

ВЛИЯНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОМБИНИРОВАННЫХ ВОЛОКОН НА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: zarubin@bmstu.ru; fn2@bmstu.ru; inga.savelyeva@gmail.ru

Волокна и близкие к ним по форме включения являются достаточно распространенными армирующими элементами в конструкционных материалах. Армирование высокопрочными и высокомодульными волокнами повышает механические и теплофизические характеристики композита. Эффективное значение коэффициента теплопроводности такого композита зависит от расположения и объемной концентрации волокон. Получены расчетные зависимости, позволяющие оценить эффективные коэффициенты теплопроводности однонаправленного трансверсально изотропного волокнистого композита с комбинированными волокнами (волокно и его сердцевина выполнены из разных материалов). Рассмотрен вариант упорядоченного расположения волокон в плоскости, перпендикулярной их оси, когда представительный элемент структуры композита можно представить квадратной ячейкой с находящимся в ее центре поперечным сечением волокна. Представленные расчетные зависимости могут быть использованы для прогноза значений компонент тензора эффективной теплопроводности однонаправленного трансверсально изотропного волокнистого композита с комбинированными волокнами.

Ключевые слова: однонаправленный волокнистый композит, комбинированное волокно, тензор эффективной теплопроводности.

INFLUENCE OF AN ARRANGEMENT OF COMBINED FIBERS ON THERMAL CONDUCTIVITY OF UNIDIRECTIONAL FIBROUS COMPOSITE

V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savel'eva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: zarubin@bmstu.ru; fn2@bmstu.ru; inga.savelyeva@gmail.ru

Fibers and fiber-like inclusions are fairly common reinforcing elements in structural materials. High-strength and high-modulus fibers reinforcement increases the mechanical and thermal properties of the composite. The effective value of the thermal conductivity of the composite depends on the arrangement and volume concentration of fibers. The dependences allowing us to estimate the effective thermal conductivity of the unidirectional transversely isotropic fibrous composite with the combined fibers (fiber and its core are made from different materials) are calculated. A case of the ordered arrangement of fibers in the plane perpendicular to their axis is considered provided that the representative structure of the composite element can be represented as a square cell with the fiber cross-section in the center of it. The presented calculated dependences can be used to predict the values of the components of the effective thermal conductivity of the unidirectional transversal isotropic fibrous composite with the combined fibers.

Keywords: unidirectional fibrous composite, combined fiber, tensor of the effective thermal conductivity.

Введение. Волокнистые композиты вследствие высоких механических характеристик и технологических преимуществ при изготовлении из них изделий различного назначения находят широкое применение в технике в качестве современного конструкционного материала [1–4]. Большую группу таких композитов составляют однонаправленные композиты, армированные одинаково ориентированными в пространстве волокнами, которые расположены в отвержденном связующем, образующем матрицу композита. Наряду с волокнами из однородного высокопрочного и высокомодульного материала применяют комбинированные волокна, материал сердцевин которых выполнен из другого материала (например, волокна, получаемые осаждением бора на вольфрамовую нить [3, 5]).

Однонаправленные волокнистые композиты применяют для изготовления теплонапряженных конструкций, подверженных интенсивным механическим и тепловым воздействиям. Работоспособность таких конструкций кроме механических характеристик зависит и от теплофизических свойств конструкционного материала (в том числе от его теплопроводности). Однонаправленный волокнистый композит по отношению к свойству теплопроводности является анизотропным материалом, описываемому тензором второго ранга эффективной теплопроводности. Компоненты этого тензора зависят от параметров, которые входят в математическую модель теплового взаимодействия волокон и матрицы в таком композите. Существуют различные подходы к построению указанной модели применительно к однородным волокнам [6–11], позволяющие получить оценки компонент этого тензора, причем большинство подходов учитывают лишь объемное содержание C_V волокон в композите и не рассматривают их взаимное расположение. Это приводит к значительному разбросу оценок эффективной теплопроводности композита в направлении, перпендикулярном волокнам (особенно при большом различии коэффициентов теплопроводности волокон и матрицы [12, 13]). Модификация модели теплового взаимодействия волокон и матрицы и учет взаимного расположения волокон позволяют уточнить эти оценки, в том числе и для композита с комбинированными волокнами.

Математическая модель. Примем, что изотропная матрица однонаправленного волокнистого композита армирована параллельно расположенными анизотропными волокнами, достаточно длинными по сравнению с их радиусом и обладающими свойством трансверсальной изотропии [7] относительно их продольной оси. Коэффициент теплопроводности волокна поперек этой оси обозначим λ_1° , вдоль оси — λ_3° , соответственно коэффициенты теплопроводности сердцевин комбинированного волокна λ_1^{\bullet} и λ_3^{\bullet} , а коэффициент теплопроводности матрицы λ_m . Композит также будем считать трансверсально изотропным

относительно оси, параллельной волокнам. Поэтому одна из главных осей тензора его эффективной теплопроводности совпадает с этой осью, причем две независимые компоненты тензора являются эффективными коэффициентами теплопроводности λ_1 и λ_3 композита в направлениях поперек и параллельно волокнам.

