

А. А. Локтев

**ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР ТВЕРДОГО ТЕЛА
ПО ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКЕ С УЧЕТОМ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН**

Решена задача поперечного удара твердого тела по ортотропной пластинке, имеющей цилиндрическую анизотропию. Динамическое поведение пластинки описывается неклассическими уравнениями типа Уфлянда–Миндлина, в которые входят пять перемещений точек мишени. Волновые уравнения позволяют предположить, что продольные и поперечные волны, возникающие после контакта ударника и пластинки, распространяются с конечной скоростью и влияют на деформацию пластинки вне зоны контакта. Для определения перемещений и силы контакта в месте взаимодействия используются преобразование Лапласа и асимптотический метод разложения неизвестных величин в степенной ряд по малому параметру. Соотношение местного смятия и силы в месте контакта выражается при помощи модели Герца для твердого тела со сферическим ударником.

Результаты решения представлены в виде аналитических выражений и графических зависимостей. Исследовано влияние анизотропных свойств материала пластинки на динамический прогиб и контактную силу в месте взаимодействия.

E-mail: prtlokt@yandex.ru

Ключевые слова: ударное воздействие, пластинка Уфлянда–Миндлина, цилиндрическая анизотропия, контактная сила.

Задачам ударного взаимодействия твердых тел и пластинок посвящено множество работ отечественных и зарубежных ученых [1–12]. Рассматривались классические [1–4] и волновые [2, 5–8] уравнения мишени, для описания контактного процесса использовались модель Герца [1, 2, 5, 9, 10], а также линейно упругая [3, 6], нелинейно упругая [7], вязкоупругая [8] модели. В качестве методов решения применялись асимптотические методы [2, 5–8], метод конечных элементов [11], преобразование Лапласа [8, 13]. Для определения искомым величин использовались разложения в лучевой ряд [5–8], в ряды по функциям Бесселя [2], полиномам Лежандра [13], ряды Фурье [10].

В перечисленных работах определены сила контакта в месте взаимодействия [1–13], динамический прогиб [2, 6, 9, 11, 12], выполнен сравнительный анализ динамических характеристик, полученных для классических и волновых уравнений мишени [2], проведен учет растяжения-сжатия срединной поверхности мишени [5], исследованы анизотропные свойства мишени при нормальном осесимметричном

ударе [6], предложено использование буфера для уменьшения силы взаимодействия в месте контакта ударника и реальной строительной конструкции [7], проведено сравнение различных вариаций лучевого метода с разложением экспоненциальной функции релаксации в степенной ряд и без него при вязкоупругом ударе [8].

Вместе с тем влияние волновых явлений, связанных с распространением волн растяжения-сжатия, поперечного и продольного сдвига при ударе, и анизотропных свойств мишени на динамические характеристики взаимодействия представляется недостаточно изученным.

В данной работе анализируется влияние анизотропных свойств материала мишени на динамические характеристики контакта при поперечном ударе сферического твердого тела по пластинке с учетом распространения в ней пяти волн (растяжения-сжатия, сдвига и кручения).

Постановка задачи. Рассматривается неосесимметричный удар твердого тела по круглой ортотропной пластинке толщиной h , обладающей цилиндрической анизотропией (рис. 1). Ударник при касании мишени имеет скорость V_0 , которая существенно меньше скоростей упругих волн в пластинке. Это позволяет пренебречь инерцией местного смятия в зоне контакта. Динамическое поведение пластинки описывается в системе цилиндрических координат $r\theta z$. Координатные оси направлены по осям анизотропии материала, плоскость $r\theta$ совмещена со срединной плоскостью пластинки.

Задача ударного взаимодействия подразделяется на задачу контакта двух тел и задачу определения перемещений точек соприкасающихся тел вне зоны контакта. Эти две задачи связаны посредством перемещений точек в зоне взаимодействия, которые определяются из

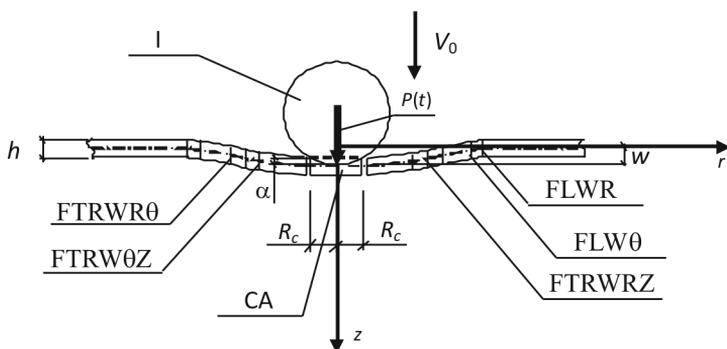


Рис. 1. Схема ударного взаимодействия шара и пластинки:

I — ударник; CA — область контакта; $FLWR, FLW\theta$ — фронт квазипродольной волны растяжения-сжатия по направлению осей r и θ соответственно; $FTRW\theta Z, FTRWRZ, FTRWR\theta$ — фронт квазипоперечной волны сдвига в плоскостях $\theta z, \theta r$ и $r\theta$ соответственно; R_c — радиус области взаимодействия ударника и пластинки

функционального уравнения [1]

$$y(t) = V_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t P(t_1) (t - t_1) dt_1, \quad (1)$$

где $y(t) = \alpha(t) + w(t)$ — полное перемещение ударника; $\alpha(t)$ — местное смятие материала пластинки в месте контакта; $w(t)$ — динамический прогиб пластинки в месте контакта; m — масса ударника; t — время, отсчитываемое от момента касания ударником мишени; $P(t_1)$ — сила их взаимодействия; t_1 — переменная интегрирования.

