frac{t - t_0}{T}$$

назовем базовым плавным перепадом (рис. 2, *а*), закон изменения емкости

$$C^{-1}(t)!_0 = 2 + \cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{t - t_0}{T}\right)$$

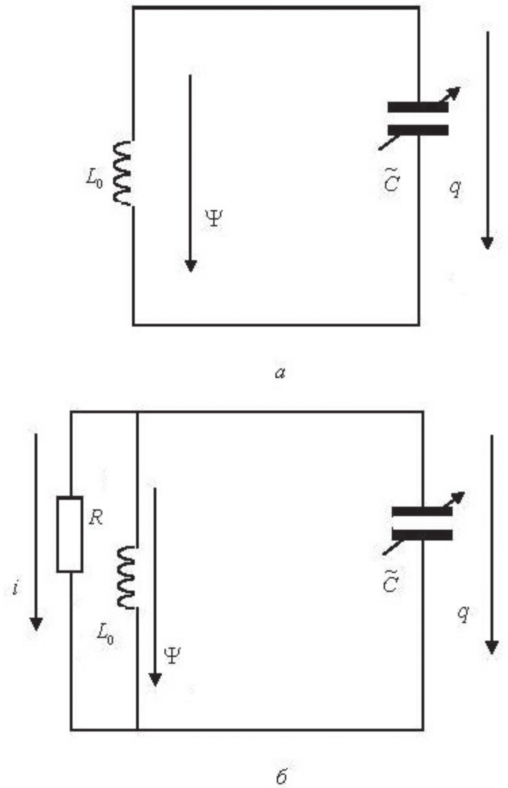


Рис. 1. Реактивная (*а*) и диссипативная (*б*) линейные цепи с изменяющейся емкостью

— базовым плавным импульсом (рис. 2, *б*). Плавный характер изменения емкости означает, что для характерной частоты контура ω_0 и характерного масштаба изменения емкости T справедливо соотношение $\omega_0 T \gg 1$. Заданы начальные условия при $t = -\infty$ и поставлена задача о нахождении переходного процесса, стремящегося к постоянной величине при $t = \infty$.

Переходные процессы в чисто реактивной цепи. Несмотря на то, что рассматриваемая цепь без потерь консервативной не является, воспользуемся тем не менее гамильтоновым формализмом. Введем следующие обозначения: $\omega_0^2 = 1/\left(LC_0\right)$; $\rho = \sqrt{L/C_0}$; $\eta = \omega_0\left(t - t_0\right)$ — безразмерное время; $(t - t_0)/T = \eta/\left(T\omega_0\right)$; $\Psi\left(\eta\right)$ — потокосцепление катушки; $q\left(\eta\right)$ — заряд конденсатора; $\Psi\left(-\infty\right) = \Psi_0$, $q\left(-\infty\right) = q_0$ — заданные начальные условия.

Запишем гамильтониан цепи в специальном виде

$$H = \frac{\Psi^2}{2} + C^{-1}\left(t\right) C_0 \frac{\left(\rho q\right)^2}{2}. \tag{1}$$

Можно убедиться в справедливости (1) в качестве гамильтониана, если составить гамильтоновы уравнения, исходя из (1), и в них перейти к

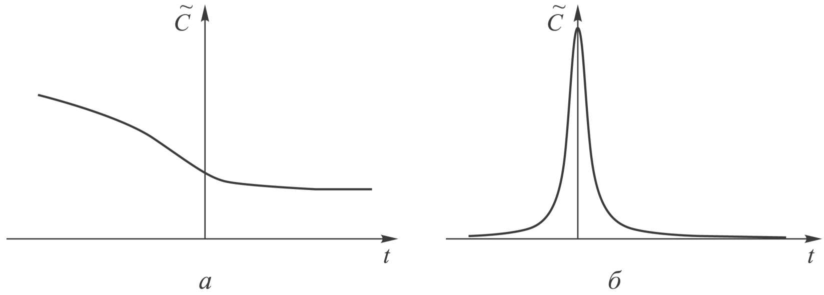


Рис. 2. Законы изменения емкости типа базового плавного перепада (*а*) и базового плавного импульса (*б*)

исходному времени и к параметру L. Нетрудно проверить, что эти уравнения можно представить как обычную систему уравнений для переменных состояния $\Psi(t), q(t)$. Таким образом, цепь является гамильтоновой системой. В то же время энергия цепи не сохраняется, что следует из явной зависимости гамильтониана от времени.