Наиболее простую и достаточно достоверную оценку λ_3^+ эффективного коэффициента теплопроводности λ_3 можно получить из соотношений теории смесей [9] в виде

$$\tilde{\lambda}_3^+ = \lambda_3^+ / \lambda_m = 1 - C_V + \bar{\lambda}_3 C_V (1 - \bar{r}^2) + \bar{\lambda}_3^\bullet C_V \bar{r}^2, \quad (1)$$

где $\bar{\lambda}_3 = \lambda_3^\circ / \lambda_m$; $\bar{\lambda}_3^\bullet = \lambda_3^\bullet / \lambda_m$; $\bar{r} = r_0 / r_v$, r_0 и r_v – радиус сердцевинки и наружный радиус волокна. Значение λ_3^+ при $\bar{r} = 0$ достаточно хорошо коррелирует с немногочисленными экспериментальными данными по измерению величины λ_3 в случае однородных волокон [13, 14]. Обратным по отношению к коэффициенту теплопроводности является коэффициент термического сопротивления. Тогда из теории смесей следует менее надежная оценка $1/\lambda_3^- = (1 - C_V) / \lambda_m + C(1 - \bar{r}^2) / \lambda_3^\circ + C_V \bar{r}^2 / \lambda_3^\bullet$, или

$$\tilde{\lambda}_3^- = \lambda_3^- / \lambda_m = 1 / (1 - C_V + C_V (1 - \bar{r}^2) / \bar{\lambda}_3 + C_V \bar{r}^2 / \bar{\lambda}_3^\bullet). \quad (2)$$

Аналогичные оценки для эффективного коэффициента теплопроводности λ_1 композита имеют вид

$$\tilde{\lambda}_1^+ = \lambda_1^+ / \lambda_m = 1 - C_V + \bar{\lambda}_1 C_V (1 - \bar{r}^2) + \bar{\lambda}_1^\bullet C_V \bar{r}^2; \quad (3)$$

$$\tilde{\lambda}_1^- = \lambda_1^- / \lambda_m = 1 / (1 - C_V + C_V (1 - \bar{r}^2) / \bar{\lambda}_1 + C_V \bar{r}^2 / \bar{\lambda}_1^\bullet), \quad (4)$$

где $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^\circ / \lambda_m$; $\bar{\lambda}_1^\bullet = \lambda_1^\bullet / \lambda_m$. Верхние индексы “+” и “-” в формулах (1)–(4) обозначают верхнюю и нижнюю оценки значений λ_1 и λ_3 . Действительно, опустив нижние индексы 1 и 3, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^+ - \tilde{\lambda}^- &= \frac{(\bar{\lambda}^\bullet + 1/\bar{\lambda}^\bullet - 2)(1 - C_V)C_V \bar{r}^2}{1 - C_V + C_V(1 - \bar{r}^2)/\bar{\lambda} + C_V \bar{r}^2/\bar{\lambda}^\bullet} + \\ &+ \frac{(\bar{\lambda} + 1/\bar{\lambda} - 2)(1 - C_V)C_V + (\bar{\lambda}^\bullet/\bar{\lambda} + \bar{\lambda}/\bar{\lambda}^\bullet - 2)(1 - \bar{r}^2)\bar{r}^2}{1 - C_V + C_V(1 - \bar{r}^2)/\bar{\lambda} + C_V \bar{r}^2/\bar{\lambda}^\bullet} \geq 0, \end{aligned}$$

так как значение каждой дроби в средней части этого соотношения при положительном знаменателе и неотрицательном числителе также будет неотрицательным. Сумма этих дробей равна нулю либо при $\bar{\lambda}^\bullet = \bar{\lambda} = 1$, либо при $C_V = 0$ или при $C_V = 1$ и $\bar{\lambda}^\bullet = \bar{\lambda}$, т.е. в случае однородного материала, когда верхняя и нижняя оценки совпадают и равны точному значению $\tilde{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_3 / \lambda_m$.

Верхние и нижние оценки значений λ_1 и λ_3 также можно получить, если воспользоваться двойственной вариационной формулировкой стационарной задачи теплопроводности в неоднородном теле

[10, 15–17], включающей в себя минимизируемый и максимизируемый функционалы, которые достигают на истинном решении задачи совпадающие экстремальные значения. При этом верхняя оценка соответствует предположению об однородности в представительном элементе композита векторного поля градиента температуры, а нижняя — поля вектора плотности теплового потока.