Для решения уравнения (1) необходимо выразить все неизвестные величины, входящие в него, через одну, в качестве которой обычно используется сила взаимодействия в месте контакта. Зависимость $\alpha(t)$ от $P(t)$ определяется из решения контактной задачи, а зависимость $w(t)$ от $P(t)$ — из решения уравнений типа Уфлянда–Миндлина для ортотропной пластинки, обладающей цилиндрической анизотропией, учитывающих инерцию вращения поперечных сечений и деформацию поперечного сдвига и записанных в безразмерном виде [6]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{c_2}{c_1} \varphi + \frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{12c_4}{c_1} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + M; \quad (2)$$

$$\frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial w}{r \partial r} - \frac{\varphi}{r} \right) + \frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + q_1 \sin \alpha_1; \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{c_2}{c_1} \frac{u}{r^2} + \frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + q_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2; \quad (4)$$

$$\frac{c_2}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{c_3}{c_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{\sigma_\theta + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + q_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2; \quad (5)$$

$$\frac{c_3}{c_1} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right) + \frac{c_2}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\sigma_\theta + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{12c_5}{c_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi \right) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \quad (6)$$

где $\tau = \frac{t\sqrt{c_1}}{h}$; $c_1 = \frac{E_r}{(1 - \sigma_r \sigma_\theta) \rho}$; $w = \frac{w'}{h}$; $u = \frac{u'}{h}$; $v = \frac{v'}{h}$; $r = \frac{r'}{h}$;
 $c_2 = \frac{E_\theta}{(1 - \sigma_r \sigma_\theta) \rho}$; $c_3 = \frac{G_{r\theta}}{\rho}$; $c_4 = \frac{KG_{rz}}{\rho}$; $c_5 = \frac{KG_{\theta z}}{\rho}$; $q_1 = \frac{qh}{\rho c_1}$;
 $M = \frac{12qR_1 \cos \alpha_1}{\rho h c_1} = \frac{12R_1 \cos \alpha_1}{h^2} q_1$; $D_r = \frac{h^3}{12} B_r$; $D_\theta = \frac{h^3}{12} B_\theta$;

$$D_k = \frac{h^3}{12} B_k; C_r = hB_r; C_\theta = hB_\theta; C_k = hB_k; D_{r\theta} = D_r \sigma_\theta + 2D_k;$$

$$B_r = \frac{E_r}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}; B_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}; B_k = G_{r\theta}; E_r \sigma_r = E_\theta \sigma_\theta; K = 5/6; D_r,$$

D_θ и C_r, C_θ — соответственно жесткости изгиба и растяжения-сжатия для направлений r, θ ; D_k — жесткость кручения; C_k — жесткость сдвига; E_r, E_θ и σ_r, σ_θ — модули упругости и коэффициенты Пуассона для направлений r, θ ; $G_{rz}, G_{\theta z}$ — модули сдвига в плоскостях rz и θz соответственно; $w(r, \theta)$ — нормальное перемещение срединной плоскости; $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ — тангенциальные перемещения срединной поверхности соответственно по осям r, θ ; $\varphi(r, \theta)$ и $\psi(r, \theta)$ — произвольные искомые функции координат r, θ ; ρ — плотность, h — толщина пластинки; q — нагрузка; α_1, α_2 — углы направления удара в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно (в данной работе они принимают значения $\pi/2$); R_1 — радиус сферического ударника.

В уравнениях (2)–(6) через c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 обозначены квадраты скоростей, индексы 1, 2 соответствуют продольным волнам растяжения-сжатия, распространяющимся в направлениях r и θ соответственно, индекс 3 соответствует волне сдвига продольных сечений в плоскости $r\theta$; индексы 4, 5 соответствуют поперечным волнам сдвига в плоскостях, перпендикулярных плоскостям $rz, \theta z$ соответственно. Упругие волны образуются в пластинке после касания ударником мишени и распространяются от границ контактной области.

Метод решения. Для решения функционального уравнения (1) необходимо найти зависимость прогиба пластинки и силы взаимодействия в месте контакта, т.е. решить систему уравнений (2)–(6) относительно w .

