УДК 537.87

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДЛЯ НЕПОДВИЖНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

А.М. Макаров, **Л.А. Лунёва**, **К.А. Макаров**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: lunevala2008@rambler.ru; anmark2009@rambler.ru

Система уравнений классической электродинамики для произвольной неподвижной изотропной среды в линейном приближении построена с использованием основных экспериментальных результатов и теоретической обработки закономерностей электро- и магнитостатики (закон Кулона, закон Био-Савара и их следствия), закона сохранения электрического заряда (закон Франклина), законов Ома и Джоуля – Ленца и результатов Н.А. Умова о закономерностях переноса энергии в сплошной среде. Теоретическая основа настоящего исследования — последовательное использование "скрытой" симметрии источников поля напряженности электростатического поля и поля магнитной индукции (магнитостатика), выявленной в предыдущей работе авторов, в которой рассматривалась среда без эффектов поляризованности и намагниченности (вакуум). Показано, что закон полного тока и закон электромагнитной индукции можно рассматривать как следствие упомянутых выше известных физических закономерностей, если принять в качестве постулата утверждение, что отмеченная "скрытая" симметрия источников "силовых" векторных полей классической электродинамики, обнаруженная в электро- и магнитостатике, остается справедливой и в условиях переменных во времени электромагнитных явлений.

Ключевые слова: неподвижная изотропная среда, электромагнитное поле, источники поля, система уравнений Максвелла, скрытая симметрия.

THE SYSTEM OF EQUATIONS OF CLASSICAL ELECTRODYNAMICS IN A FIXED ISOTROPIC MEDIUM

A.M. Makarov, **L.A. Lunyova**, **K.A. Makarov**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: lunevala2008@rambler.ru; anmark2009@rambler.ru

The system of equations of classical electrodynamics for an arbitrary fixed isotropic medium in the linear approximation is derived using the basic experimental results and the theoretical analysis of electro- and magnetostatics (Coulomb's law, the law of Biot-Savart and their consequences), the law of conservation of electric charge (the law of Franklin), Ohm's law, Joule – Lenz law and Umov continuous medium energy transfer results. The theoretical basis of this study is the consistent use of "hidden" symmetry of sources of the electric field and the magnetic field, revealed in previous work. It is shown that the total current law and the electromagnetic induction law can be considered as a consequence of the above well-known physical laws supposing a postulate that the "hidden" symmetry of the classical electrodynamics force fields sources, discovered in electro- and magnetostatics, remains valid for time-varying electromagnetic phenomena.

Keywords: fixed isotropic medium, electromagnetic field, sources of the field, Maxwell's equations, hidden symmetry.

История установления системы уравнений классической электродинамики насчитывает уже более 150 лет. В настоящее время состав, содержание и форма записи основных соотношений электродинамики представляют собой теоретическую основу исследования электромагнитных явлений в природе и эффективного использования последних в технических приложениях. Распространенное в современной учебной и научной литературе представление о классической электродинамике как о науке, в которой теоретические изыскания играют существенно соподчиненную роль, по-видимому, не вполне корректно и характерно для начального периода исследований. Обоснование системы уравнений классической электродинамики — фундаментальной основы современного естествознания — до сих пор актуальная задача теоретической физики. В распространенных учебниках начала и середины прошлого века [1–3] есть математические погрешности вывода основных дифференциальных соотношений классической электродинамики. Устранение отдельных погрешностей вывода дифференциальных уравнений электро- и магнитостатики из первичных определений понятий “поляризованность среды” и “намагничение среды” в курсах общей и теоретической физики проведено в работах [4–8].

Классическая электродинамика — феноменологическая наука по способу описания электромагнитных явлений и используемому математическому аппарату. Желательно установить ее основные законы, не покидая принятого уровня описания. Небесспорные попытки вывести закон электромагнитной индукции из основных предположений электронной теории, описанные, в частности в монографии Э. Уиттекера [9], в настоящей работе не обсуждаются.

