УДК 519.21

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПОСТАВКАМИ СЫРЬЯ В УСЛОВИЯХ ЖЕСТКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ СРОКА ГОДНОСТИ

А.Е. Бром

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: abrom@yandex.ru

Ограничения по срокам годности сырья — одни из самых жестких при оптимизации и синхронизации процессов поставок и производства. При использовании скоропортящегося сырья возникает проблема организации поставок с учетом такой специфики ресурсов. Разработана экономико-математическая модель определения объема поставки сырья с учетом естественной убыли при хранении и транспортировке. Предложен подход к оптимизации поставки при условии, что объем потребности в сырье является стохастической величиной, а в качестве критериев принимаются ограничения на срок хранения сырья на складе посредника и обеспечение заданной вероятности того, что суммарные издержки за период не превысят установленный предел. Представлены результаты апробации разработанной модели.

Ключевые слова: модель, управление запасом, естественная убыль, цепи поставок, снабжение, срок годности, оптимальный размер заказа.

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL OF MANAGEMENT FOR RAW MATERIALS DELIVERIES IN THE CONDITIONS OF SEVERE RESTRICTIONS OF AN EXPIRATION DATE

A.E. Brom

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: abrom@yandex.ru

Restrictions on expiration dates are the most severe ones when optimizing and synchronizing deliveries of raw materials and production. There occurs a problem of the organization of deliveries when using perishable raw materials. Economic and mathematical model for evaluation of the delivery order of raw materials has been developed considering natural storage at transportation and losses of raw materials. An approach to optimization is presented provided that the requirement for raw materials is a stochastic value and restrictions on a raw materials storage period in an intermediary warehouse and ensuring the probability of that total expenses for the period won't exceed the set limit are accepted as criteria. The results of the model application are presented.

Keywords: model, stock control, natural losses, supply chain, raw materials, supply, expiration date, economic order quantity (EOQ).

Для крупных географически распределенных компаний оптимизация процесса управления цепями поставок — необходимое условие выживания на рынке. Для создания эффективных цепей поставок требуется не только грамотное планирование, использование современных концепций управления, но и постоянный поиск передовых математических и программных решений и их внедрение, что обеспечивает принятие экономически верных и взвешенных решений. Высокоэффективные цепи поставок должны не только поддерживать высокий уровень сервиса, прозрачность и надежность, но и делать это с минимальными издержками.

В современных рыночных условиях вопросы оптимизации процесса управления цепями поставок сырья с ограниченным сроком годности недостаточно изучены. Одна из главных причин этого явления — отсутствие хорошо проработанных теоретических и методических материалов. Это обусловлено тем, что бизнес-процессы предприятий, использующих скоропортящееся сырье, индивидуальны и обусловлены спецификой отрасли, масштабом, структурой, ассортиментом выпускаемой продукции, технологическими особенностями производства, а также тем, что срок хранения является одним из самых жестких ограничений, требующих синхронизации поставок сырья и производства.

При построении моделей управления запасами наиболее простой и наглядный инструмент — формула Вильсона — формула определения экономичного размера заказа (Economic Order Quantity, EOQ), основанная на минимизации общих годовых затрат [1]. Традиционная EOQ-модель управления запасами не является строгой математической постановкой задачи управления запасами, так как дает только асимптотически оптимальный размер заказа (безгранично возрастающий горизонт планирования) [2]. Однако для упрощения решения поставленной задачи можно уйти от строгой постановки.

Возьмем EOQ-модель за основу разрабатываемой модели. Исходные данные для модели следующие: потребление D сырья за период; затраты C_h на хранение единицы сырья за период; накладные расходы C_0 на каждую поставку; размер заказа q; цена закупки C_s единицы сырья у поставщика; общие затраты C_Σ за период; наценка α.

Для некоторых предприятий (например, мясоперерабатывающих, кондитерских) указанная задача оптимизации будет иметь дополнительные особенности, обусловленные спецификой выпускаемой продукции.

Основная особенность модели, которая будет рассматриваться далее, — подверженность сырья процессам естественной убыли при хранении и транспортировке.

