УДК 517.977.5

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ЗАКРЫТОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРЕХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ

П.В. Шнурков, **В.В. Засыпко**

МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва, Российская Федерация
e-mail: pshnurkov@hse.ru; vzasypko@gmail.com

Продолжено исследование математической задачи оптимального управления, сформулированной на основе закрытой динамической модели трехсекторной экономики. Состояние системы описано набором функций удельного капитала в каждом секторе; параметр управления — величина, характеризующая объем удельных инвестиций фондосоздающего сектора, играющего ключевую роль в экономической системе. Решение поставленной задачи оптимального управления основано на использовании принципа максимума Понтрягина. Для основных видов функции управления, удовлетворяющих условию максимума, получены явные аналитические представления для решений системы уравнений дифференциальной связи относительно функций состояний, а также для системы сопряженных уравнений. С учетом аналитических результатов разработана процедура определения оптимального управления, которая может быть реализована численными методами.

Ключевые слова: модель трехсекторной экономики, принцип максимума Понтрягина, оптимальное управление.

ANALYTICAL STUDY OF OPTIMAL INVESTMENTS CONTROL PROBLEM OF IN CLOSED-FORM DYNAMIC MODEL OF THREE-SECTOR ECONOMICS

P.V. Shnurkov, **V.V. Zasypko**

Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of the “Higher School of Economics” National Research University, Moscow, Russian Federation
e-mail: pshnurkov@hse.ru; vzasypko@gmail.com

The research of a math problem of the optimum control, formulated based on closed-form dynamic model of three-sector economy is continued. State of the system is described by set of specific capital functions in each sector; control parameter is a value characterizing the amount of specific investments of fund-generating sector, which is the key factor in economic system. Solution of assigned problem of optimal control is based on usage of Pontryagin’s maximum principle. For the main types of control functions, satisfying maximum condition, obvious analytical representations for the solution of simultaneous equations of differential constraint concerning functions of conditions are received. They are also valid for the simultaneous interfaced equations. Taking into account analytical results the definition procedure of optimum control was developed. The procedure can be realized by numerical techniques.

Keywords: model of three-sector economics, Pontryagin’s maximum principle, optimal control.

Введение. В работе [1] была поставлена математическая задача оптимального управления инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики. Эта задача была сформулирована в виде классической задачи оптимального управления на заданном конечном интервале времени с закрепленным левым концом траектории. Теоретическую основу исследования составил принцип максимума Понтрягина. Общая теория оптимального управления, составляющая содержание принципа максимума, изложена в работах [2–5], а вопросы, связанные с применением принципа максимума в задачах управления экономическими системами, — в работах [6–9]. Было проанализировано основное условие, входящее в принцип максимума, — условие максимума функции Понтрягина. Установлено, что функции $u_{1*}(t)$, задающие оптимальное управление, имеют аналитическое устройство, определяемое соотношением (9), приведенным в работе [1], и зависят от знака некоторой вспомогательной функции $Q(t) = Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$, называемой функцией переключений, которая в свою очередь аналитически выражается через сопряженные переменные $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$.

Основная особенность дальнейшего исследования рассматриваемой задачи оптимального управления заключается в том, что сопряженные переменные, а следовательно, и функция переключений $Q(t)$, зависят от функции управления $u_1(t)$. Таким образом, возникает весьма сложная система взаимосвязанных соотношений, состоящая из уравнений дифференциальной связи ((4) см. [1]), сопряженных уравнений ((6) см. [1]) и условий трансверсальности ((7) см. [1]). В настоящей работе эта система будет аналитически исследована при следующих дополнительных предположениях: функция переключений меняет знак в конечном числе изолированных точек и не существует интервалов положительной длины, на которых эта функция тождественно равна нулю. С позиции характера управления это означает, что функция, задающая оптимальное управление, кусочно-постоянна, принимает только два возможных значения (0 или 1), а переключения управления, т.е. изменения этих значений, происходят конечное число раз на заданном интервале времени $[0, T]$. Отметим, что именно такие управления являются оптимальными в некоторых классических задачах теории управления [3, 4, 6, 8–10]. В результате проведенного исследования будет разработана численно-аналитическая процедура определения функций состояний $k_0(t), k_1(t), k_2(t)$ и управления $u_1(t)$, удовлетворяющих необходимым условиям экстремума в форме принципа максимума.

Сделаем некоторое предварительное замечание об особенностях проводимого аналитического исследования.

Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$, $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_r < T$, $1 \leq r < \infty$, точки переключения управления на интервале $[0, T]$. Тогда можно зафиксировать значение функции управления на каждом интервале между соседними точками переключения, а значения в точках переключения дополнить из условия непрерывности справа. Таким образом, на каждом интервале между соседними точками переключения будут полностью заданы правые части уравнений дифференциальной связи.

В моменты переключения управления изменяется вид уравнений дифференциальной связи. Функции $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ будут задаваться различными аналитическими выражениями на разных интервалах времени между соседними точками переключения, но сохранят непрерывность во всех точках $t \in [0, T]$, включая точки переключения. Аналогичными особенностями обладают и функции $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$. Такие особенности функций, играющих роль основных и сопряженных переменных, будут использованы далее для нахождения их аналитических представлений. Именно, уравнения дифференциальной связи можно решать последовательно на интервалах времени $[0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \ldots, [\tau_r, T]$. При решении уравнений на интервале $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ в качестве граничного условия можно использовать найденные на предыдущем шаге значения функций состояний в точке τ_k, $k = 0, 1, \ldots, r$, $\tau_0 = 0$. Аналогично можно решать и системы сопряженных уравнений на указанных интервалах между точками переключений. Такие действия будут выполняться последовательно на интервалах $[\tau_r, T], [\tau_{r-1}, \tau_r], \ldots, [0, \tau_1]$. При решении уравнений на интервале $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ в качестве граничного условия следует использовать определенные на предыдущем шаге значения сопряженных переменных в точке τ_{k+1}, $k = r, r-1, \ldots, 0$; $\tau_{r+1} = T$.

Теоретически функция управления может иметь произвольное конечное число скачков (переключений управления) на конечном интервале времени. Однако в настоящей работе ограничимся рассмотрением следующих основных вариантов поведения функции управления: двух вариантов без переключения и двух вариантов с одним переключением, которое происходит в некоторой фиксированной точке τ, $0 < \tau < T$. Отметим, что вариант с произвольным конечным числом переключений управления может быть аналитически исследован аналогично варианту с одним переключением. Перейдем непосредственно к исследованию различных вариантов решений системы сопряженных уравнений.

Исследование сопряженных уравнений. Сопряженное уравнение относительно функции $p_1(t)$, входящее в систему (6), приведенную в работе [1], зависит явно от функции управления $u_1(t)$. Кроме того, в сопряженные уравнения входят функции $k_1(t)$, $k_2(t)$, выражающие состояния системы, которые также зависят от функции управления.

Запишем полное решение системы сопряженных уравнений для вариантов, когда функция управления не имеет переключений.