Система уравнений классической электродинамики в курсах общей и теоретической физики излагается как результат обобщения экспериментальных данных, в частности, явлений электромагнитной индукции (закон Фарадея с правилом Ленца) и прохождения переменного электрического тока через конденсатор (закон полного тока). В работе [10] предложена методика формирования системы уравнений Максвелла для неподвижной изотропной проводящей среды без эффектов поляризованности и намагничения с использованием законов электро- и магнитостатики, закона сохранения электрического заряда, законов Ома и Джоуля – Ленца и концепции сохранения энергии электромагнитного поля. В основу указанной работы положено предположение о том, что в нестационарном случае проявляется “скрытая” симметрия источников поля для вектора напряженности электрического поля и поля вектора магнитной индукции, характерная в стационарном случае. Показано, что закон полного тока и закон электромагнитной индукции можно рассматривать как следствие приведенных выше известных априори физических законов и использовать для проверки работоспособности системы уравнений Максвелла. Цель настоящей работы — сформировать системы уравнений классической электродинамики в неподвижной изотропной проводящей среде с учетом эффектов поляризованности и намагничения среды в линейном приближении с помощью методики, изложенной в работе [10].

Далее рассмотрена неподвижная изотропная среда с учетом эффектов электрической проводимости, эффектов поляризованности и эффектов намагничения в линейном приближении. Предполагается, что экспериментально установлены и теоретически обоснованы закон Кулона, закон Био-Савара, закон сохранения электрического заряда, закон Ома, закон Джоуля – Ленца и концепция сохранения электромагнитной энергии как часть системы представлений Н.А. Умова о "движении энергии в телах" [11]. Предполагаются установленными такие понятия, как "поляризованность среды" и "намагниченность среды", т.е. известны определения указанных величин и раскрыто физическое содержание этих понятий. Фундаментальные законы классической электродинамики — закон полного тока и закон электромагнитной индукции – априори неизвестны.

Основные определения. Векторное поле $\vec{E}$ напряженности электростатического поля определяется как отношение силы $\vec{F}$, действующей на сосредоточенный неподвижный электрический заряд q, находящийся в заданной точке пространства, к величине этого электрического заряда:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Векторное поле $\vec{P}$ поляризованности среды определяет величину электрического дипольного момента $d\vec{p}_e$ физически бесконечно малого элемента объемом dV среды:

$$d\vec{p}_e = \vec{P}\, dV.$$

Векторное поле электрического смещения (вектор $\vec{D}$) описывается соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

где ε_0 — электрическая постоянная.

В линейном случае материальные уравнения для неподвижной изотропной среды имеют вид

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E};$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}.$$

Здесь ε — относительная диэлектрическая проницаемость среды.

Векторное поле магнитной индукции $\vec{B}$ позволяет описать силу $d\vec{F}$, испытываемую элементом тока проводимости $Jd\vec{l}$ (или $\vec{j}dV$), со стороны внешнего магнитного поля:

$$d\vec{F} = J\,d\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{или} \quad d\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B}dV,$$

где J — сила электрического тока; $d\vec{l}$ — направленный элемент проводящего контура; $\vec{j}$ — объемная плотность электрического тока проводимости.

Магнитный дипольный момент $d\vec{p}_m$ физически бесконечно малого элемента объемом dV среды определяется векторным полем намагничения среды $\vec{M}$:

$$d\vec{p}_m = \vec{M}dV.$$

Комбинация векторных полей $\vec{B}$ и $\vec{M}$ характеризует векторное поле $\vec{H}$ напряженности магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}), \tag{1}$$

где μ_0 — магнитная постоянная.

Для неподвижной линейной изотропной среды справедливы материальные уравнения вида

$$\vec{M} = (\mu - 1)\vec{H};$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}.$$

Здесь μ — относительная магнитная проницаемость среды.

Для стационарного во времени электрического поля в изотропной среде достаточно задать два исходных векторных поля, например $\vec{E}$ и $\vec{D}$, чтобы определить скалярную величину относительной диэлектрической проницаемости среды ε и векторное поле поляризованности среды $\vec{P}$. Для стационарного во времени магнитного поля также достаточно задать два вектора, например $\vec{B}$ и $\vec{H}$, чтобы найти относительную магнитную проницаемость μ среды и векторное поле намагничения среды $\vec{M}$.

Основа теории электростатики — фундаментальный закон Кулона: закон взаимодействия сосредоточенных покоящихся электрических зарядов в вакууме ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$), "полевая" форма которого имеет вид

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \equiv -\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right), \tag{2}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения; $\vec{r}\,'$ — радиус-вектор точки расположения элементарного электрического заряда; dq — физически бесконечно малый (сосредоточенный) электрический заряд.