Естественная убыль – уменьшение массы товарно-материальных ценностей вследствие естественного изменения биологических и (или) физико-химических свойств при сохранении качества ценностей в пределах требований (норм), устанавливаемых нормативно-правовыми актами. К ней относят усушку, утруску, выветривание, испарение и т.п. Потери от естественной убыли возникают при хранении и (или) транспортировке материальных ценностей. Под нормами естественной убыли понимают предельно допустимую величину безвозвратных потерь товарно-материальных ценностей [3]. Нормы разрабатываются соответствующими министерствами и ведомствами для каждого вида продукции с учетом различных факторов: технических условий хранения и транспортировки продукции, климатического и сезонного факторов, влияющих на их естественную убыль. Кривая *1* показывает общий характер изменения нормы естественной убыли, кривая *2* — ее линейную аппроксимацию (рис. 1). Согласно рисунку, норма естественной убыли возрастает пропорционально увеличению срока хранения сырья.

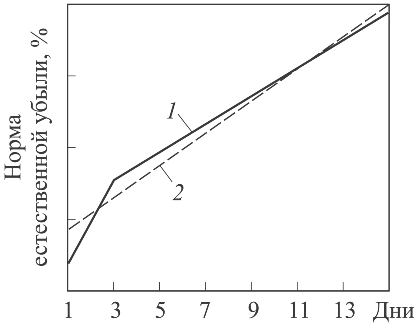

Рис. 1. Общий характер изменения нормы естественной убыли (*1*) и ее линейная аппроксимация (*2*)

Норма естественной убыли продукции $\mu(T)$ за период хранения, %, определяется по формуле [4]:

$$\mu(T) = \varepsilon_{\text{н}} + \Delta\varepsilon T,$$

где $\varepsilon_{\text{н}}$ — начальное значение нормы естественной убыли, %; $\Delta\varepsilon$ — шаг изменения нормы естественной убыли, % в день; T — период хранения сырья (в рассматриваемой модели равен периоду времени между поставками), дни.

Предположим, что цена, по которой посредник реализует ресурсы производственному предприятию, будет линейно уменьшаться с течением времени. Это будет обусловлено процессами снижения массы продукции в результате естественной убыли. Следовательно, чем дольше сырье хранится на складе посредника, тем ниже цена его реализации. Таким образом, изменение цены реализации сырья $\Delta C_s(t)$ в результате естественной убыли к моменту времени t, находится как

$$\triangle C_s(t) = C_s(\varepsilon_{\text{н}} + \triangle\varepsilon t).$$

С учетом естественной убыли продукции суммарные издержки C_Σ будут определяться по формуле

$$C_\Sigma(t) = C_0\frac{D}{q} + C_h\frac{q}{2} + (C_s(1+a) - C_s(\varepsilon_{\text{н}} + \triangle\varepsilon t))\,D \text{ при } t \le T.$$

Здесь t — период хранения сырья на складе посредника; $C_0\dfrac{D}{q}$ — затраты на размещение заказа; поскольку D — это спрогнозированное потребление сырья за период, а пополнение запасов осуществляется партиями по q единиц, то среднее число поставок за период составит $\dfrac{D}{q}$; умножив эту величину на накладные расходы на одну поставку

C_0, получаем приведенное выражение; $C_h \frac{q}{2}$ — средние затраты на хранение запасов сырья за период; если поставки товара осуществляются партиями по q единиц, то средний уровень запасов за период составит $q/2$ (при равномерном расходовании сырья); учитывая затраты C_h на хранение единицы сырья за период, получаем, что выражение для средних затрат на хранение единицы сырья за период имеет представленный вид (предполагается, что оплачиваются только занятые на складе места); $C_s(1+\alpha)$ — цена за единицу сырья, по которой предприятие осуществляет закупки у посредника; при этом за обработку сырья, полученного от поставщика, посредник увеличивает стоимость единицы сырья на наценку α.

Среднее изменение цены за период хранения составит

$$\triangle \overline{C}_s\,(t) = C_s \left(\varepsilon_{н} + \triangle \varepsilon \frac{T}{2} \right).$$

Тогда суммарные издержки за период будут иметь вид

$$C_\Sigma = C_0 \frac{D}{q} + C_h \frac{q}{2} + C_s\,(1+\alpha)\,D - C_s D \varepsilon_{н} - \ C_s D \triangle \varepsilon \frac{T}{2}. \qquad (1)$$