I. Пусть $Q(p_0, p_1, p_2) > 0$ при $t \in [0, T]$. В соответствии с принципом максимума (9) (см. [1]) $u_1 = 1, t \in [0, T]$. В таком варианте система сопряженных уравнений (6), приведенная в работе [1], принимает вид

$$\begin{aligned} &\dot{p}_0(t) = \lambda_0 p_0(t); \\ &\dot{p}_1(t) = \Big[\lambda_1 - A_1\alpha_1 k_1^{\alpha_1-1}(t)\Big] p_1(t); \\ &\dot{p}_2(t) = \lambda_2 p_2(t) - B_2 e^{-\delta t}\alpha_2 k_2^{\alpha_2-1}(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Запишем решение системы уравнений (1). Отметим, что в данном варианте управления функции $k_1(t)$ и $k_2(t)$ сохраняют единую форму. Сопряженные функции задаются едиными аналитическими выражениями на всем временно́м интервале $[0, T]$:

$$\begin{aligned} &p_0(t) = \psi_0^{(0)}(T) e^{\lambda_0(t-T)}; \\ &p_1(t) = \psi_1^{(0)}(T) e^{A_1\alpha_1 \int_t^T k_1^{\alpha_1-1}(z_2)\, dz_2 + \lambda_1(t-T)}; \\ &p_2(t) = e^{\lambda_2 t}\Big[e^{-\lambda_2 T}\psi_2^{(0)}(T) + B_2 \int\limits_t^T e^{(-\delta-\lambda_2)z_1} k_2^{\alpha_2-1}(z_1)\, dz_1\Big]. \end{aligned} \tag{2}$$

II. Пусть $Q(p_0, p_1, p_2) < 0$ при $t \in [0, T]$. В этом случае функция управления не имеет переключений и задается равенством $u_1(t) = 0$, $t \in [0, T]$. Получим систему дифференциальных уравнения для сопряженных переменных

$$\begin{aligned} &\dot{p}_0(t) = \lambda_0 p_0(t); \\ &\dot{p}_1(t) = \lambda_1 p_1(t) - A_1\alpha_1 k_1^{\alpha_1-1}(t)\Big[l_0^{(1)}\rho p_0(t) + l_0^{(2)}(1-\rho) p_2(t)\Big]; \\ &\dot{p}_2(t) = \lambda_2 p_2(t) - B_2 e^{-\delta t}\alpha_2 k_2^{\alpha_2-1}(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Следует отметить, что уравнения относительно переменных p_0 и p_2 из системы (3) совпадают с соответствующими уравнениями системы (1). Функция $k_2(t)$, входящая в уравнение относительно переменной p_2, имеет единое аналитическое представление на временном интервале $[0, T]$, хотя определяется при другой функции управления $u_1(t)$. Таким образом, аналитические формы решений уравнений относительно переменных p_0 и p_2, входящих в систему (3), совпадают с аналитическими формами решений соответствующих уравнений системы (1). Получаем решение системы сопряженных уравнений для второго варианта управления без переключений $u_1(t) = 0$, $t \in [0, T]$:

$$p_0(t) = \psi_0^{(0)}(T)e^{\lambda_0(t-T)};$$

$$p_1(t)=e^{\lambda_1 t}\Big[\psi_0^{(1)}(T)e^{-\lambda_1 T}+A_1\alpha_1\int_t^T e^{-\lambda_1 z_3}k_1^{\alpha_1-1}(z_3)\Big[l_0^{(1)}\rho\psi_0^{(0)}(T)e^{\lambda_0(z_3-T)}+$$

$$+\,l_0^{(2)}(1-\rho)\Big(e^{\lambda_2(z_3-T)}\psi_2^{(0)}(T)+e^{\lambda_2 z_3}B_2\int_{z_3}^T e^{(-\delta-\lambda_2)z_4}k_2^{\alpha_2-1}(z_4)\,dz_4\Big)\Big]\,dz_3\Big];$$

$$p_2(t) = e^{\lambda_2 t}\big[e^{-\lambda_2 T}\psi_2^{(0)}(T) + B_2\int_t^T e^{(-\delta-\lambda_2)z_1}k_2^{\alpha_2-1}(z_1)\,dz_1\big]. \qquad (4)$$

Рассмотрим варианты, когда функция управления имеет одну точку переключения τ, $0 < \tau < T$. В этом случае каждая функция $p_k(t)$, $k = 0, 1, 2$, принимает различные аналитические формы на интервалах $[0, \tau]$ и $[\tau, T]$ (обусловлено разными формами функции управления на указанных интервалах). Введем дополнительные обозначения для функций, задающих каждую сопряженную переменную $p_k(t), k = 0, 1, 2$, на приведенных интервалах:

$$p_k(t) = \begin{cases} p_k^{(0)}(t), & 0 \le t \le \tau; \\ p_k^{(1)}(t), & \tau \le t \le T, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2.$$

Можно предложить следующий метод аналитического определения функций $p_k^{(0)}(t), p_k^{(1)}(t), k = 0, 1, 2$.

1. Рассмотрим систему сопряженных уравнений (6) (см. [1]) на временно́м интервале $[\tau, T]$ при заданной функции управления $u_1(t)$. Добавим к этой системе условия трансверсальности (7) (см. [1]), которые представляют собой заданные граничные условия в точке $t = T$. Решение полученной задачи Коши образует набор функций $p_k^{(1)}(t), k = 0, 1, 2; t \in [\tau, T]$.

2. Рассмотрим систему сопряженных уравнений (6) (см. [1]) на временно́м интервале $[0, \tau]$ при другой форме функции управления $u_1(t)$, соответствующей этому интервалу. Чтобы задать граничные условия к данной системе, воспользуемся свойством непрерывности сопряженных переменных в точке переключения управления, в соответствии которым должны выполняться условия

$$p_k^{(0)}(\tau) = p_k^{(1)}(\tau), k = 0, 1, 2.$$

Значения функций $p_k^{(1)}(\tau), k = 0, 1, 2$, были определены на предыдущем этапе. Решение полученной задачи Коши образует набор функций $p_k^{(0)}(t), t \in [0,\tau], k = 0,1,2$. Таким образом, найдем представления для сопряженных переменных $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$ при любых значениях $t \in [0,T]$.

Перейдем к реализации изложенного метода. Получим явные представления для сопряженных переменных для двух вариантов, когда функция управления имеет одну точку переключения.

III. Пусть функция управления задается формулой

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \tau; \\ 0 & \tau \le t \le T. \end{cases} \tag{5}$$

Рассмотрим сначала интервал времени $[\tau, T]$. Если функция управления имеет вид (5), то на этом интервале $u_1(t) = 0, t \in [\tau, T]$. Тогда система сопряженных уравнений совпадает по форме с системой (3) при тех же граничных условиях в точке $t = T$, которые являются условиями трансверсальности. Таким образом, сопряженные переменные на указанном интервале задаются формулами (4). При $t \in [\tau, T]$

$$p_0^{(1)}(t) = \psi_0^{(0)}(T)e^{\lambda_0(t-T)};$$

$$p_1(t)=e^{\lambda_1 t}\Big[\psi_0^{(1)}(T)e^{-\lambda_1 T}+A_1\alpha_1\int_t^T e^{-\lambda_1 z_3}k_1^{\alpha_1-1}(z_3)\Big[l_0^{(1)}\rho\psi_0^{(0)}(T)e^{\lambda_0(z_3-T)}+$$

$$+\,l_0^{(2)}(1-\rho)\Big(e^{\lambda_2(z_3-T)}\psi_2^{(0)}(T)+e^{\lambda_2 z_3}B_2\int_{z_3}^T e^{(-\delta-\lambda_2)z_4}k_2^{\alpha_2-1}(z_4)\,dz_4\Big)\Big]\,dz_3\Big];$$

$$p_2^{(1)}(t) = e^{\lambda_2 t}\big[e^{-\lambda_2 T}\psi_2^{(0)}(T) + B_2\int_t^T e^{(-\delta-\lambda_2)z_1}k_2^{\alpha_2-1}(z_1)\,dz_1\big]. \tag{6}$$