Целесообразно перейти от обобщенной координаты $\Psi(\eta)$ и обобщенного импульса $\rho q(\eta)$ к каноническим переменным: действию $I(\eta)$ (новый импульс) и фазе $\theta(\eta)$(новая координата). Переход к новым переменным осуществляется с помощью канонического преобразования [9], которое требует знания производящей функции F. Здесь зададим производящую функцию как

$$F(\rho q, \theta, \eta) = \frac{\sqrt{C(t)^{-1} C_0}}{2} (\rho q)^2 \operatorname{ctg}\theta. \tag{2}$$

Основная особенность функции (2) — ее явная зависимость от времени. Далее используем известную процедуру канонического преобразования [9]:

$$I = -\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{C(t)^{-1} C_0}}{2} (\rho q)^2 \frac{1}{\sin^2\theta}; \tag{3}$$

$$\Psi = -\frac{\partial F}{\partial(\rho q)} = \sqrt{C(t)^{-1} C_0}\, (\rho q) \operatorname{ctg}\theta. \tag{4}$$

Получим из (3)

$$\rho q = \sqrt{2I \frac{1}{\sqrt{C(t)^{-1} C_0}}} \sin\theta, \tag{5}$$

а из (4) —

$$\Psi = \sqrt{2I\sqrt{C(t)^{-1} C_0}} \cos\theta. \tag{6}$$

В новых переменных с использованием (5) и (6) гамильтониан (1) преобразуется к виду

$$H = I\sqrt{C\left(t\right)^{-1}C_0}.$$

Однако гамильтониан после канонического преобразования отличается от приведенного выше гамильтониана H:

$$H' = \frac{I}{\sqrt{CC_0^{-1}}} + \frac{\partial F\left(\rho q, \theta, \eta\right)}{\partial \eta}. \tag{7}$$

При вычислении производной следует учитывать, что берется частная производная времени η:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}\left(\rho q, \theta, \eta\right) = -\frac{1}{4\omega_0}\sqrt{C^{-1}C_0}\frac{\dot{C}}{C}\left(\rho q\right)^2 \operatorname{ctg}\theta. \tag{8}$$

В (8) точка обозначает производную емкости C по времени t.

Для получения гамильтоновых уравнений из нового гамильтониана (7) необходимо знать частные производные:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial I}\left(-\frac{\sqrt{C^{-1}C_0}}{4\omega_0}\frac{\dot{C}}{C}\left(\rho q\right)^2 \operatorname{ctg}\theta\right) = -\frac{1}{4\omega_0}\frac{\dot{C}}{C}\sin 2\theta; \\ &\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial\left(\rho q\right)}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)\frac{\partial\left(\rho q\right)}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Опуская в последнем выражении из (9) промежуточные вычисления, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right) = -\frac{1}{2\omega_0}\frac{\dot{C}}{C}I\cos 2\theta.$$

Гамильтоновы уравнения для канонических переменных в общем виде

$$\frac{dI}{d\eta} = -\frac{\partial H'}{\partial \theta}; \quad \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{\partial H'}{\partial I},$$