Основа теории магнитостатики — закон Био-Савара для вакуума:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')dV}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \equiv \mathrm{rot} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} dV}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right). \tag{3}$$

В соотношениях (2) и (3), а также в соотношениях, приведенных далее, интегрирование выполняется по координатам точки расположения источников поля, т.е. по штрихованным координатам.

Произвольное векторное поле в безграничном пространстве полностью определяется объемной плотностью скалярного источника поля и объемной плотностью векторного источника поля [12]. В качестве объемной плотности скалярного источника выступает дивергенция рассматриваемого векторного поля, а в качестве объемной плотности векторного источника поля — ротор этого векторного поля:

$$\vec{a} = \mathrm{grad} \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathrm{div} \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV \right) + \mathrm{rot} \left(\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathrm{rot}\, \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV \right). \tag{4}$$

Соотношение (4) справедливо для векторных полей с источниками поля, расположенными в ограниченной области. Здесь и ниже скалярная плотность источника поля $\vec{a}$ — это некоторое скалярное поле $g(\vec{r})$ в рассматриваемой области изменения независимых переменных, векторная плотность источника поля $\vec{a}$ — некоторое векторное поле $\vec{f}(\vec{r})$, дивергенция которого равна нулю. Эти величины рассматриваются как источники поля $\vec{a}$.

Основные дифференциальные уравнения электро- и магнитостатики. Как правило, дифференциальные уравнения электро- и магнитостатики для неподвижной среды имеют вид

$$\mathrm{div}\, \vec{D} = \rho; \quad \mathrm{rot}\, \vec{E} = 0;$$

$$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0; \quad \mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}\,'_m),$$

где $\vec{j}\,'_m$ — объемная плотность токов намагничения среды.

Запишем дифференциальные уравнения электростатики для векторных полей $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$:

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}; \quad \mathrm{rot}\, \vec{E} = 0; \tag{5}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{P} = -\rho'; \quad \mathrm{rot}\, \vec{P} = -\varepsilon_0 \vec{E} \times \mathrm{grad}\, \varepsilon; \tag{6}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{D} = \rho; \quad \mathrm{rot}\, \vec{D} = -\varepsilon_0 \vec{E} \times \mathrm{grad}\, \varepsilon \tag{7}$$

и дифференциальные уравнения магнитостатики для векторных полей $\vec{B}$, $\vec{M}$, $\vec{H}$:

$$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0; \quad \mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}\,'_m); \tag{8}$$

$$\operatorname{div}\vec{M} = \frac{\vec{B}\,\mathrm{grad}\,\mu}{\mu_0\mu^2}; \quad \operatorname{rot}\vec{M} = \vec{j}\,'_m; \tag{9}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = -\frac{\vec{B}\mathrm{grad}\,\mu}{\mu_0\mu^2}; \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}. \tag{10}$$

Здесь ρ — объемная плотность сторонних электрических зарядов; ρ' — объемная плотность связанных электрических зарядов (проявление эффекта поляризованности среды); $\vec{j}'_m$ — объемная плотность токов намагничения среды (проявление эффекта намагничения среды). Уравнения (5) являются следствием фундаментального закона Кулона о взаимодействии неподвижных сосредоточенных электрических зарядов в вакууме. Естественное следствие уравнений (10) — условие соленоидальности векторного поля объемной плотности тока проводимости:

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0. \tag{11}$$

Иначе, уравнение (11) является дифференциальной формой закона сохранения электрического заряда для стационарного случая, его можно рассматривать в качестве основополагающего уравнения магнитостатики.

Анализируя системы уравнений (5)–(7) и (8)–(10), интересно отметить, что только "силовые" векторные поля, т.е. векторные поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ являются *специфическими*: один из источников векторного поля у них отсутствует. Кроме того, векторное поле $\vec{E}$ потенциально, а векторное поле $\vec{B}$ вихревое (соленоидальное). Напряженность электростатического поля определяется только положением электрических зарядов в пространстве, поле магнитной индукции — только коллективным движением электрических зарядов. Определенная симметрия систем уравнений для векторного поля поляризованности среды $\vec{P}$ (см. (6)) и векторного поля намагничения среды $\vec{M}$ (см. (9)) тоже прослеживается, но менее ярко выражена. Только у "силовых" векторных полей в электро- и магнитостатике источниками поля являются электрические заряды или электрические токи (коллективное движение электрических зарядов), остальные векторные поля имеют составляющие источников поля, зависящие от "силовых" полей и степени неоднородности среды. Изложенное выше позволяет рассматривать "силовые" векторные поля в качестве определяющих. Используя методику, приведенную в работе [10], с целью выявить скрытую симметрию основных уравнений электро- и магнитостатики, перепишем соотношения (5) и (8) в следующей форме:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}; \quad \operatorname{rot}\vec{E} = \zeta\,\vec{j}^{\,(m)}; \tag{12}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = \xi\rho^{(m)}; \quad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}\,'_m), \tag{13}$$