Используя (6), зафиксируем значения функций $p_k(t)$ в точке $t = \tau$

$$p_0(\tau) = p_0^{(1)}(\tau) = \psi_0^{(0)}(T)e^{\lambda_0(\tau-T)} = p_{0,\tau};$$

$$p_1(\tau) = p_1^{(1)}(\tau) =$$

$$= e^{\lambda_1\tau}\Big[\psi_0^{(1)}(T)e^{-\lambda_1 T} + A_1\alpha_1\int_\tau^T e^{-\lambda_1 z_3}k_1^{\alpha_1-1}(z_3)\Big(l_0^{(1)}\rho\psi_0^{(0)}(T)e^{\lambda_0(z_3-T)}+$$

$$+\,l_0^{(2)}(1-\rho)(e^{\lambda_2(z_3-T)}\psi_2^{(0)}(T)+$$

$$+\,e^{\lambda_2 z_3}B_2\int_{z_3}^T e^{(-\delta-\lambda_2)z_4}k_2^{\alpha_2-1}(z_4)\,dz_4)\Big)\,dz_3\Big]= p_{1,\tau};$$

$$p_2(\tau)=p_2^{(1)}(\tau)=e^{\lambda_2\tau}\big[e^{-\lambda_2 T}\psi_2^{(0)}(T)+B_2\int_\tau^T e^{(-\delta-\lambda_2)z_1}k_2^{\alpha_2-1}(z_1)\,dz_1\big] = p_{2,\tau}. \tag{7}$$

Теперь найдем решение сопряженных дифференциальных уравнений на интервале времени $[0,\tau]$ при функции управления $u_1(t) = 1$,

$0 \le t \le \tau$. По форме система сопряженных уравнений на интервале $[0,\tau]$ совпадает с системой (1). Граничные условия в точке $t=\tau$ определяются из свойства непрерывности сопряженных функций

$$p_k^{(0)}(\tau) = p_{k,\tau}, \quad k=0,1,2.$$

Тогда сопряженные переменные на интервале $[0,\tau]$ находятся по формулам, аналогичным формулам (2) при указанных выше граничных условиях:

$$\begin{aligned} &p_0^{(0)}(t) = p_{0,\tau} e^{\lambda_0(t-\tau)};\\ &p_1^{(0)}(t) = p_{1,\tau} e^{A_1\alpha_1 \int_t^\tau k_1^{\alpha_1-1}(z_2)\,dz_2 + \lambda_1(t-\tau)};\\ &p_2^{(0)}(t) = e^{\lambda_2 t}\Big[p_{2,\tau}e^{-\lambda_2\tau} + B_2\int\limits_t^\tau e^{(-\delta-\lambda_2)z_1}k_2^{\alpha_2-1}(z_1)\,dz_1\Big]. \end{aligned} \tag{8}$$

Объединяя соотношения (6) и (8), получаем явные аналитические представления для сопряженных переменных на всем интервале времени $[0,T]$ для варианта, когда функция управления имеет одну точку переключения $\tau \in [0,T]$ и задается формулой (5).

IV. Пусть функция управления имеет вид

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < \tau;\\ 1 & \tau \le t \le T. \end{cases} \tag{9}$$

Как и для предыдущего варианта управления с одним переключением (5), найдем решения сопряженных уравнений. Рассмотрим сначала интервал $[\tau,T]$, поскольку на этом интервале функция управления $u_1(t)=1$, система сопряженных уравнений совпадает с системой (1). Граничные условия в точке $t=T$ представляют собой условия трансверсальности. Такая задача Коши уже была решена ранее на всем временном интервале $[0,T]$, это решение было представлено формулами (2). Следовательно, решение системы сопряженных уравнений для функции управления (9) на интервале $[\tau,T]$ также имеет вид (2) при $\tau \le t \le T$.

Запишем значения сопряженных переменных в точке $t=\tau$, исходя из формул (2):

$$\begin{aligned} &p_0(\tau) = p_0^{(1)}(\tau) = \psi_0^{(0)}(T)e^{\lambda_0(\tau-T)} = \tilde p_{0,\tau};\\ &p_1(\tau) = p_1^{(1)}(\tau) = \psi_1^{(0)}(T)e^{A_1\alpha_1\int_\tau^T k_1^{\alpha_1-1}(z_2)dz_2 + \lambda_1(\tau-T)} = \tilde p_{1,\tau};\\ &p_2(\tau) = p_2^{(1)}(\tau) = e^{\lambda_2\tau}\big[e^{-\lambda_2 T}\psi_2^{(0)}(T) +\\ &\qquad\qquad + B_2\int_\tau^T e^{(-\delta-\lambda_2)z_1}k_2^{\alpha_2-1}(z_1)\,dz_1\big] = \tilde p_{2,\tau}. \end{aligned} \tag{10}$$

Найдем решения сопряженных уравнений на интервале $[0, \tau]$, где функция управления $u_1(t) = 0$, система сопряженных уравнений по форме совпадает с системой (3). Граничные условия в точке $t = \tau$ задаются равенствами

$$p_k(\tau) = p_k^{(0)}(\tau) = \tilde{p}_{k,\tau}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{11}$$

Решение системы сопряженных уравнений для функции управления $u_1(t) = 0$ на всем интервале $[0, T]$ было представлено формулами (11). Следовательно, решение этой системы для функции управления (9) на интервале времени $[0, \tau]$ также имеет форму (4) с учетом изменения граничных условий. Таким образом, можно записать полное представление для сопряженных переменных для варианта, когда функция управления имеет вид (9):

$$\begin{gathered}
p_0^{(0)}(t) = \tilde{p}_{0,\tau} e^{\lambda_0 (t-\tau)};\\
p_1^{(0)}(t) = e^{\lambda_1 t}\Big[\tilde{p}_{1,\tau} e^{-\lambda_1 \tau} + A_1 \alpha_1 \int_t^\tau e^{-\lambda_1 z_3} k_1^{\alpha_1 - 1}(z_3)\Big(\tilde{p}_{0,\tau} l_0^{(1)} \rho e^{\lambda_0 (z_3 - \tau)} +\\
+ l_0^{(2)} (1-\rho)(\tilde{p}_{2,\tau} e^{\lambda_2 (z_3 - \tau)} + e^{\lambda_2 z_3} B_2 \int_{z_3}^\tau e^{(-\delta - \lambda_2) z_4} k_2^{\alpha_2 - 1}(z_4)\, dz_4)\Big)\, dz_3\Big];\\
p_2^{(0)}(t) = e^{\lambda_2 t}\big[\tilde{p}_{2,\tau} e^{-\lambda_2 \tau} + B_2 \int_t^\tau e^{(-\delta - \lambda_2) z_1} k_2^{\alpha_2 - 1}(z_1)\, dz_1\big], \quad t \in [0, \tau];
\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}
p_0^{(1)}(t) = \psi_0^{(0)}(T) e^{\lambda_0 (t - T)};\\
p_1^{(1)}(t) = \psi_1^{(0)}(T) e^{A_1 \alpha_1 \int_t^T k_1^{\alpha_1 - 1}(z_2)\, dz_2 + \lambda_1 (t - T)};\\
p_2^{(1)}(t) = e^{\lambda_2 t}\big[\psi_2^{(0)}(T) e^{-\lambda_2 T} + B_2 \int_t^T e^{(-\delta - \lambda_2) z_1} k_2^{\alpha_2 - 1}(z_1)\, dz_1\big], \quad t \in [\tau, T].
\end{gathered} \tag{13}$$

Итак, завершен первый этап исследования сопряженных уравнений. Соотношения (2) и (4) определяют решение этих уравнений, когда функция управления не имеет переключений, а соотношения (6), (8) и (12), (13) — когда у функции управления есть одна точка переключения τ, $0 < \tau < T$. Во всех вариантах сопряженные переменные выражаются через функции состояний системы $k_1(t)$, $k_2(t)$, которые пока неизвестны. В следующем параграфе будут найдены решения системы уравнений дифференциальной связи для различных вариантов функции управления.