Большое отличие значения $\bar{\lambda}_1$ от единицы приводит к тому, что разность верхней и нижней оценок $\tilde{\lambda}_1^+ - \tilde{\lambda}_1^-$ отношения $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1/\lambda_m$ при промежуточных значениях C_V возрастает, что существенно снижает достоверность оценки значения λ_1 . Более достоверную оценку можно получить на основе математической модели, описывающей тепловое взаимодействие представительного элемента структуры композита с однородным материалом, коэффициент теплопроводности которого подлежит определению. Представительный элемент выберем в виде достаточно протяженной в направлении расположения волокон цилиндрической составной частицы. Поперечное сечение этой частицы включает в себя соответствующий волокну круг радиусом r_v с сердцевинной радиусом r_0 , окруженный кольцевым слоем матрицы с наружным радиусом r_m . Таким образом, модель структуры композита содержит четыре фазы: сердцевина волокна; кольцевые слои волокна и матрицы; неограниченный массив однородного материала. При этом для объемной концентрации волокон в композите с учетом слоя матрицы будет справедливо равенство $C_V = (r_v/r_m)^2$.

Центр поперечного сечения составной частицы поместим в начале полярной системы координат, обозначив через r и φ радиальную и угловую координату соответственно. Примем, что на большом расстоянии $r \gg r_m$ от начала координат задан вектор градиента температурного поля в однородном материале, направленный по оси, от которой происходит отсчет угловой координаты, т.е. при $r \rightarrow \infty$ установившееся распределение температуры в этом материале описывает функция $T_\infty(r, \varphi) = Gr \cos \varphi$, где G — модуль вектора градиента. Указанная функция удовлетворяет уравнению Лапласа в полярных координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5)$$

По мере приближения к составной частице в однородном материале нарастает возмущение температурного поля, описываемое также удовлетворяющим уравнению (5) дополнительным слагаемым $\Delta T(r, \varphi) = (B/r) \cos \varphi$, где B — подлежащий определению постоянный коэффициент. Следовательно, температурное поле в однородном материале, удовлетворяющее заданному условию при $r \rightarrow \infty$ и уравнению (5), описывает функция

$$T(r, \varphi) = T_\infty(r, \varphi) + \Delta T(r, \varphi) = (Gr + B/r) \cos \varphi. \quad (6)$$

Аналогичные зависимости описывают распределения температуры в сердцевине волокна

$$T_0(r, \varphi) = (A_0 r + B_0/r) \cos \varphi, \quad (7)$$

в его кольцевом слое

$$T_v(r, \varphi) = (A_v r + B_v/r) \cos \varphi \quad (8)$$

и в слое материала матрицы

$$T_m(r, \varphi) = (A_m r + B_m/r) \cos \varphi. \quad (9)$$

В центре волокна температура ограничена, поэтому в соотношении (7) $B_0 \equiv 0$. Таким образом, в равенства (6)–(9) входят шесть неизвестных коэффициентов B , A_0 , A_v , B_v , A_m и B_m , подлежащих определению из граничных условий на цилиндрических поверхностях с радиусами r_0 , r_v и r_m в предположении идеальности теплового контакта на этих поверхностях.

При $r = r_0$ из условий непрерывности распределения температуры и радиальной составляющей вектора плотности теплового потока следует

$$T_0(r_0, \varphi) = T_v(r_0, \varphi); \quad \lambda_1^\bullet \partial T_0 / \partial r |_{r=r_0} = \lambda_1^\circ \partial T_v / \partial r |_{r=r_0}.$$

Откуда с использованием равенств (7) и (8) при $B_0 \equiv 0$ находим

$$A_0 = A_v + B_v/r_0^2; \quad A_0 = (\lambda_1^\circ / \lambda_1^\bullet) (A_v - B_v/r_0^2). \quad (10)$$

Из аналогичных условий при $r = r_v$ с учетом формул (8) и (9) имеем

$$A_v + B_v/r_v^2 = A_m + B_m/r_v^2; \quad A_v - B_v/r_v^2 = (\lambda_m / \lambda_1^\circ) (A_m - B_m/r_v^2). \quad (11)$$

Наконец, из подобных условий при $r = r_m$ и соотношений (6) и (9) получим

$$A_m + B_m/r_m^2 = G + B/r_m^2; \quad A_m - B_m/r_m^2 = (\lambda_1 / \lambda_m) (G - B/r_m^2). \quad (12)$$

Последовательным исключением неизвестных из равенств (10)–(12) находим

$$B / (G r_m^2) = (\tilde{\lambda}_1 (1 + DC_V) - 1 + DC_V) / (\tilde{\lambda}_1 (1 + DC_V) + 1 - DC_V), \quad (13)$$