где $\vec{j}^{(m)}$ — объемная плотность “магнитных” токов, результат коллективного движения “магнитных” зарядов (величина, тождественно равная нулю); $\rho^{(m)}$ — объемная плотность “магнитных” зарядов (в классической электродинамике эти заряды не обнаружены, поэтому плотность $\rho^{(m)}$ тождественно равна нулю); ξ и ζ — скалярные величины (некоторые коэффициенты пропорциональности), детализация которых не требуется. Фактически, уравнения (5), (8) и уравнения (12), (13) не различаются, но вторая форма записи позволяет выявить скрытую симметрию уравнений электро- и магнитостатики.

Скалярные источники электростатического и стационарного магнитного полей определяются объемной плотностью электрических и “магнитных” зарядов, т.е. имеет место соответствие физической природы рассматриваемого поля и заряда, его порождающего.

Векторный источник электростатического поля определен объемной плотностью “магнитных” токов, а векторный источник магнитного поля — объемной плотностью электрических токов. Легко заметить, что электрическое поле, в частности, порождается “магнитными токами” (токами иной физической природы) так же, как и магнитное поле, в частности, порождается токами электрической природы.

Отмеченная скрытая симметрия уравнений электро- и магнитостатики может быть использована для установления структуры уравнений классической электродинамики.

Формирование системы уравнений классической электродинамики. Электрическое и магнитное поля в нестационарных условиях, естественно, приобретают новые свойства. Если “силовые” векторные поля в нестационарных условиях остаются определяющими, то система уравнений классической электродинамики должна состоять из четырех уравнений: 1) скалярного уравнения для скалярного источника векторного поля напряженности электрического поля; 2) векторного уравнения для векторного источника векторного поля напряженности электрического поля; 3) скалярного уравнения для скалярного источника векторного поля магнитной индукции; 4) векторного уравнения для векторного источника векторного поля магнитной индукции (или им эквивалентных).

Скалярные источники векторных полей инвариантны, тогда естественно постулировать, что “дивергентные” уравнения статики для “силовых” векторных полей не изменяют вида в нестационарных условиях:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}; \tag{14}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0. \tag{15}$$

В этой части физические допущения настоящей работы по результату не отличаются от общепринятых: соотношения (14), (15) рассматриваются в качестве постулата как составная часть системы уравнений Максвелла. Здесь учтено то, что скалярные источники “силовых” векторных полей определяются зарядами (скалярные величины) соответствующей физической природы. Для поля напряженности электрического поля это электрические заряды, и другой возможности, по-видимому, не существует. Аналогичная ситуация существует и в отношении скалярного источника векторного поля магнитной индукции (с учетом отсутствия в классической электродинамике “магнитных” зарядов).

Уравнения для векторных источников электромагнитного поля можно получить следующим образом. Рассмотрим закон сохранения электрического заряда в нестационарных условиях:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}. \tag{16}$$

Если дифференциальная форма теоремы Гаусса для векторного поля $\vec{D}$ остается справедлива в силу определения этого векторного поля и принятого предположения (14), то выполняются соотношения

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \Rightarrow \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{17}$$

использование которых в законе сохранения электрического заряда (16) приводит к результату

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0. \tag{18}$$

Фактически соотношением (18) неявно описывается некоторое векторное поле $\vec{\Psi}$:

$$\operatorname{rot} \vec{\Psi} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

так как $\operatorname{div}\operatorname{rot} \vec{\Psi} \equiv 0$, $\forall \vec{\Psi}$. В стационарных условиях имеет место соотношение

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}.$$

Естественно отождествить векторное поле $\vec{\Psi}$ с векторным полем напряженности магнитного поля $\vec{H}$:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \tag{19}$$

Уравнение (19) известно в классической электродинамике как закон полного тока. Таким образом, векторный источник векторного поля напряженности магнитного поля определяется не только электрическим током проводимости, но и "током смещения":

$$\vec{j}\,' = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Для установления закона полного тока в дифференциальной форме (19) можно использовать различные методические приемы. Изложенное выше во многом сходно с рассуждениями, приведенными в работе [13]. Вывод соотношения (19) непосредственно из закона Био-Савара с использованием предположения о справедливости этого закона в квазистационарных условиях и закона сохранения электрического заряда в форме (16) представлен в работах [14–16].