Получение представлений для функций удельного капитала при различных режимах управления. Исследуем систему уравнений дифференциальной связи (4) (см. [1]). В соответствии с принятыми ранее предположениями рассмотрим четыре основных варианта поведения функции переключений $Q(p_0, p_1, p_2)$ на интервале $[0, T]$:

$$Q(p_0, p_1, p_2) > 0 \qquad \text{при} \quad t \in [0, T]; \tag{14}$$

$$Q(p_0, p_1, p_2) < 0 \qquad \text{при} \quad t \in [0, T]; \tag{15}$$

существует точка $\tau \in [0, T]$ такая, что

$$\begin{aligned} &Q(p_0, p_1, p_2) > 0 \qquad \text{при} \quad 0 \le t < \tau; \\ &Q(p_0, p_1, p_2) < 0 \qquad \text{при} \quad \tau < t \le T. \end{aligned} \tag{16}$$

существует точка $\tau \in [0, T]$ такая, что

$$\begin{aligned} &Q(p_0, p_1, p_2) < 0 \qquad \text{при} \quad 0 \le t < \tau; \\ &Q(p_0, p_1, p_2) > 0 \qquad \text{при} \quad \tau < t \le T. \end{aligned} \tag{17}$$

Для каждого указанного варианта известно выражение для оптимального управления, определяемое соотношением (9), приведенным в работе [1]. С учетом этого соотношения представим решения уравнений дифференциальной связи относительно величин $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ на заданном временном интервале $[0, T]$.

I. Пусть функция переключений удовлетворяет условию (14) при всех $t \in [0, T]$. Тогда функция управления $u_1(t) = 1$ на всем временном интервале $[0, T]$, при этом система дифференциальных уравнений ((4) см. [1]) (дифференциальная связь) принимает вид

$$\begin{aligned} &\dot{k}_0(t) = -\lambda_0 k_0(t), \\ &\dot{k}_1(t) = -\lambda_1 k_1(t) + A_1 k_1^{\alpha_1}(t), \\ &\dot{k}_2(t) = -\lambda_2 k_2(t). \end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения относительно величин $k_0(t)$ и $k_2(t)$ системы (18) являются линейными однородными уравнениями первого порядка, а уравнение относительно функции $k_1(t)$ представляет собой уравнение Бернулли. Методы решения таких уравнений известны в классической теории дифференциальных уравнений. Используя эти результаты [11, 12], получаем решение системы уравнений (18) в явном виде

$$\begin{aligned} &k_0(t) = k_{0,0} e^{-\lambda_0 t}; \\ &k_1(t) = \left(e^{-\lambda_1 (1-\alpha_1) t} \left(k_{1,0}^{1-\alpha_1} - \frac{A_1}{\lambda_1} \right) + \frac{A_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}; \\ &k_2(t) = k_{2,0} e^{-\lambda_2 t}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{19}$$

II. Пусть функция переключений удовлетворяет условию (15) при всех $t \in [0, T]$. Тогда функция управления задается равенством $u_1(t) = 0$, а система дифференциальных уравнений ((4) см. [1]) (дифференциальная связь) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{k}_0(t) = -\lambda_0 k_0(t) + l_0^{(1)} \rho A_1 k_1^{\alpha_1}(t);\\
&\dot{k}_1(t) = -\lambda_1 k_1(t);\\
&\dot{k}_2(t) = -\lambda_2 k_2(t) + l_2^{(1)} (1-\rho) A_1 k_1^{\alpha_1}(t).
\end{aligned} \tag{20}
$$

Уравнение относительно функции $k_1(t)$ из системы (20) — линейное однородное уравнение первого порядка, решение которого найдем с учетом граничного условия $k_1(0) = k_{1,0}$. Подставив полученное решение в уравнения относительно функций $k_0(t), k_2(t)$, получим линейные неоднородные уравнения первого порядка с заданной правой частью, которые также могут быть решены известным методом [11, 12]. Как и в предыдущем варианте, объединим решения отдельных уравнений системы (20) в единую запись, следовательно

$$
\begin{aligned}
&k_0(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(k_{0,0} - \frac{l_0^{(1)} \rho A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_0 - \lambda_1\alpha_1}\right) + e^{-\lambda_1\alpha_1 t}\frac{l_0^{(1)} \rho A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_0 - \lambda_1\alpha_1};\\
&k_1(t) = k_{1,0} e^{-\lambda_1 t};\\
&k_2(t) = e^{-\lambda_2 t}\left(k_{2,0} - \frac{l_2^{(1)} (1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1\alpha_1}\right) + e^{-\lambda_1\alpha_1 t}\frac{l_2^{(1)} (1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1\alpha_1}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

III. Пусть функция переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ удовлетворяет условию (16) (одно переключение). В этом случае функция управления $u_1(t)$, определяемая согласно принципу максимума, задается формулой (5). Отметим, что в рассматриваемом варианте с одним переключением управления в точке $t = \tau$ функции состояний $k_0(t), k_1(t), k_2(t)$ имеют различную аналитическую форму на интервалах $[0, \tau]$ и $[\tau, T]$. В связи с этим введем дополнительные обозначения для таких аналитических форм, аналогичные соответствующим обозначениям для сопряженных переменных:

$$
k_i(t) = \begin{cases} k_i^{(0)}(t) & 0 \le t \le \tau,\\ k_i^{(1)}(t) & \tau \le t \le T, \quad i = 0, 1, 2. \end{cases}
$$

Отметим также, что в силу свойства непрерывности функций состояний $k_0(t), k_1(t), k_2(t)$ при всех значениях $t \in [0, T]$ имеют место равенства

$$
k_i^{(0)}(\tau) = k_i^{(1)}(\tau), \quad i = 0, 1, 2.
$$

Система дифференциальной связи ((4) см. [1]) на интервале $0 \le t \le \tau$

принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{k}_0^{(0)}(t) = -\lambda_0 k_0^{(0)}(t);\\
&\dot{k}_1^{(0)}(t) = -\lambda_1 k_1^{(0)}(t) + A_1[k_1^{(0)}(t)]^{\alpha_1};\\
&\dot{k}_2^{(0)}(t) = -\lambda_2 k_2^{(0)}(t).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Система дифференциальных уравнений (22) совпадает с системой (18), заданной на всем временно́м интервале $0 \le t \le T$. Граничные условия для систем (22) и (18) также совпадают. Для системы дифференциальных уравнений (18) было найдено аналитическое решение, определяемое по (19). Воспользовавшись этим решением, запишем решение системы (22), определенной на интервале $0 \le t \le \tau$:

$$
\begin{aligned}
&k_0^{(0)}(t) = k_{0,0} e^{-\lambda_0 t};\\
&k_1^{(0)}(t) = \left(e^{-\lambda_1(1-\alpha_1)t}\left(k_{1,0}^{1-\alpha_1} - \frac{A_1}{\lambda_1}\right) + \frac{A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}};\\
&k_2^{(0)}(t) = k_{2,0} e^{-\lambda_2 t}.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