где $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 / \lambda_m$;

$$D = \frac{1 + \bar{\lambda}_1^\bullet / \bar{\lambda}_1 + (1 - \bar{\lambda}_1^\bullet / \bar{\lambda}_1) \bar{r}^2 - (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_1^\bullet) + (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_1^\bullet) \bar{r}^2}{1 + \bar{\lambda}_1^\bullet / \bar{\lambda}_1 + (1 - \bar{\lambda}_1^\bullet / \bar{\lambda}_1) \bar{r}^2 + (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_1^\bullet) - (\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_1^\bullet) \bar{r}^2}.$$

Замена составной частицы равновеликим цилиндром с внешним радиусом r_m и искомым коэффициентом теплопроводности λ_1 приведет к исчезновению возмущения температурного поля в окружающем ее

однородном материале с тем же значением λ_1 . Тогда в равенстве (6) следует принять $\Delta T(r, \varphi) = 0$, что равносильно условию $B = 0$, которое с учетом формулы (13) позволяет записать

$$\tilde{\lambda}_1 = (1 - DC_V)/(1 + DC_V). \quad (14)$$

При однородном волокне $r_0 = 0$, тогда из формулы (14) следует

$$\tilde{\lambda}_1^* = (1 + \bar{\lambda}_1 - (1 - \bar{\lambda}_1)C_V)/(1 + \bar{\lambda}_1 + (1 - \bar{\lambda}_1)C_V). \quad (15)$$

В частном случае неограниченной длины волокон равенство (15) совпадает с формулой, полученной в работе [10]. При $\bar{\lambda}_1^* \rightarrow 0$ формула (14) в виде

$$\tilde{\lambda}_1^* = \frac{2 - (1 - \bar{\lambda}_1)(1 - \bar{r}^2) - (2 - (1 + \bar{\lambda}_1)(1 - \bar{r}^2))C_V}{2 - (1 - \bar{\lambda}_1)(1 - \bar{r}^2) + (2 - (1 + \bar{\lambda}_1)(1 - \bar{r}^2))C_V} \quad (16)$$

соответствует случаю полого волокна с круговой цилиндрической полостью радиусом r_0 . При $r_0 = 0$ формула (16) переходит в равенство (15). Предельным переходом при $\bar{\lambda}_1^* \rightarrow \infty$ из формулы (14) получим равенство

$$\tilde{\lambda}_1^* = \frac{1 - \bar{r}^2 + \bar{\lambda}_1(1 + \bar{r}^2) - (1 - \bar{r}^2 - \bar{\lambda}_1(1 + \bar{r}^2))C_V}{1 - \bar{r}^2 + \bar{\lambda}_1(1 + \bar{r}^2) + (1 - \bar{r}^2 - \bar{\lambda}_1(1 + \bar{r}^2))C_V}, \quad (17)$$

соответствующее случаю бесконечно большой теплопроводности сердцевинки волокна. При $r_0 = 0$ равенство (17) также совпадает с равенством (15).

Представленные выше оценки и формулы (14)–(17) сохраняют смысл во всем промежутке изменения от 0 до 1 объемной концентрации C_V волокон в композите, что предполагает возможность уменьшения радиуса волокон от некоторого конечного значения r_0 до бесконечно малого. При таком предположении сохраняет смысл значение $C_V = 1$, когда композит будет состоять только из волокон. Реальный однонаправленный волокнистый композит обычно состоит из волокон примерно одинакового радиуса, что ограничивает их наибольшую возможную объемную концентрацию значением $C_V^* < 1$. Предельно плотная укладка цилиндрических волокон с круговым поперечным сечением одинакового радиуса соответствует значению $C_V^\Delta = \pi/(2\sqrt{3}) \approx 0,907$, когда центры поперечных сечений касающихся между собой соседних волокон одинакового радиуса расположены в вершинах равносторонних треугольников. Однако из условия прочности при растяжении композита в направлении волокон каждое волокно должно быть окружено связующим, образующим матрицу [3], поэтому реальное значение $C_V < C_V^\Delta$.

Учет взаимного расположения волокон. Однонаправленный волокнистый композит обладает свойством трансверсальной изотропии

и \bar{r}_0 . Одна из полос с термическим сопротивлением R° содержит часть поперечного сечения кольцевого слоя волокна с коэффициентом теплопроводности λ_1° и фрагмент поперечного сечения матрицы, вторая полоса с термическим сопротивлением R^\bullet — четверть поперечного сечения сердцевинки волокна с коэффициентом теплопроводности λ_1^\bullet , часть поперечного сечения кольцевого слоя волокна и оставшийся фрагмент поперечного сечения матрицы. Таким образом, $R = R^\circ + R^\bullet$.