По мнению М. Абрагама и Р. Беккера, "... нужное дополнение для тока проводимости найдено. Это ток смещения, ... введение которого в основные уравнения образует стержень всей Максвелловской теории. Это есть единственное, но решающее различие между воззрениями Максвелловской теории и более старой теории дальнодействия" (Теория электричества, Л.–М., 1936).

Затронутая в приведенной цитате проблема различий теории дальнодействия и теории близкодействия не так проста, как это представляется на первый взгляд. Принято, что закон Кулона и закон Био-Савара являются следствием основных предпосылок теории дальнодействия. Однако теорема Гаусса для векторного поля $\vec{D}$ (следствие закона Кулона) — составная часть системы уравнений классической электродинамики. Из закона Био-Савара следует теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля (стационарный случай). Циркуляция по произвольному замкнутому контуру вектора напряженности магнитного поля, образованного постоянным электрическим током, текущим по прямолинейному проводнику конечной длины (условия магнитостатики при этом не выполнены), может быть рассчитана с помощью закона Био-Савара и принципа суперпозиции. Значение этой величины может быть вычислено с использованием закона полного тока с учетом изменения величины сосредоточенных электрических зарядов на концах проводника с течением времени. Результаты расчетов совпадают [14–16]. Осознание этого факта требует, по-видимому, отдельного исследования.

Закон полного тока (19) можно переписать с учетом определения векторного поля $\vec{D}$ в нестационарных условиях:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad \forall t,$$

в результате имеем

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Предполагая справедливым определение (1) в нестационарных условиях, получаем уравнение для векторного источника поля магнитной индукции:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\operatorname{rot}\vec{H} + \operatorname{rot}\vec{M}\right) = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \vec{j}\,'_m\right).$$

Если ввести определение "объемная плотность тока поляризации среды"

$$\vec{j}''_p = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t},$$

то уравнение для векторного источника векторного поля магнитной индукции принимает вид

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \vec{j}\,'_m + \vec{j}''_p + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\vec{j}^{(e)}_{\Sigma} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right), \qquad (20)$$

где $\vec{j}^{(e)}_{\Sigma}$ — суммарная объемная плотность *электрических* токов.

Проанализируем структуру уравнения (20). Векторный источник векторного поля магнитной индукции определяется совокупностью электрических токов проводимости, токов намагничения и токов поляризации среды (эффект коллективного движения электрических зарядов) и скоростью изменения во времени *напряженности электрического поля*.

В стационарных условиях для векторных источников полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ имеет место специфическая симметрия зависимостей: векторный источник поля $\vec{E}$ определяется коллективным движением "магнитных" зарядов (12), а векторный источник поля $\vec{B}$ — коллективным движением электрических зарядов (13). Таким образом, существует "перекрестный" эффект формирования векторных источников "силовых" полей. Постулируем действенность "перекрестного" эффекта в нестационарных условиях с учетом различия стационарного уравнения (8) и нестационарного уравнения (20): объемная плотность векторного источника поля напряженности электрического поля $\vec{E}$ должна определяться коллективным движением "магнитных" зарядов и скоростью изменения во времени векторного поля магнитной индукции $\vec{B}$:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \alpha\vec{j}^{(m)}_{\Sigma} + \beta\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (21)$$

В соотношении (21) α и β — некоторые скалярные коэффициенты; $\vec{j}^{(m)}_{\Sigma}$ — объемная плотность "магнитных" токов (эффект коллективного движения "магнитных" зарядов). Поскольку в классической электродинамике "магнитных" зарядов не обнаружено, естественно принять

$$\vec{j}^{(m)}_{\Sigma} = 0.$$

В результате проведенных рассуждений запишем систему “роторных” уравнений

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\,\vec{D}}{\partial t}; \tag{22}$$

$$\frac{1}{\beta}\operatorname{rot}\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \tag{23}$$