Период T между поставками можно выразить через потребление сырья D за период и размер заказа q: $T = q/D$. С учетом этого формула (1) примет вид

$$C_\Sigma = C_0 \frac{D}{q} + C_h \frac{q}{2} + C_s\,(1+\alpha)\,D - C_s D \varepsilon_{\text{н}} - C_s \triangle \varepsilon \frac{q}{2}.$$

Оптимальный размер заказа q^* в этой модели будет соответствовать минимуму суммарных издержек за период в точке, где производная соответствующей функции по оптимизируемому параметру в области $q > 0$ будет равна нулю:

$$\frac{\partial C_\Sigma(q)}{\partial q} = 0. \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) дает модифицированную формулу Вильсона

$$q^* = \sqrt{\frac{2C_0 D}{C_h - C_s \triangle \varepsilon}}. \qquad (3)$$

Из формулы (3) следует, что размер оптимального заказа может быть получен при условии $\triangle \varepsilon < C_h / C_s$.

Поскольку норма естественной убыли $\triangle \varepsilon$ — постоянная величина для конкретного вида сырья, а затраты на хранение единицы сырья C_h определены и зафиксированы на предприятии, управлять цепью поставок сырья необходимо с помощью параметра C_s [5, 6].

Соответственно на таком этапе расчета модели проблемой является управление взаимоотношениями с поставщиками. Для ее решения сформулируем следующие задачи:

— получение скидок за объем закупок или долгосрочное сотрудничество;
— заключение долгосрочных контрактов;
— прямые закупки у поставщиков;
— поиск новых поставщиков;
— поставки сырья от поставщика в таре или упаковке, пригодной для запуска в производство без необходимости дальнейшей обработки (упаковки, расфасовки и т.д.)

Рассмотрим исследуемую задачу с другой стороны. Исходные данные модели не изменились.

В отличие от модели, рассмотренной выше, предположим, что период хранения сырья на складе посредника T не равен периоду времени между поставками и потребность в конкретном виде сырья спрогнозирована неверно.

Введем переменную ξ — реальная потребность в сырье за период — случайная величина с известным законом распределения $F_\xi(x)$, где x — значение случайной величины ξ в конкретном периоде. Значения потребности, относящиеся к различным периодам, принимаются независимыми, но могут иметь разные функции распределения вероятностей.

Нормированная потребность в сырье ν — случайная величина, определяемая как

$$\nu = \frac{\xi}{D}.$$

Введем два критерия оптимизации задачи управления цепями поставок.

Критерий 1: максимизация остаточного срока хранения $(T - t) \to \to \max$; что обеспечивается при выполнении критерия $t \to \min$;

Критерий 2: минимизация вероятности превышения установленного уровня затрат.

Предположим, что на предприятии формируется бюджет на будущие периоды, в состав которого входит плановый уровень затрат на закупку сырья. Задача лица, принимающего решения по оптимизации цепи поставок сырья, на этом этапе сводится к обеспечению максимальной вероятности того, что суммарные издержки за период не превысят плановые. Тогда суммарные издержки предприятия за период определяются следующим образом:

$$\min C_\Sigma(t,q,\nu) = \begin{cases} C_0\nu\dfrac{D}{q} + C_h\dfrac{q}{2} + C_s(1+\alpha)D\nu - C_s\nu D\varepsilon_{\text{н}} - \\ \quad - C_s\nu D\triangle\varepsilon t \qquad \text{при } \nu > 1; \\ C_0\nu\dfrac{D}{q} + C_h\dfrac{q}{2} + C_s(1+\alpha)D\nu - C_s\nu D\varepsilon_{\text{н}} - \\ \quad - C_s\nu D\triangle\varepsilon t + C_u D(1-\nu) \text{ при } \nu \le 1, \end{cases}$$

где C_u — затраты на утилизацию единицы просроченного сырья; если реальная потребность в сырье ξ меньше спрогнозированной $D\,(\nu \le 1)$, то возникает необходимость утилизации просроченного сырья, что влечет за собой увеличение затрат на величину $C_u D(1-\nu)$.