Для вычисления величины R° выделим полосу единичной длины шириной dx_2 , состоящей из двух участков длиной $\sqrt{\bar{r}_*^2 - x_2^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_1° и длиной $1 - \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_2^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_m (см. рис. 1). Тогда для термического сопротивления этой полосы получим

$$dR^\circ = \frac{dx_2}{\lambda_1^\circ \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_2^2} + \lambda_m (1 - \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_2^2})},$$

а для всей полосы шириной $\bar{r}_* - \bar{r}_0$ —

$$R^\circ = \frac{1}{\lambda_m} \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_*} \frac{dx_2}{1 + b \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_2^2}} = \frac{2}{\lambda_m b} \left(\frac{\arctg \sqrt{\frac{1 - b\bar{r}_0}{1 + b\bar{r}_0}}}{\sqrt{1 - (b\bar{r}_0)^2}} - \frac{\arctg \sqrt{\frac{1 - b\bar{r}_*}{1 + b\bar{r}_*}}}{\sqrt{1 - (b\bar{r}_*)^2}} \right),$$

где $b = \bar{\lambda}_1 - 1$.

Чтобы вычислить величину R^\bullet , выделим полосу единичной длины шириной dx'_2 , но включающей в себя три участка (см. рис. 1): длиной $\sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_1^\bullet ; длиной $\sqrt{\bar{r}_*^2 - x_2^2} - \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_1° ; длиной $1 - \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_2^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_m . Для термического сопротивления этой полосы запишем (опустив штрих у dx_2):

$$dR^\bullet = \frac{dx_2}{\lambda_1^\bullet \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2} + \lambda_1^\circ (\sqrt{\bar{r}_*^2 - x_2^2} - \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2}) + \lambda_m (1 - \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_2^2})},$$

а для всей полосы шириной \bar{r}_0 —

$$R^\bullet = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^{\bar{r}_0} \frac{dx_2}{1 + b \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_2^2} + (\bar{\lambda}_1^\bullet - \bar{\lambda}_1) \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_2^2}}.$$

Таким образом, нижняя оценка суммарного термического сопротивления квадратной ячейки составит $R_m + R$, а соответствующая верхняя оценка ее проводимости, совпадающая в этом случае с верхней оценкой величины λ_1 , будет равна

$$\lambda^\square = 1/(R_m + R) = \lambda_m / (1 - \bar{r}_0 + \lambda_m R^\circ + \lambda_m R^\bullet). \quad (18)$$

Для построения нижней оценки величины λ_1 необходимо использовать распределение вектора плотности теплового потока в рассматриваемой ячейке, допустимое для максимизируемого функционала [14, 15], входящего в двойственную вариационную формулировку стационарной задачи теплопроводности в этой ячейке. Такое распределение можно получить, если разбить квадратную ячейку (см. рис. 1) системой адиабатических плоскостей, параллельных координатной оси OX_2 . Тогда термическая проводимость ячейки будет суммой проводимости $Y_m = \lambda_m(1 - \bar{r}_*)$ полосы единичной длины шириной $1 - \bar{r}_*$ с коэффициентом теплопроводности λ_m матрицы и проводимости Y двух полос единичной длины шириной \bar{r}_0 и $\bar{r}_* - \bar{r}_0$. Первая полоса проводимостью Y^\bullet содержит четверть кругового поперечного сечения сердцевинки волокна с коэффициентом теплопроводности λ_1^\bullet , часть поперечного сечения кольцевого слоя волокна с коэффициентом теплопроводности λ_1° и фрагмент поперечного сечения матрицы, а вторая полоса проводимостью Y° — часть поперечного сечения кольцевого слоя волокна и оставшийся фрагмент поперечного сечения матрицы. Таким образом, $Y = Y^\bullet + Y^\circ$.

Для вычисления величины Y° выделим полосу единичной длины шириной dx_1 , включающей в себя два участка (см. рис. 1) длиной $\sqrt{\bar{r}_*^2 - x_1^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_1° и длиной $1 - \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_1^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_m . Для термической проводимости этой полосы запишем

$$dY^\circ = \frac{dx_1}{\sqrt{\bar{r}_*^2 - x_1^2}/\lambda_1^\circ + (1 - \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_1^2})/\lambda_m},$$

а для всей полосы шириной $\bar{r}_* - \bar{r}_0$ после интегрирования по x_1 в пределах от \bar{r}_0 до \bar{r}_* —

$$Y^\circ = \lambda_m \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_*} \frac{dx_1}{1 + b_1 \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_1^2}} = \frac{2\lambda_m}{b_1} \left(\frac{\arctg \sqrt{\frac{1 - b_1 \bar{r}_0}{1 + b_1 \bar{r}_0}}}{\sqrt{1 - (b_1 \bar{r}_0)^2}} - \frac{\arctg \sqrt{\frac{1 - b_1 \bar{r}_*}{1 + b_1 \bar{r}_*}}}{\sqrt{1 - (b_1 \bar{r}_*)^2}} \right),$$