В соответствии с соотношением (9), приведенным в работе [1] в момент переключения τ изменяется характер управления. Поскольку в рассматриваемом варианте функция управления имеет вид (5), получаем при $t \in [\tau, T]$ $\;u_1(t) = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений ((4) см. [1]) (дифференциальная связь) на интервале $\tau \le t \le T$ принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\dot{k}_0^{(1)}(t) = -\lambda_0 k_0^{(1)}(t) + l_0^{(1)} \rho A_1 [k_1^{(1)}(t)]^{\alpha_1};\\
&\dot{k}_1^{(1)}(t) = -\lambda_1 k_1^{(1)}(t);\\
&\dot{k}_2^{(1)}(t) = -\lambda_2 k_2^{(1)}(t) + l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 [k_1^{(1)}(t)]^{\alpha_1}.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Как уже было отмечено, начальные условия к системе (24) в точке $t = \tau$ определяются из свойства непрерывности функций $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ при всех значениях t, $0 \le t \le T$. Введем дополнительные обозначения для фиксированных значений функций $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$, задаваемых формулами (23), в точке $t = \tau$:

$$
\begin{aligned}
&k_0^{(0)}(\tau) = k_{0,0} e^{-\lambda_0 \tau} = k_{0,\tau};\\
&k_1^{(0)}(\tau) = \left(e^{-\lambda_1(1-\alpha_1)\tau}\left(k_{1,0}^{1-\alpha_1} - \frac{A_1}{\lambda_1}\right) + \frac{A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} = k_{1,\tau};\\
&k_2^{(0)}(\tau) = k_{2,0} e^{-\lambda_2 \tau} = k_{2,\tau}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Величины $k_{0,\tau}$, $k_{1,\tau}$, $k_{2,\tau}$, определяемые по (25), задают начальные условия в точке $t = \tau$ к системе (24). С учетом этих условий найдем решение системы (24).

Отметим, что по форме система (24) совпадает с системой (20), поскольку функция управления $u_1(t)$ у них одна и та же. При этом система (24) рассматривается на другом временном интервале и с другими начальными условиями. Метод решения системы (24) остается прежним: сначала решается линейное однородное уравнение первого порядка относительно функции $k_1^{(1)}(t)$, а затем полученное решение подставляется в уравнения относительно функций $k_0^{(1)}(t), k_2^{(1)}(t)$. В результате образуются два неоднородных дифференциальных уравнения первого порядка с заданными правыми частями, которые решаются стандартным способом [11, 12]. Запишем полученное решение в форме системы и объединим с решением (23). В результате явное аналитическое представление для функций состояний исследуемой системы (функции удельного капитала) на всем интервале $[0, T]$ для варианта, когда функция управления задается формулой (5), имеет вид

$$
\begin{aligned}
&k_0^{(0)}(t) = k_{0,0}e^{-\lambda_0 t};\\
&k_1^{(0)}(t) = \left(e^{-\lambda_1(1-\alpha_1)t}\left(k_{1,0}^{1-\alpha_1} - \frac{A_1}{\lambda_1}\right) + \frac{A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}};\\
&k_2^{(0)}(t) = k_{2,0}e^{-\lambda_2 t}, \qquad 0 \le t \le \tau;\\
&k_0^{(1)}(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(k_{0,\tau}e^{\lambda_0\tau} + \frac{l_0^{(1)}\rho A_1 k_{1,\tau}^{\alpha_1} e^{\lambda_1\tau}}{\lambda_0 - \lambda_1\alpha_1}\left(e^{(\lambda_0-\lambda_1\alpha_1)t} - e^{(\lambda_0-\lambda_1\alpha_1)\tau}\right)\right);\\
&k_1^{(1)}(t) = k_{1,\tau}e^{-\lambda_1(t-\tau)};\\
&k_2^{(1)}(t) = e^{-\lambda_2 t}\left(k_{2,\tau}e^{\lambda_2\tau} + \frac{l_2^{(1)}(1-\rho)A_1 k_{1,\tau}^{\alpha_1} e^{\lambda_1\tau}}{\lambda_0 - \lambda_1\alpha_1}\left(e^{(\lambda_2-\lambda_1\alpha_1)t} - e^{(\lambda_2-\lambda_1\alpha_1)\tau}\right)\right),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \tau \le t \le T,
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где $k_{0,\tau}$, $k_{1,\tau}$, $k_{2,\tau}$ — величины, заданные соотношениями (25).

IV. Пусть функция переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ удовлетворяет условию (17). С учетом структуры оптимального управления ((9) см. [1]), функция управления $u_1(t)$ на интервале $0 \le t \le T$ задается формулой (9).

Решение системы уравнений дифференциальной связи для рассматриваемого варианта с переключением управления аналогично решению этой системы для предыдущего варианта с переключением. Опуская технические подробности такого решения, приведем итоговый результат. Запишем явные аналитические представления для функций удельного капитала $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ при указанной функции управления:

$$k_0^{(0)}(t) = e^{-\lambda_0 t}\left(k_{0,0} - \frac{l_0^{(1)}\rho A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_0 - \lambda_1\alpha_1}\right) + e^{-\lambda_1\alpha_1 t}\frac{l_0^{(1)}\rho A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_0 - \lambda_1\alpha_1};$$

$$k_1^{(0)}(t) = k_{1,0}e^{-\lambda_1 t};$$

$$k_2^{(0)}(t) = e^{-\lambda_2 t}\left(k_{2,0} - \frac{l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1\alpha_1}\right) +$$

$$+ e^{-\lambda_1\alpha_1 t}\frac{l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1\alpha_1}, \quad 0 \le t \le \tau;$$

$$k_0^{(1)}(t) = k_{0,\tau}e^{-\lambda_0(t-\tau)};$$

$$k_1^{(1)}(t) = \left(e^{-\lambda_1(1-\alpha_1)(t-\tau)}k_{1,\tau}^{1-\alpha_1} + \frac{A_1}{\lambda_1}\left[1 - e^{\lambda_1(1-\alpha_1)(t-\tau)}\right]\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}};$$

$$k_2^{(1)}(t) = k_{2,\tau}e^{-\lambda_1(t-\tau)}, \quad \tau \le t \le T.$$

Значения функций состояний $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ в точке переключения управления $t = \tau$ определяются, как и ранее, из условия непрерывности этих функций при всех значениях $t \in [0, T]$:

$$k_0^{(0)}(\tau) = e^{-\lambda_0 \tau}\left(k_{0,0} - \frac{l_0^{(1)}\rho A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_0 - \lambda_1\alpha_1}\right) + e^{-\lambda_1\alpha_1 \tau}\frac{l_0^{(1)}\rho A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_0 - \lambda_1\alpha_1} = \tilde{k}_{0,\tau};$$

$$k_1^{(0)}(\tau) = k_{1,0}e^{-\lambda_1 \tau} = \tilde{k}_{1,\tau};$$

$$k_2^{(0)}(\tau)=e^{-\lambda_2 \tau}\left(k_{2,0} - \frac{l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1\alpha_1}\right) + e^{-\lambda_1\alpha_1 \tau}\frac{l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1\alpha_1} = \tilde{k}_{2,\tau}. \tag{27}$$

Итак, для каждого основного варианта поведения функций управления на интервале $[0, T]$ получены явные представления для функций удельного капитала $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$, являющихся состояниями рассматриваемой динамической экономической системы (формулы (19), (21), (26), (27)).