Исходя из этого вероятность того, что затраты не превысят установленный уровень $C_{\min}$, имеет вид:

$$\left\{C_{\sum}(t,q,\nu) \le C_{\min}\right\} = P_{C_\Sigma}(t,q) =$$

$$= P\left\{\frac{C_{\min} - C_h\dfrac{q}{2} - C_u D}{C_0\dfrac{D}{q} + C_s(1+\alpha)D - C_s D(\xi_{\text{н}} + \triangle\xi t) - C_u D} \le \nu <\right.$$

$$\left. < \frac{C_{\min} - C_h\dfrac{q}{2}}{C_0\dfrac{D}{q} + C_s(1+\alpha)D - C_s D(\xi_{\text{н}} + \triangle\xi t)}\right\} =$$

$$= F_\nu\left[\frac{C_{\min} - C_h\dfrac{q}{2}}{C_0\dfrac{D}{q} + C_s(1+\alpha)D - C_s D(\xi_{\text{н}} + \triangle\xi t)}\right] -$$

$$- F_\nu\left[\frac{C_{\min} - C_h\dfrac{q}{2} - C_u D}{C_0\dfrac{D}{q} + C_s(1+\alpha)D - C_s D(\xi_{\text{н}} + \triangle\xi t) - C_u D}\right].$$

В рассматриваемой задаче оптимизации требуется найти параметры процесса поставки сырья, значения срока хранения и объема поставки, удовлетворяющие условиям

$$P_{C_\Sigma}(t,q) \ge P_{\min};$$
$$t \to \min,$$

где $P_{\min}$ — минимально допустимая вероятность того, что затраты за период не превысят установленный уровень.

Итак, задача оптимизации заключается в выборе из множества пар (t, q), удовлетворяющих неравенству и обеспечивающих требуемые вероятности, тех, для которых остаточный срок хранения принимает максимальное значение, т.е. время хранения сырья на складе посредника минимально. Таким образом, задача относится к задачам минимизации на множестве, заданном системой нелинейных неравенств.

Следующий шаг — установление закона распределения потребности в сырье. Поскольку “... в конкретной прикладной задаче нормальность результатов измерений (наблюдений), как правило, нельзя установить из общих соображений, ее следует проверять с помощью статистических критериев” [7], были взяты исходные данные компании (за первое полугодие 2013 г.), для которой разрабатывалась модель. Эти данные проверены на соответствие центральных моментов третьего и четвертого порядка следующим равенствам: $\mu_3 = 0;\quad \mu_4 = 3\sigma^4$.

С учетом этого был сделан вывод, что в рассматриваемом случае потребность в сырье не противоречит нормальному распределению (следует обратить внимание, что нормальное распределение является исключением из правила распределения экономических величин).

Далее рассмотрим представленную модель оптимизации параметров цепи поставок для ситуации, когда потребность в сырье распределена нормально, на конкретном предприятии: $\xi \in N\left(m, \sigma^2\right)$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&P_{C_\Sigma}(t, q) = \\
&\qquad = F_\nu\left[\frac{C_{\min} - C_h \dfrac{q}{2}}{C_0 \dfrac{D}{q} + C_s(1+a)D - C_s D\left(\xi_{\text{н}} + \triangle\xi t\right)}\right] - \\
&\qquad - F_\nu\left[\frac{C_{\min} - C_h \dfrac{q}{2} - C_u D}{C_0 \dfrac{D}{q} + C_s(1+a)D - C_s D\left(\xi_{\text{н}} + \triangle\xi t\right) - C_u D}\right] = \\
&\qquad = \Phi\left(\frac{C_{\min} - C_h \dfrac{q}{2}}{\left(C_0 \dfrac{D}{q} + C_s(1+a)D - C_s D\left(\xi_{\text{н}} + \triangle\xi t\right)\right)\sigma} - \frac{m}{\sigma}\right) - \\
&\qquad - \Phi\left(\frac{C_{\min} - C_h \dfrac{q}{2} - C_u D}{\left(C_0 \dfrac{D}{q} + C_s(1+a)D - C_s D\left(\xi_{\text{н}} + \triangle\xi t\right) - C_u D\right)\sigma} - \frac{m}{\sigma}\right),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где Φ — функция Лапласа.

В результате подстановок значений исходных данных получим таблицу вероятностей того, что затраты не превысят установленный уровень (табл. 1).