или

$$\frac{dI}{d\eta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{d\eta}\right) \to \frac{dI}{d\eta} = \frac{1}{2\omega_0}\frac{\dot{C}}{C}I\cos 2\theta; \tag{10}$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{\partial H}{\partial I} + \frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{\partial F}{d\eta}\right) \to \frac{d\theta}{d\eta} = \sqrt{C^{-1}C_0} - \frac{1}{4\omega_0}\frac{\dot{C}}{C}\sin 2\theta. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что с точностью до малого отношения $\left|\dot{C}/\left(\omega_0 C\right)\right| \ll 1$ (эквивалентно $\omega_0 T \gg 1$) существуют равенства

$$\theta\left(\eta\right) \approx \sqrt{C^{-1}C_0}\eta + \theta_0; \quad \frac{dI}{d\eta} \approx 0 \to I\left(\eta\right) \approx I_0. \tag{12}$$

Равенства (12) можно получить более корректно, усредняя (11) и (12) по “быстрой” фазе θ и полагая плавно изменяющуюся емкость постоянной. Асимптотически постоянное действие I называют адиабатическим инвариантом этой задачи. В цепи с потерями такого инварианта уже не существует.

Получив асимптотически пригодные (приближенные) действие и фазу, можно вернуться к исходным переменным в силу (5) и (6):

$$q(\eta) = \rho^{-1}\sqrt{\frac{2I_0}{\sqrt{C^{-1}C_0}}}\sin\left(\sqrt{C^{-1}C_0}\eta + \theta_0\right); \qquad (13)$$

$$\Psi(\eta) = \sqrt{2I_0\sqrt{C^{-1}C_0}}\cos\left(\sqrt{C^{-1}C_0}\eta + \theta_0\right). \qquad (14)$$

Чтобы найти переходной процесс, необходимо в уравнениях (13) и (14) перейти к заданным начальным условиям при $t = -\infty$. Нетрудно показать, что

$$2I_0 = \sqrt{C^{-1}(-\infty)C_0}\rho^2 q_0^2 + \left(\sqrt{C^{-1}(-\infty)C_0}\right)^{-1}\Psi_0^2; \quad \theta_0 = \\ = \operatorname{arcctg}\left[\sqrt{C^{-1}(-\infty)C_0}\frac{\rho q_0}{\Psi_0}\right]. \qquad (15)$$

Выражения (13)–(15) совместно с базовыми законами изменения емкости дают возможность построить переходные процессы на компьютере (рис. 3).

Переходные процессы в высокодобротной цепи. Цепь с потерями, возбуждаемая параметрически, гамильтоновой системой не является. Переходной процесс стремится к устойчивому состоянию равно-

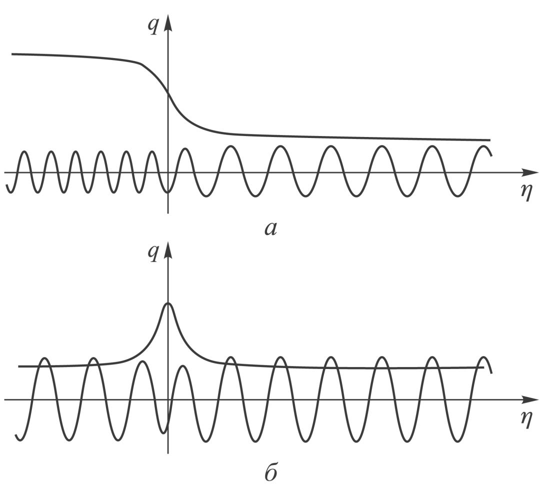


Рис. 3. Переходной процесс $q(\eta)$ в чисто реактивной цепи при законах изменения емкости типа плавного перепада (*а*) и плавного импульса (*б*)

весия, т.е. фазовый объем сжимается (несправедлива теорема Лиувилля). В этом случае гамильтониана не существует. Поэтому в качестве модели выберем приведенное дифференциальное уравнение, которое следует из очевидной системы уравнений для переменных состояния (эти уравнения не приводятся к гамильтоновым):

$$\frac{dq}{dt} + \frac{\Psi}{L} + R^{-1}\frac{d\Psi}{dt} = 0; \quad q = C\left(\frac{t-t_0}{T}\right)\frac{d\Psi}{dt}.$$