Аналитические представления для сопряженных переменных. Отметим, что полученные решения системы сопряженных уравнений зависят от функций состояний $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$, определены явные представления для указанных функций состояний как решения системы уравнений дифференциальной связи ((4) см. [1]) при различных вариантах структуры функции управления $u_1(t)$. Таким образом, появляется возможность подставить представления для функций $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ в найденные выражения для сопряженных переменных и получить для функций $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ явные аналитические представления для рассматриваемых вариантов структуры функции управления. Выполним указанную подстановку для каждого варианта поведения функции переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$, $0 \le t \le T$, и соответствующих им четырех основных вариантов структуры функции управления $u_1(t)$.

I. Функция переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ удовлетворяет условию (14), решение уравнений дифференциальной связи (18), имеющее вид (19), известно. Из (12) с учетом (19) получим явное представление для сопряженных переменных

$$p_0(t) = \psi_0^{(0)}(T) e^{\lambda_0 (t-T)};$$

$$p_1(t) = \psi_1^{(0)}(T) e^{A_1 \alpha_1 \int_t^T \left[e^{-\lambda_1 (1-\alpha_1) z_2} \left(k_{1,0}^{1-\alpha_1} - \frac{A_1}{\lambda_1} \right) + \frac{A_1}{\lambda_1} \right]^{-1} dz_2 + \lambda_1 (t-T)};$$

$$p_2(t) = e^{\lambda_2 t} \left[e^{-\lambda_2 T} \psi_2^{(0)}(T) + B_2 \frac{k_{2,0}^{\alpha_2 - 1}}{-\delta - \lambda_2 \alpha_2} \left(e^{T(-\delta - \lambda_2 \alpha_2)} - e^{t(-\delta - \lambda_2 \alpha_2)} \right) \right]. \tag{28}$$

II. Функция переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ удовлетворяет условию (15). При этом система уравнений дифференциальной связи (20) имеет решение, определяемое по соотношениям (21). Подставляя (21) в (4), получаем

$$p_0(t) = \psi_0^{(0)}(T) e^{\lambda_0 (t-T)};$$

$$p_1(t) = e^{\lambda_1 t} \Bigg[\psi_0^{(1)}(T) e^{-\lambda_1 T} + A_1 \alpha_1 \int_t^T k_{1,0}^{\alpha_1 - 1} e^{-\lambda_1 \alpha_1 z_3} \Bigg(l_0^{(1)} \rho \psi_0^{(0)}(T) e^{\lambda_0 (z_3 - T)} +$$
$$+ l_0^{(2)} (1-\rho) \Bigg[e^{\lambda_2 (z_3 - T)} \psi_2^{(0)}(T) + e^{\lambda_2 z_3} B_2 \int_{z_3}^T e^{(-\delta - \lambda_2) z_4} \times$$
$$\times \Bigg(e^{-\lambda_2 z_4} \left(k_{2,0} - \frac{l_2^{(1)} (1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1} \right) +$$
$$+ e^{-\lambda_1 \alpha_1 z_4} \frac{l_2^{(1)} (1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1} \Bigg)^{\alpha_2 - 1} dz_4 \Bigg] \Bigg) dz_3 \Bigg];$$

$$p_2(t) = e^{\lambda_2 t} \Big[e^{-\lambda_2 T} \psi_2^{(0)}(T) +$$
$$+ B_2 \int_t^T e^{(-\delta - \lambda_2) z_1} \Bigg(e^{-\lambda_2 z_1} \left(k_{2,0} - \frac{l_2^{(1)} (1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1} \right) +$$
$$+ e^{-\lambda_1 \alpha_1 z_1} \frac{l_2^{(1)} (1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1} \Bigg)^{\alpha_2 - 1} dz_1 \Bigg]. \tag{29}$$

III. Функция переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ удовлетворяет условию (16). Для этого варианта было получено решение (26) системы уравнений дифференциальной связи. Подставляя (26) в соотношения (6) и (8), определяем явные представления для сопряженных переменных:

$$p_0^{(0)}(t) = p_{0,\tau} e^{\lambda_0 (t-\tau)};$$

$$p_1^{(0)}(t) = p_{1,\tau} e^{A_1\alpha_1 \int_t^\tau \left(e^{-\lambda_1(1-\alpha_1)z_2} \left(k_{1,0}^{1-\alpha_1} - \frac{A_1}{\lambda_1} \right) + \frac{A_1}{\lambda_1} \right)^{-1} dz_2 + \lambda_1(t-\tau)};$$

$$p_2^{(0)}(t) = e^{\lambda_2 t}\left[p_{2,\tau} e^{-\lambda_2\tau} - \frac{B_2 k_{2,0}^{\alpha_2-1}}{\delta+\alpha_2\lambda_2} \left(e^{-(\delta+\lambda_2\alpha_2)t} - e^{-(\delta+\lambda_2\alpha_2)\tau} \right) \right],\ t\in[0,\tau]; \tag{30}$$

$$p_0^{(1)}(t) = \psi_0^{(0)}(T) e^{\lambda_0(t-T)};$$

$$p_1^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t}\Big[\psi_0^{(1)}(T) e^{-\lambda_1 T} + A_1\alpha_1 \int_t^T k_{1,\tau}^{\alpha_1-1} e^{-\lambda_1(z_3+(\alpha_1-1)(z_3-\tau))} \times$$

$$\times \Bigg[(l_0^{(1)} \rho \psi_0^{(0)}(T) e^{\lambda_0(z_3-T)} + l_0^{(2)}(1-\rho)\Bigg(e^{\lambda_2(z_3-T)} \psi_2^{(0)}(T) + e^{\lambda_2 z_3} B_2 \times$$

$$\times \int_{z_3}^{T} e^{(-\delta-\lambda_2\alpha_2)z_4} \Bigg(k_{2,\tau} e^{\lambda_2\tau} + \frac{l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_{1,\tau}^{\alpha_1} e^{\lambda_1\tau}}{\lambda_0 - \lambda_1\alpha_1} \times$$

$$\times \left(e^{(\lambda_2-\lambda_1\alpha_1)z_4} - e^{(\lambda_2-\lambda_1\alpha_1)\tau} \right) \Bigg)^{\alpha_2-1} dz_4 \Bigg)\Bigg) dz_3 \Bigg];$$

$$p_2^{(1)}(t) = e^{\lambda_2 t}\Bigg[\psi_2^{(0)}(T) e^{-\lambda_2} T + B_2 \int_t^T e^{-\delta z_1 - \lambda_2\alpha_2} \times$$

$$\times \left(k_{2,\tau} e^{\lambda_2\tau} + \frac{l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_{1,\tau}^{\alpha_1} e^{\lambda_1\tau}}{\lambda_0-\lambda_1\alpha_1} \left(e^{(\lambda_2-\lambda_1\alpha_1)z_1} - e^{(\lambda_2-\lambda_1\alpha_1)\tau} \right) \right)^{\alpha_2-1} dz_1 \Bigg],$$

$$t\in[\tau, T]. \tag{31}$$

где $k_{0,\tau}$, $k_{1,\tau}$, $k_{2,\tau}$; $p_{0,\tau}$, $p_{1,\tau}$, $p_{2,\tau}$ — величины, заданные формулами (25) и (7).