Таблица 1

Таблица вероятностей оптимизационной модели

Размер заказа	$t = t_1$	$t = t_2$	$\ldots$	$t = t_j$	$\ldots$	$t = t_l$
$q = q_1$	$P_{C_\Sigma}(q_1, t_1)$	$P_{C_\Sigma}(q_1, t_2)$	$\ldots$	$P_{C_\Sigma}(q_1, t_j)$	$\ldots$	$P_{C_\Sigma}(q_1, t_l)$
$q = q_2$	$P_{C_\Sigma}(q_2, t_1)$	$P_{C_\Sigma}(q_2, t_2)$	$\ldots$	$P_{C_\Sigma}(q_2, t_j)$	$\ldots$	$P_{C_\Sigma}(q_2, t_l)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$q = q_i$	$P_{C_\Sigma}(q_i, t_1)$	$P_{C_\Sigma}(q_i, t_2)$	$\ldots$	$P_{C_\Sigma}(q_i, t_j)$	$\ldots$	$P_{C_\Sigma}(q_i, t_l)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$q = q_n$	$P_{C_\Sigma}(q_n, t_1)$	$P_{C_\Sigma}(q_n, t_2)$	$\ldots$	$P_{C_\Sigma}(q_n, t_j)$	$\ldots$	$P_{C_\Sigma}(q_n, t_l)$

Анализируя данные, приведенные в табл. 1, при допустимых значениях вероятности $P_{C_\Sigma}(q_i, t_j)$ следует выбирать объем поставки с максимальным остаточным сроком хранения, т.е. минимальным временем хранения сырья на складе посредника. Можно также принимать решения о размере заказа в ситуациях, когда у посредника имеется запас сырья, необходимого производственному предприятию, которое уже хранится на складе t_{unr} дней. Тогда из допустимых значений вероятностей необходимо выбирать объем поставки с максимальным значением вероятности $P_{C_\Sigma}(q_i, t_{unr})$.

Модель была апробирована на Ferrero Russia — одном из крупнейших производителей кондитерских изделий, входящем в группу компаний Ferrero. Для реализации основного вида деятельности Ferrero Russia закупает сырье и материалы с других фабрик этой группы компаний (Италия, Германия, Франция, Ирландия, Бельгия, Польша, Эквадор, США, Бразилия). Используемое сырье имеет жесткие ограничения на условия транспортировки и хранения, а также сроки годности.

Следует отметить, что сырье, срок годности которого составляет меньше 10 дней, закупается у локальных поставщиков, расположенных на территории Центрального Федерального округа, сырье со сроком годности менее 45 дней — у европейских поставщиков при условии транспортировки через фабрику группы компаний Ferrero с возможностью его обработки. Долгохранящееся сырье закупается по всему миру также при условии транспортировки через фабрику группы компаний Ferrero с возможностью его обработки.

Рассмотрим конкретный пример реализации разработанной модели для сырья из группы “Мука, крахмал”. Для расчета используем следующие исходные данные:

— потребление сырья за период $D = 200$ ед.;
— затраты на хранение единицы сырья за период $C_h = 1$ у.е./ед.;
— накладные расходы на каждую поставку $C_0 = 8$ у.е.;
— цена закупки единицы сырья у поставщика $C_s = 1$ у.е./ед.;
— наценка фабрики группы компаний Ferrero $\alpha = 20\,\% = 0{,}2$;
— начальное значение нормы естественной убыли $\varepsilon_{\text{н}} = 0{,}015$;
— шаг изменения нормы естественной убыли $\triangle\varepsilon = 0{,}004$;
— минимальный уровень суммарных затрат (в рамках принятых понятий это означает, что суммарные затраты должны быть не больше 2200 у.е.) $C_{\min} = 2200$ у.е.;
— затраты на утилизацию единицы просроченного сырья $C_u = 6$ у.е.;
— значение вероятности, гарантирующей не превышение установленного уровня суммарных затрат, не менее 70 %;
— время обработки сырья на фабрике группы компаний Ferrero $t_{\text{обр}} = 3$ дня;
— срок годности сырья $T_{\text{годн}} = 45$ дней.