где $b_1 = 1/\bar{\lambda}_1 - 1$. Отметим, что при $b_1 > 1/\bar{r}_0$ или только при $b_1 > 1/\bar{r}_*$ в приведенной формуле аргумент арктангенса и знаменатель дроби, в которую входит арктангенс, станут чисто мнимыми. В этом случае [19]

$$\frac{\arctg \sqrt{(1 - b_1 \bar{r}_0)/(1 + b_1 \bar{r}_0)}}{\sqrt{1 - (b_1 \bar{r}_0)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{(b_1 \bar{r}_0)^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{b_1 \bar{r}_0 + 1} + \sqrt{b_1 \bar{r}_0 - 1}}{\sqrt{b_1 \bar{r}_0 + 1} - \sqrt{b_1 \bar{r}_0 - 1}} \quad (19)$$

и аналогичная формула с заменой радиуса \bar{r}_0 радиусом \bar{r}_* . Такая же ситуация возникнет при $b > 1/\bar{r}_0$ или только при $b > 1/\bar{r}_*$ в формуле для термического сопротивления R° . Тогда следует использовать равенство (19) с заменой величины b_1 величиной b .

Чтобы вычислить величину Y^\bullet выделим полосу единичной длины шириной dx_1' , включающей три участка (см. рис. 1): длиной $1 - \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_1^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_m ; длиной $\sqrt{\bar{r}_*^2 - x_1^2} - \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_1^\bullet ; длиной $\sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2}$ с коэффициентом теплопроводности λ_1° . Для термической проводимости этой полосы запишем (опустив штрих у dx_1)

$$dY^\bullet = \frac{dx_1}{\sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2}/\lambda_1^\bullet + (\sqrt{\bar{r}_*^2 - x_1^2}/\lambda_* - \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2})/\lambda_1^\circ + (1 - \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_1^2})/\lambda_m},$$

а для всей полосы шириной \bar{r}_0 —

$$Y^\bullet = \lambda_m \int_0^{\bar{r}_0} \frac{dx_1}{1 + b_1 \sqrt{\bar{r}_*^2 - x_1^2} + (1/\bar{\lambda}_1^\bullet - 1/\bar{\lambda}_1) \sqrt{\bar{r}_0^2 - x_1^2}}.$$

В итоге нижняя оценка величины λ_1 будет равна

$$\lambda_\square = Y_m + Y = \lambda_m(1 - \bar{r}_*) + Y^\circ + Y^\bullet. \quad (20)$$

Результаты расчетов. Полученные расчетные зависимости используем для оценок значений λ_1 и λ_3 компонент тензора эффективной теплопроводности композита с алюминиевой матрицей и бороволокном. Такое волокно получают осаждением бора из газовой фазы хлористого бора BCl_3 на вольфрамовую нить диаметром около 12 мкм при высокой температуре [20]. При этом вольфрам переходит в борид вольфрама W_2B_5 с коэффициентом теплопроводности $\lambda^\bullet = 32$ Вт/(м·К) при температуре 300 К [21, 22], а диаметр сердцевины волокна возрастает до 15...18 мкм [20]. В зависимости от параметров технологического процесса осажденный кольцевой слой бора может иметь поликристаллическую или аморфную структуру. В первом случае коэффициент теплопроводности бора составляет $\lambda^\circ = 27$ Вт/(м·К) при той же температуре [22], во втором — значение этого коэффициента может быть на порядок меньше [21]. Поперечное сечение полученного волокна близко к круговому и имеет диаметр 100...200 мкм.

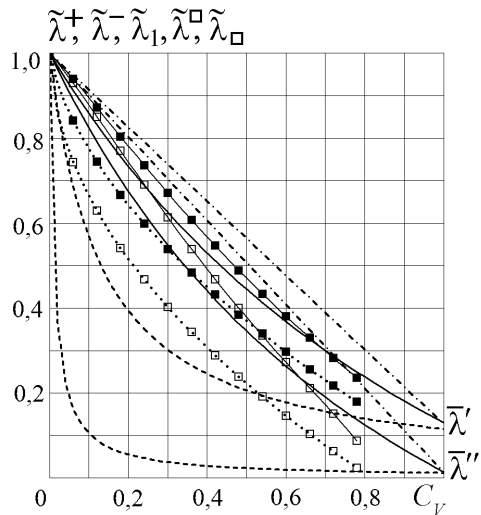


Рис. 2. Зависимости оценок эффективного коэффициента теплопроводности композита от объемной концентрации волокон, построенные по формулам (1), (2), (14), (18) и (20)