Значение β определяется однозначно с использованием метода вывода теоремы Пойнтинга для переменного во времени электромагнитного поля. Правую и левую части уравнения (22) умножим скалярно на вектор $\vec{E}$, правую и левую части уравнения (23) — на вектор $\vec{H}$, сложим результаты:

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} + \frac{1}{\beta}\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{j}\vec{E}. \tag{24}$$

Если материальные уравнения среды “линейны” и не зависят от времени

$$\vec{D} = \varepsilon(x,y,z)\varepsilon_0\vec{E}; \quad \vec{B} = \mu(x,y,z)\mu_0\vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad \forall t, \tag{25}$$

то соотношение (24) преобразуем к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}\,\vec{D}}{2} + \frac{\vec{H}\,\vec{B}}{2}\right) = \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} + \frac{1}{\beta}H\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{j}\vec{E}. \tag{26}$$

В левой части соотношения (26) содержится частная производная объемной плотности энергии электромагнитного поля по времени, последний член в правой части уравнения (26) является объемной плотностью “стока” энергии электромагнитного поля — объемная плотность мощности джоулевых потерь. Соотношение (26) приобретает стандартную (дивергентную) форму закона сохранения электромагнитной энергии при

$$\beta = -1. \tag{27}$$

Действительно, при этом справедливы соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\vec{E}^2}{2} + \frac{\mu_0\vec{H}^2}{2}\right) = -\operatorname{div}\vec{S} - \sigma\vec{E}^2; \quad \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H},$$

где $\vec{S}$ — вектор Умова – Пойнтинга.

Следовательно, теоретически получено уравнение электромагнитной индукции в форме

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial\,t}. \tag{28}$$

Результат (28) опровергает утверждение В. Пановского и М. Филипс: “Соотношение (имеется в виду закон электромагнитной индукции

Фарадея) представляет собой независимый закон, полученный экспериментально, который никоим образом не может быть выведен из соотношений, приведенных ранее. Вопреки некоторым утверждениям закон индукции Фарадея не выводится также и из закона сохранения энергии полной системы токов в магнитном поле” [3].

Отметим, что Дж. Максвелл записал уравнение (28) в форме соотношения [9]:

$$E = \frac{\partial A}{\partial t},$$

что позволяет получить при использовании современного математического аппарата закон электромагнитной индукции в виде

$$\text{ЭДС} = \oint \vec{E} d\vec{l} = \oint \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\vec{l} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{A} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B} d\vec{S} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (29)$$

Этот результат необходимо дополнить правилом Ленца и использовать дифференциальный аналог соотношения (29), принятого Максвеллом в качестве теоретического обобщения результатов Фарадея. Здесь применено введенное еще в 1845 г. Ф. Нейманом понятие “векторный потенциал магнитного поля” $\vec{A}$ “как аналитической меры электротонического состояния Фарадея” [9]. Скалярный потенциал Пуассона и векторный потенциал Неймана до сих пор являются главными понятиями теории потенциала в математической физике.

Заключение. Полная (замкнутая) система уравнений классической электродинамики для изотропной проводящей неподвижной среды (с учетом эффектов поляризованности и намагниченности среды) с использованием материальных уравнений (25) может быть записана в следующем виде:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (30)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (31)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (32)$$

Скалярный источник электромагнитного поля — объемная плотность электрических зарядов, векторные источники электромагнитного поля — объемная плотность токов проводимости и токов смещения, скорость изменения во времени векторного поля магнитной индукции, взятая с обратным знаком.