Эта система сводится к уравнению второго порядка (уравнение не лагранжева типа, но близко по форме к самосопряженному уравнению)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{C\left(\frac{t-t_0}{T}\right)}{C_0}\frac{d\Psi}{dt}\right] + \frac{d\Psi}{dt} + \frac{\Psi}{C_0 L} = 0.$$

Введем следующие обозначения: $\tau = C_0 R$; $\eta = (t-t_0)/\tau$; $\rho = \sqrt{L/C_0}$; $Q = R/\rho \gg 1$ — большая добротность. Тогда приведенное уравнение примет вид

$$f_2(\eta)\frac{d^2\Psi}{d^2\eta} + f_1(\eta)\frac{d\Psi}{d\eta} + Q^2\Psi = 0, \tag{16}$$

где $f_2(\eta) = \left[C^{-1}\left(\eta\frac{\tau}{T}\right)C_0\right]^{-1}$; $f_1(\eta) = 1 + \dfrac{df_2(\eta)}{d\eta}$.

В (16) введем новую независимую переменную $\zeta(\eta) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\eta}\sqrt{\frac{1}{f_2(\eta)}}d\eta$ и новую функцию $\Xi(\zeta) = \Phi(\eta)\Psi(\eta)$, где

$$\Phi(\eta) = f_2(\eta)^{-\frac{1}{4}}\exp\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\eta}\frac{f_1(\eta)}{f_2(\eta)}d\eta\right]. \tag{17}$$

Преобразование независимой переменной и искомой функции, представленной выше, есть преобразование Лиувилля [8]. Оно приводит уравнение (16) к нормальной форме Лиувилля [8]:

$$\frac{d^2\Xi}{d\zeta^2} + \left[Q^2 + \varphi(\zeta)\right]\Xi = 0, \tag{18}$$

где $\varphi(\zeta) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{d\zeta}\left(\dfrac{1}{f_2}\right)f_2^2\dfrac{\frac{d\Phi(\eta)}{d\zeta}}{\Phi(\eta)} - f_2\dfrac{\frac{d^2\Phi(\eta)}{d\zeta^2}}{\Phi(\eta)}$ — функция, ограниченная по модулю малой величиной, поскольку зависит только от производных плавно меняющихся функций $\Phi(\eta)$ по безразмерному времени и не зависит от максимумов модулей последних. Это можно показать, получив после несколько громоздких расчетов следующее:

$$f_2 \frac{\dfrac{d^2\Phi(\eta)}{d\zeta^2}}{\Phi(\eta)} = \frac{-\dfrac{1}{2} f_2 \dfrac{df_2}{d\eta} \dfrac{d\Phi(\eta)}{d\eta} + f_2^2 \dfrac{d^2\Phi(\eta)}{d\eta^2}}{\Phi(\eta)}$$

и

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{1}{f_2}\right) f_2^2 \frac{\dfrac{d\Phi(\eta)}{d\zeta}}{\Phi(\eta)} = -\frac{1}{2} f_2(\eta)\frac{df_2}{d\eta}\frac{\dfrac{d\Phi(\eta)}{d\eta}}{\Phi(\eta)}.$$

Таким образом, в (18) в диапазоне $-\infty < \eta < \infty$ имеем пренебрежимо малую величину $|\varphi(\zeta)| \ll Q^2$, поскольку по условию цепь является высокодобротной. Уравнение (18) можно решать методом теории возмущений. Ограничившись нулевым приближением, получим приближенно

$$\Xi(\zeta) \approx \Xi_0 \cos(Q\zeta + \alpha_0).$$

Откуда $\Psi(\eta) = \Xi(\zeta(\eta))\,\Phi^{-1}(\eta)$. Если подставить в это равенство введенную выше замену $\zeta(\eta)$ и функциональный множитель (17), то имеем

$$\Psi(\eta) \approx \Xi_0 \cos(Q\zeta(\eta) + \alpha_0)\, f_2(\eta)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\eta} \frac{f_1(\eta)}{f_2(\eta)} d\eta\right] =$$

$$= \Xi_0 \cos\left(Q\int\limits_{-\infty}^{\eta} f_2^{-1}(\eta)\, d\eta + \alpha_0\right) f_2(\eta)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\eta} \frac{f_1(\eta)}{f_2(\eta)} d\eta\right]. \quad (19)$$