Используем преобразование Лапласа по времени, заменив $\varphi, \psi, w, u, v, q_1$ и M на $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \bar{w}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{q}_1$ и \bar{M} соответственно, и запишем уравнения (2)–(6) в виде

$$\bar{\varphi}_{,rr} + \frac{1}{r}\bar{\varphi}_{,r} + \frac{1}{r^2}\bar{\varphi}_{,\theta\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{c_2}{c_1}\bar{\varphi} + \frac{c_2\sigma_r + c_3}{c_1r}\bar{\psi}_{,r\theta} - \frac{c_2 + c_3}{c_1r^2}\bar{\varphi}_{,\theta} + \frac{12c_4}{c_1}(\bar{w}_{,r} - \bar{\varphi}) = -\bar{\varphi}p^2 + \bar{M}; \quad (7)$$

$$\frac{c_4}{c_1}\left(\bar{w}_{,rr} - \bar{\varphi}_{,r} + \frac{1}{r}\bar{w}_{,r} - \frac{\bar{\varphi}}{r} + \frac{1}{r^2}\bar{w}_{,\theta\theta} - \frac{1}{r}\bar{\psi}_{,\theta}\right) = \bar{w}p^2 + \bar{q}_1 \sin \alpha_1; \quad (8)$$

$$\bar{u}_{,rr} + \frac{1}{r}\bar{u}_{,r} + \frac{c_3}{c_1r^2}\bar{u}_{,\theta\theta} - \frac{c_2}{c_1}\frac{\bar{u}}{r^2} + \frac{c_2\sigma_r + c_3}{c_1r}\bar{v}_{,r\theta} - \frac{c_2 + c_3}{c_1r^2}\bar{v}_{,\theta} = \bar{u}p^2 + \bar{q}_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2; \quad (9)$$

$$\frac{c_2}{c_1r^2}\bar{v}_{,\theta\theta} + \frac{c_3}{c_1}\left(\bar{v}_{,rr} + \frac{1}{r}\bar{v}_{,r} - \frac{\bar{v}}{r^2}\right) + \frac{\sigma_\theta + c_3}{c_1r}\bar{u}_{,r\theta} + \frac{c_2 + c_3}{c_1r^2}\bar{u}_{,\theta} = \bar{v}p^2 + \bar{q}_1 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2; \quad (10)$$

$$\frac{c_3}{c_1}\left(\bar{\psi}_{,rr} + \frac{1}{r}\bar{\psi}_{,r} - \frac{\bar{\psi}}{r^2}\right) + \frac{c_2}{c_1r^2}\bar{\psi}_{,\theta\theta} + \frac{\sigma_\theta + c_3}{c_1r}\bar{\varphi}_{,r\theta} + \frac{c_2 + c_3}{c_1r^2}\bar{\varphi}_{,\theta} + \frac{12c_5}{c_1}\left(\frac{1}{r}\bar{w}_{,\theta} - \bar{\psi}\right) = -\bar{\psi}p^2, \quad (11)$$

где p — параметр преобразования; индексы r и θ , стоящие после запятой, обозначают частную производную по указанным переменным.

Из уравнения (11) выразим переменную \bar{w} и подставим ее в выражения (7) и (8), в результате получим систему уравнений относительно $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$

$$\begin{aligned} &\bar{\varphi}_{,rr\theta}\left(1 - \frac{(c_1\sigma_\theta + c_3)c_4}{c_1c_5}\right) + \frac{1}{r}\bar{\varphi}_{,r\theta}\left(1 - \frac{(c_2 + c_3)c_4}{c_1c_5}\right) + \frac{1}{r^2}\bar{\varphi}_{,\theta\theta\theta} + \\ &\quad + \bar{\varphi}_{,\theta}\left(p^2 + \frac{(c_2 + c_3)c_4}{c_1c_5r^2} - \frac{c_2}{c_1r^2} - \frac{12c_4}{c_1}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{r}\bar{\psi}_{,r\theta\theta}\left(\frac{c_2\sigma_r + c_3}{c_1} - \frac{c_2c_4}{c_1c_5}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{c_2 + c_3}{c_1}\bar{\varphi}_{,\theta\theta} + \\ &\quad + \left(\frac{12c_4r}{c_1} - \frac{p^2rc_4}{c_5} + \frac{c_3c_4}{c_1c_5r}\right)\left(\bar{\psi}_{,r} + \frac{\bar{\psi}}{r}\right) - \\ &\quad - \frac{c_3c_4r}{c_1c_5}\left(\frac{2}{r}\bar{\psi}_{,rr} + \bar{\psi}_{,rrr}\right) + \frac{c_2c_4}{c_1c_5r^2}\bar{\psi}_{,\theta\theta} = \bar{M}_{,\theta}; \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(p^2 \frac{c_1 \sigma_\theta + c_3}{12c_5} - \frac{c_4}{c_1} + \frac{(c_2 + c_3) c_4}{12c_1 c_5 r^2} \right) \left(\bar{\varphi}_{,r\theta} + \frac{\bar{\varphi}_{,\theta}}{r} \right) + \\
& + \bar{\psi}_{,\theta\theta} \left[\frac{c_4}{c_1} \left(\frac{c_3 - c_2}{12c_5 r^3} - \frac{p^2 c_1}{12c_5 r} \right) + \frac{p^2 c_2}{12c_5 r} \right] + \\
& + \bar{\psi}_{,rr} \left[\frac{c_4}{c_1} \left(r - \frac{c_3}{12c_5 r} - \frac{p^2 c_1 r}{12c_5} \right) + \frac{p^2 c_3 r}{12c_5} \right] + \\
& + \bar{\psi}_{,r} \left[\frac{c_4}{c_1} \left(3 - \frac{c_3}{12c_5 r^2} - \frac{3p^2 c_1}{12c_5} \right) + \frac{p^2 c_3}{12c_5} \right] - \\
& - \frac{(c_2 + c_3) c_4}{12c_1 c_5 r} \left(\bar{\psi}_{,\theta\theta rr} + \frac{\bar{\varphi}_{,\theta\theta\theta}}{r^2} \right) + \bar{\psi} \left(r + \frac{c_3}{12c_5 r} - \frac{p^2 c_1 r}{12c_5} \right) \left(\frac{c_4}{c_1} \frac{1}{r^2} - p^2 \right) - \\
& - \frac{c_2 c_4}{12c_1 c_5 r} \bar{\psi}_{,\theta\theta\theta\theta} - \frac{c_3 c_4}{3c_1 c_5} \left(\frac{r}{4} \bar{\psi}_{,rrrr} + \bar{\psi}_{,rrr} \right) - \frac{(c_1 \sigma_\theta + c_2 + 2c_3) c_4}{12c_1 c_5 r} \bar{\varphi}_{,rr\theta} - \\
& - \frac{(c_1 \sigma_\theta + c_3) c_4}{12c_1 c_5 r} \left(\frac{\bar{\varphi}_{,r\theta\theta\theta}}{r} + r \bar{\varphi}_{,rrr\theta} \right) = \bar{q}_{1\theta} \sin \alpha_1. \quad (13)
\end{aligned}$$