Система уравнений классической электродинамики (30)–(32) получена из первичных основополагающих результатов электро- и магнитостатики, дифференциальные уравнения которых обладают специфической симметрией объемных плотностей источников векторного поля, с учетом закона сохранения электрического заряда, установленного Б. Франклиным, законов Ома и Джоуля – Ленца, отсутствия в природе (классическая электродинамика) “магнитных зарядов” и “магнитных токов” без использования представлений электронных теорий и без прямого использования результатов Фарадея и правила Ленца, а также опытов по протеканию переменного во времени электрического тока в электрической неразветвленной цепи, содержащей электрический конденсатор. При формировании системы уравнений Максвелла применены результаты исследований Н.А. Умова по переносу энергии в непрерывных средах [11] и результаты Н.Е. Кочина по конструктивному восстановлению произвольного векторного поля по известным распределениям его скалярного и векторного источников [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 451 с.
2. *Савельев И.В.* Основы теоретической физики. В 2 т. Т. 1. Механика и электродинамика. М.: Наука, 1991. 496 с.
3. *Пановский В.*, *Филипс М.* Классическая электродинамика; пер с англ. М.: Физматгиз, 1963. 432 с.
4. *Макаров А.М.*, *Лунёва Л.А.*, *Макаров К.А.* Интегральные уравнения электростатики. Необратимые процессы в природе и технике: Труды 6 Всеросс. конф. 26–28 января 2011 г. В 3 ч. Ч. 1. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. С. 207–210.
5. *Макаров А.М.*, *Лунёва Л.А.*, *Макаров К.А.* Обоснование уравнений электростатики изотропных диэлектриков. Необратимые процессы в природе и технике: Труды 6 Всеросс. конф. 26–28 января 2011 г. В 3 ч. Ч. 1. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. С. 211–214.
6. *Макаров А.М.*, *Лунёва Л.А.*, *Макаров К.А.* Об основных уравнениях электростатики изотропных диэлектриков // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2011. № 2 (41). С. 25–40.
7. *Макаров А.М.*, *Лунёва Л.А.*, *Макаров К.А.* Магнитостатика проводящих сред. Необратимые процессы в природе и технике: Труды 6 Всероссийской конференции 26–28 января 2011 г. В 3 ч. Ч. 1. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. С. 215–218.
8. *Макаров А.М.*, *Лунёва Л.А.*, *Макаров К.А.* Статика изотропных магнетиков. Необратимые процессы в природе и технике: Труды 6 Всеросс. конф. 26–28 января 2011 г. В 3 ч. Ч. 1. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. С. 219–222.
9. *Уиттекер Э.* История теории эфира и электричества. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 512 с.
10. *Макаров А.М.*, *Лунёва Л.А.*, *Макаров К.А.* О структуре системы уравнений классической электродинамики // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2014. № 3 (54). С. 39–52.
11. *Умов Н.А.* Уравнения движения энергии в телах. Избранные сочинения. М.–Л.: Гос. изд-во теоретической и технической литературы. 1950. 575 с.
12. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 427 с.
13. *Новожилов Ю.В.*, *Яппа Ю.А.* Электродинамика. М.: Наука, 1978. 352 с.

14. *Макаров А.М.*, *Лунёва Л.А.*, *Макаров К.А.* Теория и практика классической электродинамики. М.: URSS, 2013. 767 с.
15. *Макаров А.М.*, *Макаров К.А.* Закон полного тока как следствие закона Био-Савара – Лапласа. Необратимые процессы в природе и технике: Тезисы докладов 3 Всеросс. конф. 24–26 января 2005 г. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. С. 64–65.
16. *Макаров А.М.*, *Макаров К.А.* К вопросу о циркуляции по замкнутому контуру напряженности магнитного поля незамкнутой кривой с током. Необратимые процессы в природе и технике: Тезисы докладов 3 Всеросс. конф. 24–26 января 2005 г. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. С. 66.

REFERENCES

[1] Landau L.D., Lifshic E.M. Teoreticheskaja fizika. V 10 t. T. 2. Teorija polja [Theoretical physics. Ten-volume set. Vol. 2. Field theory]. Moscow, Nauka Publ., 1988. 451 p. (Eng. Ed.: Landau L.D., Lifshitz E.M. The classical theory of fields. Oxford, New York, Pergamon Press, 1975. 402 p.)

[2] Savel'ev I.V. Osnovy teoreticheskoj fiziki. V 2 t. T. 1. Mehanika i jelektrodinamika. [Fundamentals of theoretical physics. Two-volume set. Vol. 1. Mechanics and electrodynamics] Moscow, Nauka Publ., 1991. 496 p.

[3] Panofsky W.K.H., Phillips M. Classical Electrodynamics. Second Edition. Dover Books on Physics, 2005. 512 p. (Russ. Ed.: Panovskiy V., Filips M. Klassicheskaya elektrodinamika. Per. s angl. V.P. Bykova. Pod red. S.P. Kapitsy / Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963. 432 p.)