Если вернуться к закону изменения емкости, то после очевидных преобразований из (19) получим

$$\Psi(\eta) \approx \Xi_0 \cos\left(Q\int\limits_{-\infty}^{\eta} \sqrt{C^{-1}\left(\eta\frac{\tau}{T}\right) C_0} d\eta + \alpha_0\right) \left[C^{-1}\left(\eta\frac{\tau}{T}\right) C_0\right]^{-\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\eta} \left[C^{-1}\left(\eta\frac{\tau}{T}\right) C_0\right] d\eta\right]. \quad (20)$$

Начальные условия для переходного процесса при $\eta = -\infty$ будем задавать как Ξ_0, α_0. Отношение $\tau/T = RC_0/T = Q/(T\omega_0)$ при большой добротности ($Q \gg 1$) и плавном изменении параметра ($T\omega_0 \gg 1$) может быть либо соизмеримым с единицей, либо больше или меньше единицы. Согласно (20), это влияет на характер переходного процесса, что становится очевидным, если выполнить замену переменной

$\mu = \eta\tau/T = \eta Q/(\omega_0 T)$:

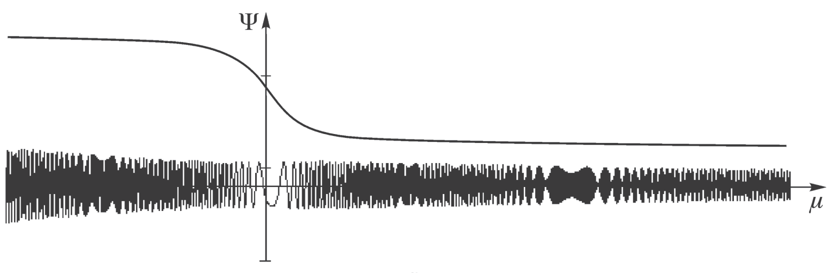
$$\Psi(\mu) \approx \Xi_0 \cos\left(\omega_0 T \int\limits_{-\infty}^{\mu\frac{\omega_0 T}{Q}} \sqrt{C^{-1}(\mu)\, C_0}\, d\mu + \alpha_0\right) \left[C^{-1}(\mu)\, C_0\right]^{-\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\omega_0 T}{Q} \int\limits_{-\infty}^{\mu\frac{\omega_0 T}{Q}} \left[C^{-1}(\mu)\, C_0\right] d\mu\right]. \quad (21)$$

По формуле (21) проведен расчет, результаты которого представлены на рис. 4.

Выводы. Аналитически описаны характерные изменения емкости (монотонно между двумя уровнями и при возврате к исходному уровню), позволяющие корректно сформулировать задачи о двух типах базовых переходных процессов как реакции на указанные выше изменения.

Показано, что при анализе чисто реактивных ЭЦ с плавно изменяющимися параметрами может быть использован гамильтонов формализм, что дает возможность приближенно описать переходные процессы в терминах действие–фаза. Указана производящая функция, по которой выполнен переход к канонически сопряженным переменным для цепей рассматриваемого класса. Для высокодобротной цепи в форме, удобной для последующих асимптотически верных преобразований, определено модельное уравнение. Это позволило найти приближение