Рассчитаем значение оптимального размера заказа по (3):

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 200}{1 - 1 \cdot 0{,}004}} = 56 \text{ ед.}$$

Подставим исходные данные в (4) и получим значение вероятности, гарантирующей не превышение установленного уровня суммарных затрат:

$$P_{C_\Sigma}(t, q) = F_\nu \left[\frac{2200 - 0{,}5q}{\dfrac{1600}{q} + 237 - 0{,}8t} \right] - F_\nu \left[\frac{1000 - 0{,}5q}{\dfrac{1600}{q} - 963 - 0{,}8t} \right] =$$

$$= \Phi \left(\frac{2200 - 0{,}5q}{\left(\dfrac{1600}{q} + 237 - 0{,}8t \right) \sigma} - \frac{m}{\sigma} \right) -$$

$$- \Phi \left(\frac{1000 - 0{,}5q}{\left(\dfrac{1600}{q} - 963 - 0{,}8t \right) \sigma} - \frac{m}{\sigma} \right).$$

Для определения параметров нормального распределения воспользуемся методом точечной оценки, который предполагает нахождение единственной величины, принимаемой за значение параметра. Такую оценку целесообразно определять в тех случаях, когда объем данных достаточно велик.

Найдем оценки максимального правдоподобия параметров μ и σ нормального распределения, где μ — математическое ожидание, σ — эмпирическая дисперсия. Данные параметры распределения рассчитываются по следующим формулам [7]:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}; \tag{5}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1}, \tag{6}$$

где n — объем выборки; $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — выборки наблюдений.

В разработанной модели выборка наблюдений включает в себя две исследуемые величины, поэтому введем соответствующие обозначения υ и φ, с учетом чего формулы (5) и (6) преобразуются к виду:

$$\mu = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \upsilon_i + \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j}{n+m}; \tag{7}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\upsilon_i - \mu)^2 + \sum\limits_{j=1}^{m} (\varphi_j - \mu)^2}{n+m-1}, \tag{8}$$

где $\upsilon_i = \dfrac{2200 - 0{,}5q_i}{1600/q_i + 237 - 0{,}8t_i}$; $\varphi_j = \dfrac{2200 - 0{,}5q_j}{1600/q_j - 963 - 0{,}8t_j}$.

Рассмотрим выборку из 4500 наблюдений. Вычислим параметры нормального распределения по (7) и (8): $\mu = 16165/4500 = 3{,}59$; $\sigma^2 = 88782/4499 = 19{,}73$. Тогда среднее квадратичное отклонение составит: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{19{,}73} = 4{,}44$.

Для расчета значений вероятности, гарантирующих непревышение установленного уровня суммарных затрат, воспользуемся программой MS Excel (табл. 2).

Поскольку потребление сырья за указанный период составляет 200 ед., то целесообразно рассмотреть часть выборки, удовлетворяющей условиям $q_i \leq 200$ ед., q_i — делитель 200 ед. Учтем также время хранения сырья в интервале [4; 30] дней, так как три дня требуется на обработку сырья, а при сроке хранения 45 дней поставки сырья с остаточным сроком годности менее 15 дней нецелесообразны.

Таблица 2

Значения вероятности, гарантирующие непревышение установленного уровня суммарных затрат

q_i, ед.	t_j, дни						
	4	5	10	15	20	25	30
5	0,4099	0,4103	0,4125	0,4147	0,4169	0,4192	0,4215
10	0,5336	0,5345	0,5388	0,5432	0,5477	0,5523	0,5569
20	0,6325	0,6337	0,6394	0,6453	0,6511	0,6571	0,6631
25	0,6552	0,6564	0,6624	0,6684	0,6745	0,6806	0,6868
40	0,6898	0,6910	0,6972	0,7035	0,7097	0,7159	0,7222
50	0,7010	0,7022	0,7085	0,7147	0,7210	0,7272	0,7334
100	0,7199	0,7211	0,7275	0,7337	0,7400	0,7461	0,7523
200	0,7203	0,7216	0,7281	0,7345	0,7409	0,7472	0,7534

Ячейки, в которых значения удовлетворяют требованию $P_{C_\Sigma}(t, q) \geq \geq 70\,\%$, выделены цветом. Следуя разработанной методике, стоит выбирать объем поставки с максимальным остаточным сроком годности, т.е. минимальным временем хранения сырья на складе фабрики. Тогда оптимальный размер заказа составит 50 ед.

Рассмотрим поставленную задачу с другой стороны. Допустим, на момент осуществления заказа у фабрики группы компаний Ferrero имеется 100 ед. обработанного сырья, хранящегося на складе в течение пяти дней, 40 ед. — в течение 10 и 15 дней, 50 ед. — в течение 20 дней, 25 ед. — в течение 25 дней. Следовательно, определим значения вероятности, гарантирующей непревышение установленного уровня суммарных затрат (табл. 3).