Решение системы уравнений (11), (12) будем искать в виде разложения в ряды по полиномам Лежандра [13]:

$$\bar{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r}{2R} \right) \cos(m\theta); \quad (14)$$

$$\bar{\psi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r}{2R} \right) \cos(m\theta); \quad (15)$$

$$\bar{w} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} w_{2n+m} P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r}{2R} \right) \cos(m\theta), \quad (16)$$

где R — радиус пластинки.

Нагрузку $q(t, r, \theta)$ от сосредоточенной силы взаимодействия в месте контакта $P(t)$ также представим в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра [13]

$$\bar{q}_1 = \frac{P(p)}{\pi R_c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (4n+3) P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r_1}{2R} \right) P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r}{2R} \right) \cos(m\theta), \quad (17)$$

где r_1 — координата точки в которой происходит динамический контакт.

Подставляя выражения (14) и (15) в уравнения (12), (13) и используя свойство ортогональности системы косинусов на отрезке $[-\pi, \pi]$, получаем следующие уравнения:

$$- m \left(1 - \frac{(c_1 \sigma_\theta + c_3) c_4}{c_1 c_5} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1,rr} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m}{r} \left(1 - \frac{(c_2 + c_3) c_4}{c_1 c_5} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1,r} + \frac{m^3}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1} - \\
& - m \left(p^2 + \frac{(c_2 + c_3) c_4}{c_1 c_5 r^2} - \frac{c_2}{c_1 r^2} - \frac{12c_4}{c_1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1} - \\
& - \frac{m^2}{r} \left(\frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_1} - \frac{c_2 c_4}{c_1 c_5} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1,r} + \frac{m^2}{r^2} \frac{c_2 + c_3}{c_1} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1} + \\
& + \left(\frac{12c_4 r}{c_1} - \frac{p^2 r c_4}{c_5} + \frac{c_3 c_4}{c_1 c_5 r} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1,r} + \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1} \right) - \\
& - \frac{c_3 c_4 r}{c_1 c_5} \left(\frac{2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1,rr} + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1,rrr} \right) + \\
& + \frac{c_2 c_4}{c_1 c_5 r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1} = \\
& = -m \frac{12R_1 \cos \alpha_1}{h^2} \frac{P(p)}{\pi R_c^2} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3) P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r_1}{2R} \right) P_{2n+1}; \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(p^2 \frac{c_1 \sigma_\theta + c_3}{12c_5} - \frac{c_4}{c_1} + \frac{(c_2 + c_3) c_4}{12c_1 c_5 r^2} \right) \times \\
& \times \left(-m \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1,r} - \frac{m}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1} \right) - \\
& - m^2 \left[\frac{c_4}{c_1} \left(\frac{c_3 - c_2}{12c_5 r^3} - \frac{p^2 c_1}{12c_5 r} \right) + \frac{p^2 c_2}{12c_5 r} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1} + \\
& + \left[\frac{c_4}{c_1} \left(r - \frac{c_3}{12c_5 r} - \frac{p^2 c_1 r}{12c_5} \right) + \frac{p^2 c_3 r}{12c_5} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1,rr} + \\
& + \left[\frac{c_4}{c_1} \left(3 - \frac{c_3}{12c_5 r^2} - \frac{3p^2 c_1}{12c_5} \right) + \frac{p^2 c_3}{12c_5} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1,r} - \\
& - \frac{(c_2 + c_3) c_4}{12c_1 c_5 r} \left(-m^2 \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1,rr} + \frac{m^3}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1} \right) + \\
& + \left(r + \frac{c_3}{12c_5 r} - \frac{p^2 c_1 r}{12c_5} \right) \left(\frac{c_4}{c_1} \frac{1}{r^2} - p^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1} - \\
& - \frac{c_2 c_4 m^4}{12c_1 c_5 r} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{c_3 c_4}{3 c_1 c_5} \left(\frac{r}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1, rrrr} + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+m} P_{2n+1, rrr} \right) - \\
& - \frac{(c_1 \sigma_\theta + c_3) c_4}{12 c_1 c_5 r} \left(\frac{m^3}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1, r} + m r \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1, rrr} \right) + \\
& + \frac{(c_1 \sigma_\theta + c_2 + 2 c_3) c_4 m}{12 c_1 c_5 r} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n+m} P_{2n+1, rr} = \\
& = -m \sin \alpha_1 \frac{P(p)}{\pi R_c^2} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3) P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r_1}{2R} \right) P_{2n+1}.
\end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (18) представим неизвестные величины в виде