Коэффициент теплопроводности λ_m алюминиевой матрицы из сплава АВ примем равным 209 Вт/(м·К). Поскольку для рассматриваемого волокна известны лишь значения λ^\bullet и λ° , характеризующие его как изотропное по отношению к свойству теплопроводности, формулы (1) и (2) будут идентичны формулам (3) и (4). Зависимости оценок $\tilde{\lambda}^+$ и $\tilde{\lambda}^-$ от объемной концентрации C_V (штрихпунктирные и штриховые линии) при фиксированных значениях $\bar{r} = 0,15$, $\bar{\lambda}^\bullet = \lambda^\bullet/\lambda_m = 0,153$ и двух значениях $\bar{\lambda}' = \lambda^\circ/\lambda_m = 0,1292$, $\bar{\lambda}'' = 0,01292$, построенные по формулам (1) и (2), а также рассчитанная по формуле (14) зависимость оценки $\tilde{\lambda}_1$ от объемной концентрации C_V (сплошные линии) приведены на рис. 2. Зависимости для верхней оценки $\tilde{\lambda}^+$ одновременно следует рассматривать как надежное приближение к зависимости для отношения $\tilde{\lambda}_3$, позволяющее вычислить значение эффективного коэффициента теплопроводности λ_3 композита в направлении расположения волокон. Зависимостям отношения $\tilde{\lambda}^\square = \lambda^\square/\lambda_m$ от объемной концентрации C_V соответствуют построенные по формуле (18) сплошные кривые с черными (для $\bar{\lambda}'$) и светлыми (для $\bar{\lambda}''$) квадратами, а зависимостям отношения $\tilde{\lambda}_\square = \lambda_\square/\lambda_m$ от объемной концентрации C_V — построенные по формуле (20) пунктирные кривые с соответствующими квадратами.

Согласно рис. 2, уменьшение коэффициента теплопроводности волокна приводит к заметному увеличению разности двусторонних оценок, которые следуют из теории смесей, тогда как разность таких оценок, полученных с учетом взаимного расположения волокон, возрастает менее существенно. Результаты расчетов на основе уточненной математической модели теплового взаимодействия комбинированного волокна и матрицы лучше коррелируют с верхней оценкой, учитывающей взаимное расположение волокон, по сравнению с аналогичной нижней оценкой.

Заключение. Выведены формулы для двусторонних оценок эффективного коэффициента теплопроводности однонаправленного волокнистого композита в плоскости, перпендикулярной волокнам, учитывающие влияние их взаимного расположения. Рассмотрены варианты расположения центров круглых поперечных сечений соседних волокон в вершинах квадратов. Проведено сравнение значений этих оценок с результатами расчетов по формулам, которые следуют из теории смесей и уточненной математической модели теплового взаимодействия комбинированного волокна и матрицы. На примере бороалюминиевого композита показано, что результаты вычислений по этой модели близки к оценкам, учитывающим взаимное расположение волокон.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Справочник по композиционным материалам* / Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. В 2 т. Т. 2. М.: Машиностроение, 1988. 584 с.
2. *Композиционные материалы: Справочник* / Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. *Комков М.А., Тарасов В.А.* Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.
4. *Калинчев В.А., Ягодников Д.А.* Технология производства ракетных двигателей твердого топлива. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 с.
5. *Браутман Л., Крок Р.* Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендецкий; пер. с англ. М.: Мир, 1978. 564 с.
6. *Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П.* Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
7. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
8. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов; пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
9. *Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2009. № 3. С. 36–49.
10. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с включениями в виде удлиненных эллипсоидов вращения // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 6. С. 276–282.
11. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю.* Теплопроводность композита, армированного волокнами // Известия вузов. Машиностроение. 2013. № 5. С. 75–81.
12. *Янковский А.П.* Численно-аналитическое моделирование процессов теплопроводности в пространственно армированных композитах при интенсивном тепловом воздействии // Тепловые процессы в технике. 2011. Т. 3. № 11. С. 500–516.
13. *Chen Y.-M., Ting J.-M.* Ultra high thermal conductivity polymer composites // Carbon. 2002. Vol. 40. P. 359–362.
14. *Справочник по композиционным материалам* / Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. В 2 т. Т. 1. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
15. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.
16. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
17. *Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.* Двусторонние оценки термического сопротивления неоднородного твердого тела // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51. № 4. С. 578–585.
18. *Вустер У.* Применение тензоров и теории групп для описания физических свойств кристаллов; пер. с англ. М.: Мир, 1977. 384 с.
19. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
20. *Материаловедение и технология металлов* / Под ред. Г.П. Фетисова. М.: Высш. шк., 2001. 638 с.
21. *Чиркин В.С.* Теплофизические свойства материалов ядерной техники. М.: Атомиздат, 1968. 484 с.