IV. Функция переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ удовлетворяет условию (17). Аналитические выражения для функций состояния рассматриваемой динамической системы задаются равенствами (27), подставив которые в соотношения (12) и (13), получаем явные представления для сопряженных переменных

$$p_0^{(0)}(t) = \tilde{p}_{0,\tau} e^{\lambda_0 (t-\tau)};$$

$$p_1^{(0)}(t) = e^{\lambda_1 t}\Big[\tilde{p}_{1,\tau} e^{-\lambda_1 \tau} + A_1 \alpha_1 k_{1,0}^{\alpha_1 - 1} \int_t^\tau e^{-\lambda_1 z_3 \alpha_1} \Big(\tilde{p}_{0,\tau} l_0^{(1)} \rho e^{\lambda_0 (z_3 - \tau)} +$$

$$+ l_0^{(2)} (1-\rho)(\tilde{p}_{2,\tau} e^{\lambda_2 (z_3 - \tau)} + e^{\lambda_2 z_3} B_2 \int_{z_3}^\tau e^{(-\delta - \lambda_2) z_4} \times$$

$$\times \Big[e^{-\lambda_2 z_4}\Big(k_{2,0} - \frac{l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1}\Big) e^{-\lambda_1 \alpha_1 z_4} \frac{l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1}\Big]^{\alpha_2 - 1} dz_4)\Big) dz_3\Big]; \tag{32}$$

$$p_2^{(0)}(t) = e^{\lambda_2 t}\big[\tilde{p}_{2,\tau} e^{-\lambda_2 \tau} + B_2 \int_t^\tau e^{(-\delta - \lambda_2) z_1} \Big[e^{-\lambda_2 z_1}\Big(k_{2,0} - \frac{l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1}\Big) +$$

$$+ e^{-\lambda_1 \alpha_1 z_1} \frac{l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_{1,0}^{\alpha_1}}{\lambda_2 - \lambda_1 \alpha_1}\Big]^{\alpha_2 - 1} dz_1\big], \quad t \in [0, \tau]; \tag{33}$$

$$\begin{aligned} p_0^{(1)}(t) &= \psi_0^{(0)}(T) e^{\lambda_0 (t - T)}; \\ p_1^{(1)}(t) &= \psi_1^{(0)}(T) \times \\ &\times e^{A_1 \alpha_1 \int_t^T \left[e^{-\lambda_1 (1-\alpha_1)(t-\tau)} \tilde{k}_{1,\tau}^{1-\alpha_1} + \frac{A_1}{\lambda_1}[1 - e^{\lambda_1 (1-\alpha_1)(t-\tau)}]\right]^{-1} dz_2 + \lambda_1 (t - T)}; \\ p_2^{(1)}(t) &= e^{\lambda_2 t}\Bigg[\psi_2^{(0)}(T) e^{-\lambda_2 T} + B_2 \tilde{k}_{2,\tau}^{\alpha_2 - 1} \frac{e^{\lambda_1 \tau (\alpha_2 - 1)}}{-\delta - \lambda_2 - \lambda_1 (\alpha_2 - 1)} \times \\ &\times \Big[e^{T(-\delta - \lambda_2 - \lambda_1(\alpha_2 - 1))} - e^{t(-\delta - \lambda_2 - \lambda_1 (\alpha_2 - 1))}\Big]\Bigg], \quad t \in [\tau, T]. \end{aligned} \tag{34}$$

Величины $\tilde{k}_{0,\tau}$, $\tilde{k}_{1,\tau}$, $\tilde{k}_{2,\tau}$, а также $\tilde{p}_{0,\tau}$, $\tilde{p}_{1,\tau}$, $\tilde{p}_{2,\tau}$ заданы формулами (28) и (10).

Отметим еще раз, что структура оптимального управления определяется в зависимости от поведения функции переключений $Q(p_0, p_1, p_2)$, зависящей от сопряженных переменных $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$. Основная трудность проблемы аналитического решения задачи оптимального управления заключается в том, что сопряженные переменные зависят от выбранной функции управления. Далее будет изложена процедура определения функции управления $u_{1*}(t)$ и соответствующих ей функций состояний системы (траекторий) $k_{0*}(t)$, $k_{1*}(t)$, $k_{2*}(t)$, удовлетворяющих необходимым условиям экстремума в форме принципа максимума.

Описание процедуры определения оптимального управления и соответствующих функций состояний системы. Результаты, полученные в предыдущем разделе, фактически определяют явные аналитические представления для функции переключений $Q(t) = Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ при указанных вариантах структуры функции управления. Другими словами, с помощью аналитических формул можно вычислить значение функции переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ при любом фиксированном значении $t \in [0, T]$ для каждого рассмотренного варианта управления.

Воспользовавшись этим, можно предложить следующую численно-аналитическую процедуру определения функции управления $u_{1*}(t)$, удовлетворяющей необходимым условиям экстремума в форме принципа максимума.

Для каждого варианта структуры управления следует проанализировать поведение функции переключений $Q(t)$ на всем временном интервале $t \in [0, T]$. Такой анализ целесообразно осуществлять численными методами с помощью компьютерных программ, вычисляющих значения функции $Q(t)$ в отдельных точках на интервале $t \in [0, T]$. При этом в таких программах должны использоватьсся стандартные подпрограммы, рассчитывающие значения функций $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$. В свою очередь, программы для определения значений сопряженных переменных должны реализовать формулы (29)–(34).

Если выявленное поведение функции переключений $Q(t)$ соответствует выбранной структуре функции управления $u_1(t)$, то рассматриваемый вариант функции управления и соответствующих функций состояний системы $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ можно полагать управляемым процессом, удовлетворяющим необходимым условиям экстремума в форме принципа максимума.

В настоящем исследовании было принято предположение о конечном числе скачков (переключений управления) функции управления на конечном временном интервале. Такое предположение вполне оправдано с позиции его экономического содержания. Следовательно, функция переключений $Q(t)$, определяющая структуру функции управления, только конечное число раз изменяет знак на заданном конечном интервале $t \in [0, T]$. Таким образом, структура функций оптимального управления, определяемая в соответствии с принципом максимума, допускает лишь конечное число вариантов. Рассматривая эти варианты последовательно, можно определить тот вариант, в котором исходное предположение о структуре управления соответствует определяемому виду функции $Q(t)$. Зафиксируем этот вариант структуры функции управления $u_1(t)$ и соответствующие ему представления для функций состояний системы $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$, определяемые из уравнений дифференциальной связи. Тогда управляемый процесс $(u_1(t); k_0(t), k_1(t), k_2(t))$, заданный на интервале $[0, T]$, удовлетворяет необходимым условиям экстремума в форме принципа максимума. Нахождение представления для этого процесса в численно-аналитической форме будет итоговым результатом исследования поставленной задачи оптимального управления динамической экономической системой.