$$\begin{aligned}
\varphi_{2n+m} &= \varphi_{2n+m}^0 \varepsilon^0 + \varphi_{2n+m}^1 \varepsilon^1 + \varphi_{2n+m}^2 \varepsilon^2 + \varphi_{2n+m}^3 \varepsilon^3; \\
\psi_{2n+m} &= \psi_{2n+m}^0 \varepsilon^0 + \psi_{2n+m}^1 \varepsilon^1 + \psi_{2n+m}^2 \varepsilon^2 + \psi_{2n+m}^3 \varepsilon^3,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $\varepsilon = p^{-2}$.

Подставляя соотношения (19) в уравнения (18), используя выражения для упрощения отношений полиномов Лежандра [14] и приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях ε , получаем набор систем уравнений относительно φ_{2n+m}^i и ψ_{2n+m}^i , в которых индекс i соответствует показателю степени ε .

Решая системы линейных алгебраических уравнений, начиная со старшей степени ε , получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\psi_{2n+m}^3 &= P(p) P_s, \quad \varphi_{2n+m}^3 = P(p) \left(\frac{c_1 R_1 \cos \alpha_1}{c_4 A_1^3} - P_s \right); \\
\psi_{2n+m}^2 &= P(p) P_s \left(1 + D_1 \cdot \frac{B_1^3}{A_1^3} - D_2 \right) - \frac{P(p) R_1 \cos \alpha_1 c_1}{A_1^3 c_4} D_1; \\
\varphi_{2n+m}^2 &= P(p) \frac{B_1^3}{A_1^3} P_s \left[-2 - \frac{D_3}{A_1^3} + D_2 \right] + \\
& + \frac{P(p) R_1 \cos \alpha_1 c_1}{A_1^3 c_4} \left(1 + \frac{D_3}{A_1^3} \right); \\
\psi_{2n+m}^i &= \left[P(p) \frac{c_1}{c_4} (A_1^3 - A_2^3 R_1 \cos \alpha_1) - \varphi_{2n+m}^{i+1} (A_1^3 A_2^2 - A_2^3 A_1^2) - \right. \\
& \left. - \psi_{2n+m}^{i+1} (A_1^3 B_2^2 - A_2^3 B_1^2) - \psi_{2n+m}^{i+2} B_2^1 \right] / (B_2^3 A_1^3 - B_1^3 A_2^3); \\
\varphi_{2n+m}^i &= \frac{P(p) R_1 \cos \alpha_1 c_1}{A_1^3 c_4} - \\
& - \frac{B_1^3}{A_1^3 (B_2^3 A_1^3 - B_1^3 A_2^3)} \left[\frac{c_1 P(p)}{c_4 A_1^3} (A_1^3 - A_2^3 R_1 \cos \alpha_1) - \right.
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
& -\varphi_{2n+m}^{i+1} \left(A_1^3 A_2^2 - A_2^3 A_1^2 + \frac{A_1^2}{A_1^3} \right) - \\
& -\psi_{2n+m}^{i+1} \left(A_1^3 B_2^2 - A_2^3 B_1^2 + \frac{B_1^2}{A_1^3} \right) - \psi_{2n+m}^{i+2} A_1^3 B_2^1 \Big],
\end{aligned}$$

где

$$P_s = \frac{c_1 A_1^3 - A_2^3 R_1 \cos \alpha_1}{c_4 B_2^3 A_1^3 - B_1^3 A_2^3};$$