REFERENCES

- [1] Lubin G. Handbook of composites. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p. (Russ. ed.: Liubin Dzh. Spravochnik po kompozitsionnym materialam. V 2 t. T. 2. Moscow, Mashinostroenie Publ., vol. 2, 1988. 584 p.).
- [2] Vasil'ev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V., Alfutov N.A., Beil' A.I., Bunakov V.A., Dymkov I.A., Ermolenko A.F., Zhigun I.G., Zinov'ev P.A., Kintsis T.Ia., Kleimenov V.V., Kruklin'sh A.A., Kul'kov A.A., Manuilov V.F., Popov B.G., Portnov G.G., Sirotkin O.S., Skudra A.M., Solov'ev I.A., Tarnopol'skii Iu.M., Tsarakhov K.S. Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite Materials: A Guide]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1990. 512 p.
- [3] Komkov M.A., Tarasov V.A. Tekhnologiya namotki kompozitnykh konstruktssii raket i sredstv porazheniia [Wound composite structures technology and missile weapons]. Moscow, MSTU im. N.E. Bauman Publ., 2011. 431 p.
- [4] Kalinchev V.A., Yagodnikov D.A. Tekhnologiya proizvodstva raketnykh dvigateley tverdogo topliva [Production technology of solid-propellant rocket engine]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2011. 688 p.
- [5] Brautman L., Kroc R., Sendetsky J., eds. Composite Materials. In 8 vols. Vol. 2. Mechanics of Composite Materials. N.Y., 1975. Brautman L., Kroc R. Mekhanika kompozitsionnykh materialov. (Russ. Ed.: Brautman L., Kroc R. Mekhanika kompozitsionnykh materialov. Pod red. Dzh. Sendetski; per. s angl. Moscow, Mir Publ., 1978. 564 p.).
- [6] Dul'nev G.N., Zarichnyak Yu.P. Teploprovodnost' smesey i kompozitsionnykh materialov [The thermal conductivity of mixtures and composite materials]. Leningrad, Energiya Publ., 1974. 264 p.
- [7] Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [The theory of elasticity of micro-inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.
- [8] Christensen R.M. Mechanics of composite materials. Livermore, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley & Sons Inc., 1979. (Russ. ed.: Kristensen R. Vvedenie v mekhaniku kompozitov. Moscow, Nauka publ., 1982. 336 p.).
- [9] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. The mixture models of the mechanics of composites. Part 1. Thermomechanics and thermoelasticity of a multicomponent mixture. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2009, no. 3, pp. 36–49 (in Russ.).
- [10] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. The effective thermal conductivity of composite with inclusions a prolate ellipsoids of rotation. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Therm. process. in engineering], 2013, vol. 5, no. 6, pp. 276–282 (in Russ.).
- [11] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Thermal conductivity of composite reinforced with fibers. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinostr* [Proc. Univ., Mech. Eng.], 2013, no. 5, pp. 75–81 (in Russ.).
- [12] Yankovskiy A.P. Numerical-analytical modeling of heat conduction in a spatially reinforced composites under intense heat impact. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Therm. process. in engineering], 2011, vol. 3, no. 11, pp. 500–516 (in Russ.).
- [13] Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites. *Carbon*. 2002, vol. 40, pp. 359–362.
- [14] Lubin G. Handbook of composites. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p. (Russ. ed.: Liubin Dzh. Spravochnik po kompozitsionnym materialam. V 2 t. T. 1. Moscow, Mashinostroenie Publ., vol. 1, 1988. 488 p.).
- [15] Zarubin V.S. Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Engineering methods for solving problems of heat conduction]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1983. 329 p.

- [16] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2008. 512 p.
- [17] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Two-sided estimates of the thermal resistance of an inhomogeneous solid body *Teplofiz. Vys. Temp.* [High Temp.], 2013, vol. 51, no. 4, pp. 578–585 (in Russ.).
- [18] Wooster W.A. *Tensors and group theory for the physical properties of crystals*. Publisher: London, Oxford University Press, 1973. 354 p. (Russ. Ed.: Vuster U. *Primenenie tenzorov i teorii grupp dlya opisaniya fizicheskikh svoystv kristallov*; per. s angl. Moscow, Mir Publ., 1977. 384 p.)
- [19] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy*. [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 1100 p.
- [20] Fetisov G.P., eds. *Materialovedenie i tekhnologiya metallov* [Materials science and technology of metals]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2001. 638 p.
- [21] Chirkin V.S. *Teplofizicheskie svoystva materialov yadernoy tekhniki* [Thermophysical properties of materials for nuclear technology]. Moscow, Atomizdat Publ., 1968. 484 p.
- [22] Grigor'ev I.S., Meylikhov B.Z. *Fizicheskie velichiny: Spravochnik* [Physical Quantities: A Handbook]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991. 1232 p.

Статья поступила в редакцию 10.02.2014

Владимир Степанович Зарубин — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ в области термомеханики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

V.S. Zarubin — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 300 publications in the field of thermal mechanics.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Георгий Николаевич Кувыркин — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

G.N. Kuvyrkin — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of applied mathematics and mathematical modelling of thermal and mechanical processes in materials and constructions.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Инга Юрьевна Савельева — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 20 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

I.Yu. Savel'eva — Dr. Sci. (Eng.), assoc. professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of non-stationary heat conduction modeling.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.