Заключение. В задаче оптимального управления получены явные аналитические представления для функций состояний рассматриваемой динамической системы и соответствующих сопряженных переменных при различных вариантах функции управления, определяемых на основе принципа максимума. Для заданных конкретных значений исходных параметров модели можно определить оптимальное управление численным методом, используя выведенные аналитические представления и процедуру определения оптимального управления и соответствующих функций состояний. В дальнейшем авторами будет проведено более глубокое аналитическое исследование свойств траекторий управляемого процесса, удовлетворяющего условиям принципа максимума.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шнурков П.В.*, *Засыпко В.В.* Оптимальное управление инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики: постановка задачи и анализ на основе принципа максимума // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 2. С. 101–115.
2. *Алексеев В.М.*, *Тихомиров В.М.*, *Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007. 408 с.
3. *Арутюнов А.А.*, *Магарил-Ильяев Г.Г.*, *Тихомиров В.М.* Принцип максимума Понтрягина. М.: Факториал Пресс, 2006. 144 с.
4. *Ванько В.И.*, *Ермошина О.В.*, *Кувыркин Г.Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 488 с.
5. *Иоффе А.Д.*, *Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
6. *Беленький В.З.* Оптимизационные модели экономической динамики. Понятийный аппарат. Одномерные модели. М.: Наука, 2007. 259 с.
7. *Arrow K.J.*, *Intriligator M.D.* Handbook of Mathematical Economics. Vol. 3. Amsterdam – N.Y.: North-Holland Publishing Co., 1986. 486 p.
8. *Leonard D.*, *Long N.* Optimal control theory and static optimization in economics. Cambrige Univ. Press, 1992. 353 p.
9. *Sethi S.P.*, *Thompson G.L.* Optimal control theory: applications to management science and economics. Springer, 2000. 504 p.
10. *Koopmans T.C.* On the concept of optimal economic growth // Ex Aedibus Academicis in Civitate Vaticana. 1965. No. 28. P. 225–300.
11. *Зайцев В.Ф.*, *Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
13. *Беленький В.З.* Теорема о стационарном решении обобщенной модели Рамсея – Касса – Купманса. Анализ и моделирование экономических процессов. Вып. 1. М.: ЦЭМИ РАН, 2004.
14. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: Юнити-Дана, 2002. 399 с.
15. *Колемаев В.А.* Оптимальный сбалансированный рост открытой трехсекторной экономики // Прикладная эконометрика. 2008. Вып. 3. С. 14–42.
16. *Матвеенко В.Д.* Структура оптимальных траекторий в моделях экономической динамики. Дис. . . . д-ра эконом. наук. М.: ЦЭМИ РАН, 2004. 261 с.

REFERENCES

[1] Shnurkov P.V., Zasypko V.V. Optimal control of investments in a closed-form dynamic model of the three-sector economy: the problem and analysis based on the maximum principle. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 2, pp. 101–115 (in Russ.).
[2] Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie [Optimal control]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 408 p.
[3] Arutyunov A.A., Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M. Printsip maksimuma Pontryagina [Pontryagin's maximum principle]. Moscow, Faktorial Press Publ., 2006. 144 p.
[4] Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N., Zarubin B.C., Krishchenko A.P., eds. Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie [Variational calculus и optimumal control]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2006. 488 p.
[5] Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Teoriya ekstremal'nykh zadach [Extremal problems theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 481 p.
[6] Belen'kiy V.Z. Optimizatsionnye modeli ekonomicheskoy dinamiki. Ponyatiynyy apparat. Odnomernye modeli [Optimization models of economic dynamics. Conceptual apparatus. One-dimensional models]. Moscow, Nauka Publ., 2007. 259 p.
[7] Arrow K.J., Intriligator M.D., eds. Handbook of Mathematical Economics. Vol. III – Free eBooks. Amsterdam – N.Y., North-Holland Publishing Co., 1986. 486 p.
[8] Leonard D., Long N. Optimal control theory and static optimization in economics. Cambrige Univ. Press, 1992. 353 p.
[9] Sethi S.P., Thompson G.L. Optimal control theory: applications to management science and economics. Second Ed. New York, Springer, 2000. 504 p.
[10] Koopmans T.C. On the concept of optimal economic growth. *Ex Aedibus Academicis in Civitate Vaticana*, 1965, no. 28, pp. 225–300.
[11] Zaytsev V.F., Polyanin A.D. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. [Handbook on ordinary differential equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001. 576 p.
[12] Kamke E. Differentialgleichungen: Löosungsmethoden und Löosungen. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1967. (Russ. ed.: Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam. Per. s nem. 4-e izd., ispr. [Handbook on ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 388 p.)
[13] Belen'kiy V.Z. A theorem on the stationary solution of the generalized Ramsey – Kass – Koopmans model. Analysis and simulation of economic processes. *Sb. statey "Analiz i modelirovanie ekonomicheskikh protsessov"* [Coll. Pap. "Analysis and simulation of economic processes"]. Moscow, TsEMI RAN Publ., 2004, iss. 1 (in Russ.).
[14] Kolemaev V.A. Matematicheskaya ekonomika [Mathematical economy]. Moscow, Yuniti-Dana Publ., 2002. 399 p.

[15] Kolemaev V.A. Optimal balanced growth of open three-sector economy. *Prikladnaya ekonometrika* [Applied econometrics], 2008, iss. 3, pp. 14–42 (in Russ.).

[16] Matveenko V.D. Struktura optimal'nykh traektoriy v modelyakh ekonomicheskoy dinamiki. Diss. Dokt. Econ. Nauk [The structure of optimal trajectories in models of economic dynamics. Dr. Econ. Sci. Diss.]. Moscow, TsEMI RAN Publ., 2004. 261 p.

Статья поступила в редакцию 10.01.2014

Петр Викторович Шнурков — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики МИЭМ НИУ ВШЭ. Автор более 30 научных работ в области теории управления полумарковскими случайными процессами, прикладной теории вероятностей (теория оптимального управления запасами, управление в системах массового обслуживания, оптимальное обслуживание технических систем), математической теории оптимального управления (детерминированные модели).
МИЭМ НИУ ВШЭ, Российская Федерация, 109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., д. 3.

P.V. Shnurkov — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of "Higher Mathematics" department of the Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of the Higher School of Economics National Research University. Author of more than 30 publications in the field of theory of control of semi-Markov random processes, applied theory of probabilities (theory of optimal inventory control, control in queuing systems, optimal service of technical systems), mathematical theory of optimal control (deterministic models).
Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of the "Higher School of Economics" National Research University, Bol'shoy Trekhsvyatitel'skiy per. 3, Moscow, 109028 Russian Federation.

Вероника Владимировна Засыпко — аспирантка кафедры высшей математики МИЭМ НИУ ВШЭ. Автор двух научных работ в области оптимального управления инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики.
МИЭМ НИУ ВШЭ, Российская Федерация, 109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., д. 3.

V.V. Zasypko — post-graduate of "Higher Mathematics" department of the Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of the "Higher School of Economics" National Research University. Author of two publications in the field of optimal control of investments in the closed-form dynamic model of three-sector economy.
Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of the "Higher School of Economics" National Research University, Bol'shoy Trekhsvyatitel'skiy per. 3, Moscow, 109028 Russian Federation.