$$\begin{aligned}
A_1^3 = & -m \left(\frac{c_1}{c_4} - \frac{c_1 \sigma_\theta + c_3}{c_5} \right) \frac{P_{2n+1,rr}}{P_{2n+1}} - \frac{m}{r} \left(\frac{c_1}{c_4} - \frac{c_2 + c_3}{c_5} \right) \frac{P_{2n+1,r}}{P_{2n+1}} + \\
& + \frac{m^3}{r^3} \frac{c_1}{c_4} - \left(\frac{c_2 + c_3}{c_5 r^2} - \frac{c_2}{c_4 r^2} - 12 \right) m + \frac{m^2}{r^2} \frac{c_2 + c_3}{c_4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^3 = & \left(1 + \frac{c_2 + c_3}{12c_5 r^2} \right) m \frac{P_{2n+1,r}}{P_{2n+1}} + \\
& + \left(\frac{1}{r} + \frac{c_2 + c_3}{12c_5 r^2} \right) m + \frac{c_1 \sigma_\theta + c_3}{12c_5} m \frac{P_{2n+1,rrr}}{P_{2n+1}} + \\
& + \frac{c_1 \sigma_\theta + c_2 + 2c_3}{12c_5 r} m \frac{P_{2n+1,rr}}{P_{2n+1}} - \frac{c_1 \sigma_\theta + c_3}{12c_5 r^2} m^3 \frac{P_{2n+1,r}}{P_{2n+1}} - \frac{c_2 + c_3}{12c_5 r^3} m^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1^3 = & \frac{P_{2n+1,r}}{P_{2n+1}} \left(\frac{m^2}{r^2} \left(\frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_4} - \frac{c_2}{c_5} \right) - \left(12r + \frac{c_3}{c_5 r} \right) \right) + \\
& + \left(\frac{c_2}{c_5} \frac{m^2}{r^2} - 12 + \frac{c_3}{c_5 r^2} \right) + \frac{2c_3}{c_5} \frac{P_{2n+1,rr}}{P_{2n+1}} + \frac{c_3 r}{c_5} \frac{P_{2n+1,rrr}}{P_{2n+1}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2^3 = & \frac{P_{2n+1,r}}{P_{2n+1}} \left(\frac{m^2}{r} \left(\frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_4} - \frac{c_2}{c_5} \right) - \left(12r + \frac{c_3}{c_5 r} \right) \right) + \\
& + \left(\frac{c_2 m^2}{c_5 r^2} - 12 + \frac{c_3}{c_5 r^2} \right) + \frac{2c_3}{c_5} \frac{P_{2n+1,rr}}{P_{2n+1}} + \frac{c_3 r}{c_5} \frac{P_{2n+1,rrr}}{P_{2n+1}};
\end{aligned}$$

$$A_2^2 = -\frac{c_1}{12c_5 c_4} m \left(\frac{c_2 + c_3}{r} + c_1 \sigma_\theta + c_3 \right), \quad A_1^2 = -\frac{c_1}{c_4} m;$$

$$\begin{aligned}
B_2^2 = & \frac{c_1}{12c_5 r} \left(1 - \frac{c_2}{c_4} \right) m^2 + \frac{c_1 r}{12c_5} \left(-1 + \frac{c_3}{c_4} \right) \frac{P_{2n+1,rr}}{P_{2n+1}} + \\
& + \frac{c_1}{12c_5} \left(-3 + \frac{c_3}{c_4} \right) \frac{P_{2n+1,r}}{P_{2n+1}} + \left(-\frac{c_1}{12c_5 r} - \frac{c_1}{c_4} \left(r + \frac{c_3}{12c_5 r} \right) \right);
\end{aligned}$$

$$B_1^2 = -\frac{c_1 r P_{2n+1,r}}{c_5 P_{2n+1}} - \frac{c_1}{c_5}; \quad B_2^1 = \frac{r (c_1)^2}{12c_4 c_5};$$

$$D_1 = \frac{A_1^3 A_2^2 - A_2^3 A_1^2}{B_2^3 A_1^3 - B_1^3 A_2^3}; \quad D_2 = \frac{A_1^3 B_2^2 - A_2^3 B_1^2}{B_2^3 A_1^3 - B_1^3 A_2^3};$$

$$D_3 = -A_1^2 + B_1^3 D_1; \quad i = 0, 1.$$

Выражения (20) вычисляются для определенной точки мишени, в которой необходимо рассчитать характеристики динамического взаимодействия, т.е. величина r принимает числовое значение. После определения величин $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ из уравнения (11) найдем выражение для прогиба пластинки

$$\begin{aligned} \bar{w}(p) = P(p) P_s \left[\left(-\frac{K_0 B_1^3}{A_1^3} + N_0 + M_0 + \frac{c_1 (K_0 + S_0) R_1 \cos \alpha_1}{c_4 A_1^3 P_s} \right) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{K_1 B_1^3}{A_1^3} + N_1 + M_1 + \frac{c_1 (K_1 + C_1^3 D_1) R_1 \cos \alpha_1}{c_4 A_1^3 P_s} \right) p^{-2} + \right. \\ \left. + \left(-\frac{D_1 C_1^3 B_1^3}{A_1^3} + D_2 C_1^3 + C_1^2 - C_1^3 + \frac{c_1 C_1^3 D_1 R_1 \cos \alpha_1}{c_4 A_1^3 P} \right) p^{-4} - C_1^3 p^{-6} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$C_1^3 = \frac{c_3}{12c_5 m} \left[\frac{12c_5 r}{c_3} + \frac{1}{r} - r \left(\frac{P_{2n+1,rr}}{P_{2n+1}} + \frac{1}{r} \frac{P_{2n+1,r}}{P_{2n+1}} \right) \right]; \quad C_1^2 = \frac{c_1 r}{12c_5 m};$$