Для оптимизации этого заказа составим целевую функцию и список ограничений:

$$f(q_i,\ t_i) = q_i P_{C_\Sigma}(q_i, t_i) \to \max;$$

$$\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{n\\ l}} q_{ij} = 200 \text{ ед.};\quad \sum_{i=1}^{7} q_{i5} \leq 100 \text{ ед.};\quad \sum_{i=1}^{5} q_{i6} \leq 40 \text{ ед.};$$

$$\sum_{i=1}^{5} q_{i7} \leq 40 \text{ ед.};\quad \sum_{i=1}^{6} q_{i8} \leq 50 \text{ ед.};\quad \sum_{i=1}^{4} q_{i9} \leq 25 \text{ ед.}$$

Для решения задачи воспользуемся надстройкой программы MS Excel “Поиск решений”, в результате вычислений получим оптимальное решение (табл. 4).

Таблица 3

Значения вероятности, гарантирующие непревышение установленного уровня суммарных затрат по имеющимся на складе позициям

q_i, ед.	t_j, дни						
	4	5	10	15	20	25	30
5	–	0,4103	0,4125	0,4147	0,4169	0,4192	–
10	–	0,5345	0,5388	0,5432	0,5477	0,5523	–
20	–	0,6337	0,6394	0,6453	0,6511	0,6571	–
25	–	0,6564	0,6624	0,6684	0,6745	0,6806	–
40	–	0,6910	0,6972	0,7035	0,7097	–	–
50	–	0,7022	–	–	0,7210	–	–
100	–	0,7211	–	–	–	–	–
200	–	–	–	–	–	–	–

Таблица 4

Оптимальное решение поставленной задачи

q_i, ед.	t_j, дни						
	4	5	10	15	20	25	30
5	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	10	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	25	0	0	25	0
40	0	0	0	40	0	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0
100	0	100	0	0	0	0	0
200	0	0	0	0	0	0	0

При таком решении значение целевой функции составляет:

$$f\left(q_i, t_i\right) = 100 \cdot 0{,}7211 + 25 \cdot 0{,}6624 + \\ + 40 \cdot 0{,}7035 + 10 \cdot 0{,}5477 + 25 \cdot 0{,}6806 = 139{,}3.$$

Зависимость вероятности, гарантирующей непревышение установленного уровня суммарных затрат, от размера заказа q и времени t хранения сырья на фабрике группы компаний Ferrero приведены на рис. 2.

В соответствии с представленной зависимостью максимальная вероятность непревышения установленного уровня суммарных затрат будет получена при максимальном времени хранения сырья на фабрике. Это обусловлено тем, что вероятность тем больше, чем меньше

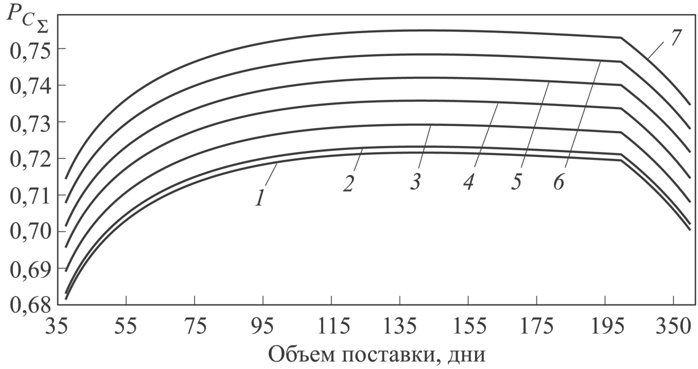

Рис. 2. Зависимость вероятности, гарантирующей непревышение установленного уровня затрат, от размера заказа и времени хранения сырья 4 (*1*), 5 (*2*), 10 (*3*), 15 (*4*), 20 (*5*), 25 (*6*) и 30 (*7*) дней

цена реализации сырья (покупатель имеет минимальные затраты, когда покупает дешевое сырье с максимальным временем хранения). Такой результат обусловлен начальным предположением при разработке модели, что цена сырья линейно уменьшается при увеличении срока хранения.