[4] Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Integral equations of electrostatics. *Tr. 6 Vseross. konf. "Neobratimye processy v prirode i tehnike". V 3 ch.* [Proc. 6th All-Russ. Conf. "Irreversible Processes in the Nature and Technology". In 3 parts]. 26–28 January 2011, Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011, part 1, pp. 207–210 (in Russ.).

[5] Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Justification of electrostatics equations for isotropic dielectrics. *Tr. 6 Vseross. konf. "Neobratimye processy v prirode i tehnike". V 3 ch.* [Proc. 6th All-Russ. Conf. "Irreversible Processes in the Nature and Technology". In 3 parts]. 26–28 January 2011, Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011, part 1, pp. 211–214 (in Russ.).

[6] Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Concerning basic equations of electrostatics of isotropic dielectrics. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2011, no. 2 (41), pp. 25–40 (in Russ.).

[7] Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Magnetostatics of conductive medium. *Tr. 6 Vseross. konf. "Neobratimye processy v prirode i tehnike". V 3 ch.* [Proc. 6th All-Russ. Conf. "Irreversible Processes in the Nature and Technology". In 3 parts]. 26–28 January 2011, Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011, part 1, pp. 215–218 (in Russ.).

[8] Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. The statics of isotropic magnetics. *Tr. 6 Vseross. konf. "Neobratimye processy v prirode i tehnike". V 3 ch.* [Proc. 6th All-Russ. Conf. "Irreversible Processes in the Nature and Technology". In 3 parts]. 26–28 January 2011, Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011, part 1, pp. 219–222 (in Russ.).

[9] Whittaker E.R.S. A History of the Theories of Aether and Alectricity. The Classical Theories. Humanities Press, 1973. 481 p. (Russ. Ed.: Uitteker E. Istoriya teorii efira i elektrichestva / per. s angl. N.A. Zubchenko. Izhevsk, NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika" publ., 2001. 512 p.)

[10] Makarov A.M., Lunyova L.A., Makarov K.A. Concerning structure of simultaneous equations of the classical electrodynamics. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2014, no. 3, pp. 39–52 (in Russ.).

[11] Umov N.A. Uravneniya dvizheniya energii v telakh. Izbrannye sochineniya [Motion equation of energy in the bodies. Selected works]. Moscow–Leningrad, Gos. Izd. Teoreticheskoy i Tekhnicheskoy Literatury Publ., 1950. 575 p.

[12] Kochin N.E. Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo ischislenija [Vectorial calculus and elements of tensor analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 427 p.

[13] Novozhilov Ju.V., Jappa Ju.A. Jelektrodinamika [Electrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 352 p.

[14] Makarov A.M., Luneva L.A., Makarov K.A. Teoriya i praktika klassicheskoy elektrodinamiki [Theory and practice of classical electrodynamics]. Moscow, URSS Publ., 2013. 767 p.

[15] Makarov A.M., Makarov K.A. Ampere's circuital law as a consequence of Biot-Savart-Laplace's law. *Tezisy dokl. 3 Vseross. Konf. "Neobratimye protsessy v prirode i tekhnike"* [Summ. Rep. 3th All-Russ. Conf. "Irreversible processes in the Nature and Technology"], Moscow, 24–25 January 2005, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2005, pp. 64–65 (in Russ.).

[16] Makarov A.M., Makarov K.A. Revisiting the closed-circuit circulation of magnetic strength of open curve with the current. Tezisy dokl. 3 Vseross. Konf. "Neobratimye protsessy v prirode i tekhnike" [Summ. Rep. 3th All-Russ. Conf. "Irreversible processes in the Nature and Technology"], Moscow, 24–25 January 2005, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2005, pp. 66 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 21.11.2013

Анатолий Макарович Макаров — д-р техн. наук, профессор кафедры "Физика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области физики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

A.M. Makarov — Dr. Sci. (Eng.), professor of "Physics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of physics.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Любовь Александровна Лунёва — канд. техн. наук, доцент кафедры "Физика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 50 научных работ в области физики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

L.A. Lunyova — Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor of "Physics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 50 publications in the field of physics.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Константин Анатольевич Макаров — канд. техн. наук, доцент кафедры "Гидромеханика, гидромашины и гидропневмоавтоматика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области гидравлики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

K.A. Makarov — Cand. Sci. (Eng.), assoc. professor of "Hydromechanics, Hydromachines and Hydropneumoautomatics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in the field of hydraulics.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.