$$\begin{aligned} K_0 = D_1 D_3 C_1^3 (D_3 - D_2) - \frac{D_1 C_1^3 ((D_2)^2 - D_4 D_1)}{A_1^3} - \\ - \frac{B_2^1 C_1^3 D_1}{B_2^3 A_1^3 - B_1^3 A_2^3} + D_1 C_1^2 \left(D_2 - \frac{D_3}{A_1^3} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_0 = \frac{D_4 D_1 C_1^3 (D_3 - D_2)}{(A_1^3)^2} - \frac{D_4 D_2 D_1 C_1^3}{A_1^3} + \frac{B_2^1 C_1^3 (B_1^3 D_1 - D_2)}{B_2^3 A_1^3 - B_1^3 A_2^3} + \\ + \frac{(D_2)^3 C_1^3}{A_1^3} - B_2^1 D_2 C_1^3 - \frac{D_4 D_1 C_1^2}{A_1^3} + (D_2)^2 C_1^2 - \frac{B_1^2 A_1^3 C_1^2}{B_2^3 A_1^3 - B_1^3 A_2^3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_0 = -C_1^3 - \frac{B_1^3 D_1 C_1^3 (D_3 - D_2)}{(A_1^3)^2} + \frac{D_1 B_1^3 (C_1^2 - C_1^3)}{A_1^3} + \\ + (1 - D_2) \left(\frac{D_2 C_1^3}{A_1^3} + C_1^2 \right) + \frac{B_2^1 C_1^3}{B_2^3 A_1^3 - B_1^3 A_2^3} + \frac{D_4 D_1 C_1^3}{A_1^3}; \end{aligned}$$

$$S_0 = D_1 (C_1^3 - C_1^2) + C_1^3 D_1 \left(\frac{D_3}{A_1^3} - D_1 \right);$$

$$K_1 = C_1^3 D_1 \left(\frac{D_3}{A_1^3} - D_2 \right) - C_1^2 D_1;$$

$$N_1 = \frac{D_4 D_1 C_1^3}{A_1^3} - C_1^3 (D_2)^2 + \frac{B_2^1 C_1^3}{B_2^3 A_1^3 - B_1^3 A_2^3} - D_2 C_1^2;$$

$$M_1 = -C_1^3 + C_1^2 - \frac{B_1^3}{A_1^3} D_1 C_1^3 + D_2 C_1^3; \quad D_4 = -B_1^2 + B_1^3 D_2.$$

После применения обратного преобразования Лапласа получаем выражение для динамического прогиба как функции времени и двух перемещений:

$$\begin{aligned} w(\varphi, \theta, \tau) = & \\ = & \frac{(1 - \sigma_\theta \sigma_r) h}{\pi R_c^2 E_r} \int_0^\tau \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (4n + 3) P(\tau_1) P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r_1}{2R} \right) \times \\ & \times P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r}{2R} \right) \cos(m\theta) \left[\Phi_0 \delta(\tau) + \Phi_1(\tau - \tau_1) + \right. \\ & \left. + \frac{\Phi_2(\tau - \tau_1)^3}{6} - \frac{C_1^3(\tau - \tau_1)^5}{120} \right] d\tau_1, \quad (22) \end{aligned}$$

где

$$\Phi_0 = -\frac{K_0 B_1^3}{A_1^3} + N_0 + M_0 + \frac{c_1 (K_0 + S_0) R_1 \cos \alpha_1}{c_4 A_1^3 P_s};$$

$$\Phi_1 = -\frac{K_1 B_1^3}{A_1^3} + N_1 + M_1 + \frac{c_1 (K_1 + C_1^3 D_1) R_1 \cos \alpha_1}{c_4 A_1^3 P_s};$$

$$\Phi_2 = -\frac{D_1 C_1^3 B_1^3}{A_1^3} + D_2 C_1^3 + C_1^2 - C_1^3 + \frac{c_1 C_1^3 D_1 R_1 \cos \alpha_1}{c_4 A_1^3 P}.$$

Поскольку начальная скорость удара невелика, для определения зависимости местного смятия и контактной силы, входящих в уравнение (1), воспользуемся известным соотношением для модели Герца [1–3]

$$\alpha = b P^{2/3}, \quad (23)$$

где $b = ((9\pi^2(k_1 + k)^2)/16R)^{1/3}$; $k_1 = (1 - \sigma_1^2)/E_1$; $k = (1 - \sigma^2)/E$; σ_1 , E_1 — коэффициент Пуассона и модуль упругости для ударника соответственно.

После подстановки выражений для прогиба мишени (22) в заданной точке, т.е. при фиксированных значениях координат r , φ , θ , и

местного смятия (23) в уравнение (1), получим нелинейное интегродифференциальное уравнение относительно контактной силы, которое можно решить, используя итерационную схему [13]

$$\tau_i = \tau_i, \quad s_i = s_{i-1} + V_{i-1}\tau + y_{i-1}\frac{\tau^2}{2},$$

$$w_i = \frac{(1 - \sigma_\theta \sigma_r) h}{\pi R_c^2 E_r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^i (4n + 3) P_j((i - j)\tau) P_{2n+1}\left(\cos \frac{\pi r_1}{2R}\right) \times \\ \times P_{2n+1}\left(\cos \frac{\pi r}{2R}\right) \cos(m\theta) \left[\Phi_0 \delta((i - j)\tau) + \right. \\ \left. + \Phi_1((i - j)\tau) + \frac{\Phi_2((i - j)\tau)^3}{6} - \frac{C_1^3((i - j)\tau)^5}{120} \right];$$

$$\alpha_i = s_i - w_i; \quad P_i = (\alpha_i/b)^{3/2}; \quad y_i = -\frac{P_i}{m}; \quad V_i = V_{i-1} + y_i\tau.$$

Результаты численного исследования. Воспользуемся полученными соотношениями и построим графические зависимости динамического прогиба и контактной силы в месте взаимодействия от времени падения ударника по нормали к поверхности при различных значениях модулей упругости и сдвига.