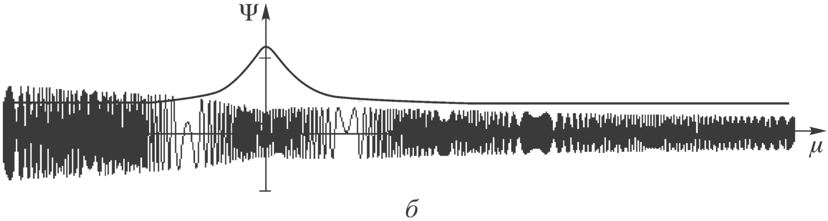


Рис. 4. Переходной процесс $\Psi(\mu)$ в высокодобротной цепи при законах изменения емкости типа плавного перепада (*а*) и плавного импульса (*б*)

переходного процесса и для высокодобротной цепи, когда гамильтонов формализм не правомерен.

Численное определение переходного процесса по исходной (точной) модели значительно затруднено даже с использованием ЭВМ. В то же время приближенный анализ, представленный в настоящей работе, делает получение изображения переходного процесса вполне доступным, о чем свидетельствуют полученные зависимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мигулин В.В.*, *Медведев В.И.*, *Мустель Е.Р.*, *Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний / под ред. В.В. Мигулина. М.: Наука, 1988. 392 с.
2. *Боголюбов Н.Н.*, *Митропольский Ю.И.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 408 с.
3. *Марков Ф.П.*, *Соколов В.А.* Цепи с переменными параметрами. М.: Энергия, 1976. 448 с.
4. *Волосов В.М.*, *Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
5. *Рабинович М.И.*, *Трубецков Д.И.* Введение в теорию нелинейных колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
6. *Хеддинг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.
7. *Найфэ А.Х.* Теория возмущений: М.: Мир, 1976. 446 с.
8. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: М.: Наука, 1966. 258 с.
9. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1988. 512 с.

REFERENCES

[1] Migulin V.V., Medvedev V.I., Mustel' E.R., Parygin V.N., eds. Osnovy teorii kolebaniy (pod red. V.V. Migulina). [Fundamentals of the oscillations theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 392 p.

[2] Bogolyubov N.N., Mitropol'skiy Yu.I. Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy. [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 408 p.

[3] Markov F.P., Sokolov V.A. Tsepi s peremennymi parametrami [Circuit with variable parameters]. Moscow, Energiya Publ., 1976. 448 p.

[4] Volosov V.M, Morgunov B.I. Metod osredneniya v teorii nelineynykh kolebatel'nykh sistem [The averaging method in the theory of nonlinear oscillatory systems]. Moscow, MGU Publ., 1971. 507 p.

[5] Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. Vvedenie v teoriyu nelineynykh kolebaniy i voln [Introduction to the theory of nonlinear oscillations and waves]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 432 p.

[6] Heading J. An introduction to phase-integral methods. Methuen, 1962. 160 p. (Russ. Ed.: Khedding Dzh. Vvedenie v metod fazovykh integralov (metod VKB). Moscow, Mir Publ., 1965. 238 p.).

[7] Nayfeh Ali H. Introduction to Perturbation Techniques. 1st ed. Wiley, 1981. 536 p. (Russ. Ed.: Nayfe A.Kh. Teoriya vozmushcheniy. Moscow, Mir Publ., 1976. 446 p.).

[8] Kamke E. Differentialgleichungen: Löosungsmethoden und Löosungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1967. (Russ. Ed.: Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial’nym uravneniyam. Per. s nem. 4-e izd., ispr. [Handbook on ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 388 p.)
[9] Arnol’d V.I. Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki [Mathematical methods of classical mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 432 p.

Статья поступила в редакцию 17.03.2014

Владимир Федорович Судаков — д-р техн. наук, профессор кафедры “Электротехника и промышленная электроника” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 140 научных работ в области теоретической электротехники, квантовой электроники, радиолокации и радионавигации.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.F. Sudakov — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Electrically Engineering & Industrial Electronics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 140 publications in the field of theoretical electrical engineering, quantum electronics, radar and radio navigation.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.