Поэтому в рассматриваемой модели максимальная вероятность не является критерием оптимизации, а только позволяет определить область допустимых значений. В частности, ясно, что при сроке хранения пять дней максимальная вероятность, гарантирующая непревышение установленного уровня суммарных затрат, будет получена, если размер заказа будет равен 145 ед. Кроме того, при сроке хранения на складе 25 дней максимальная вероятность будет, если размер заказа составит 150 ед.

Первая модель позволяет определить оптимальный размер поставки сырья с учетом его естественной убыли в процессе транспортировки и хранения. Допущение этой модели: естественная убыль сырья при транспортировке не учитывается, так как при налаженной транспортной сети время на транспортировку незначительно по сравнению со временем хранения сырья на фабрике группы компаний Ferrero. Также сделано предположение, что вследствие процесса уменьшения массы сырья в результате естественной убыли, цена реализации сырья линейно уменьшается. Полученная формула оптимального размера заказа представляет собой модифицированную формулу Вильсона, учитывающую норму естественной убыли сырья.

Вторая модель позволяет рассчитать вероятности, при которых суммарные затраты цепи поставок сырья не превысят установленного значения. Исходя из полученной таблицы, можно определить оптимальный размер поставки при допустимых вероятностях или сформировать поставку из сырья, имеющегося в наличии на фабрике группы компаний Ferrero с известным периодом хранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лубенцова В.С.* Математические методы и модели в логистике; под ред. В.П. Радченко. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2008. 157 с.
2. *Колобов А.А.*, *Омельченко И.Н.*, *Орлов А.И.* Менеджмент высоких технологий. Интегрированные производственно-корпоративные структуры: организация, экономика, управление, проектирование, эффективность, устойчивость. М.: Экзамен, 2008. 620 с.
3. *Приказ* Минэкономразвития РФ № 304 от 7 сентября 2007 г.
4. *Бродецкий Г.Л.*, *Гусев Д.А.* Экономико-математические методы и модели в логистике. Процедуры оптимизации. М.: Издательский центр "Академия", 2012. 290 с.
5. *Бочкарев А.А.* Планирование и моделирование цепи поставок. М.: Альфа-Пресс, 2008. 192 с.
6. *Шапиро Дж.* Моделирование цепи поставок; под ред. В.С. Лукинского; пер. с англ. СПб.: Питер, 2006. 720 с.
7. *Орлов А.И.* Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2006. 671 с.

REFERENCES

[1] Lubentsova V.S., Radchenko V.P., eds. Matematicheskie metody i modeli v logistike. [Mathematical methods and models in logistics]. Samara, SGTU Publ., 2008. 157 p.
[2] Kolobov A.A., Omel'chenko I.N., Orlov A.I. Menedzhment vysokikh tekhnologiy. Integrirovannye proizvodstvenno-korporativnye struktury: organizatsiya, ekonomika, upravlenie, proektirovanie, effektivnost', ustoychivost'. [Management of high technology. Integrated production and corporate structures: organization, economics, management, design, efficiency, sustainability]. Moscow, Examen Publ., 2008. 620 p.
[3] Prikaz Minekonomrazvitiya RF [Order of Ministry of Economic Development of RF]. Order number 304 of September 7, 2007.
[4] Brodetskiy G.L., Gusev D.A. Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli v logistike. Protsedury optimizatsii. [Economic and mathematical methods and models in logistics. Optimization procedures]. Moscow, Publ. Center "Academy", 2012. 290 p.
[5] Bochkarev A.A. Planirovanie i modelirovanie tsepi postavok [Planning and modeling of supply chain]. Moscow, Alfa-Press Publ., 2008. 192 p.
[6] Shapiro Jeremy F. Modeling the supply chain. Brooks/Cole-Thomson Learning, 2001. 586 p. (Russ. ed.: Shapiro Dzh. Modelirovanie tsepi postavok; per. s angl.; pod red. V.S. Lukinskogo. SPb, Piter Publ., 2006, 720 p.).
[7] Orlov A.I. Prikladnaya statistika [Applied Statistics]. Moscow, Examen Publ., 2006. 671 p.

Статья поступила в редакцию 17.03.2014

Алла Ефимовна Бром — д-р техн. наук, профессор кафедры "Промышленная логистика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области организации производства, управления предприятием, экономико-математического моделирования, логистики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская, д. 5.

A.E. Brom — Dr. Sci. (Eng.), professor of "Industrial Logistics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 50 publications in the field of production organization, business management, economic and mathematical modelling, logistics.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.