Параметры ударного взаимодействия ударника и пластинки заданы следующими: $m = 0,3$ кг, $h = 100$ мм, $V_0 = 10$ м/с, $\rho = 7850$ кг/м³.

На рис. 2–5 приведены зависимости безразмерной контактной силы в месте взаимодействия и динамического прогиба мишени от времени для различных значений модулей упругости и сдвига. На рис. 2, 4 у кривых цифрами указаны в ГПа значения соответственно E_r и E_θ , модули сдвига $G_{r\theta} = G_{rz} = G_{\theta z} = 70$ ГПа. На рис. 3, 5 указаны в ГПа значения $G_{r\theta}$, G_{rz} , $G_{\theta z}$ соответственно.

Из рис. 2 видно, что на максимальную контактную силу и время взаимодействия ударника и мишени большее влияние оказывает модуль упругости E_r , а изменение E_θ незначительно уменьшает указанные характеристики.

Как следует из рис. 3, модули сдвига оказывают на контактную силу в месте взаимодействия меньшее влияние, чем модули упругости. Вместе с тем $G_{\theta z}$ влияет на контактную силу больше, чем $G_{r\theta}$ и G_{rz} . При уменьшении $G_{\theta z}$ в несколько раз контактная сила увеличивается на 8 %, а время взаимодействия увеличивается в 2–3 раза. При уменьшении модуля сдвига в плоскости мишени контактная сила уменьшается, величина $G_{r\theta}$ может существенно влиять на продолжительность контакта и максимальное значение силы взаимодействия при ударе.

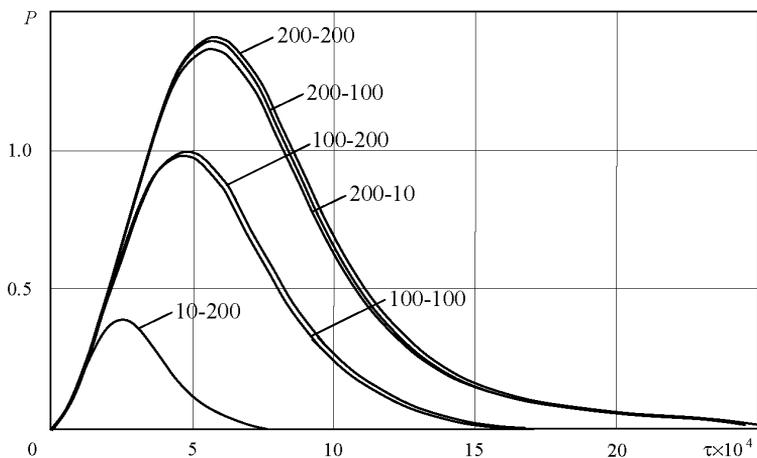


Рис. 2. Зависимость контактной силы от времени для различных значений E_r и E_θ (цифры у кривых)

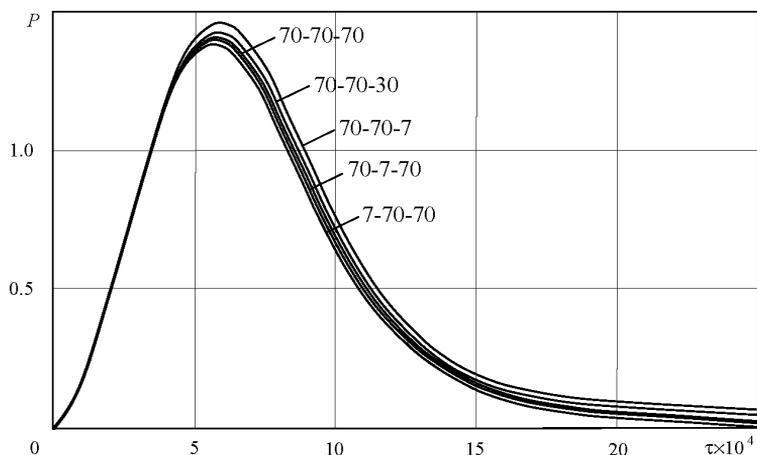


Рис. 3. Зависимость контактной силы от времени для различных значений $G_{r\theta}$, G_{rz} , $G_{\theta z}$ (цифры у кривых)

На рис. 4 видно, что при уменьшении модулей упругости E_r и E_θ максимальное значение динамического прогиба увеличивается, причем E_r оказывает более заметное влияние на прогиб.

При уменьшении значений модулей сдвига прогиб увеличивается, причем, как следует из рис. 5, $G_{\theta z}$ больше остальных характеристик влияет на динамический прогиб мишени. При уменьшении G_{rz} , $G_{\theta z}$ максимальный прогиб и время, при котором прогиб будет равен нулю, увеличиваются пропорционально, а при уменьшении $G_{r\theta}$ время, соответствующее нулевому прогибу, увеличивается интенсивнее, т.е. мишень дольше будет находиться в деформированном состоянии.

Заключение. Полученные графические зависимости позволяют сделать выводы о том, что на динамический прогиб и контактную

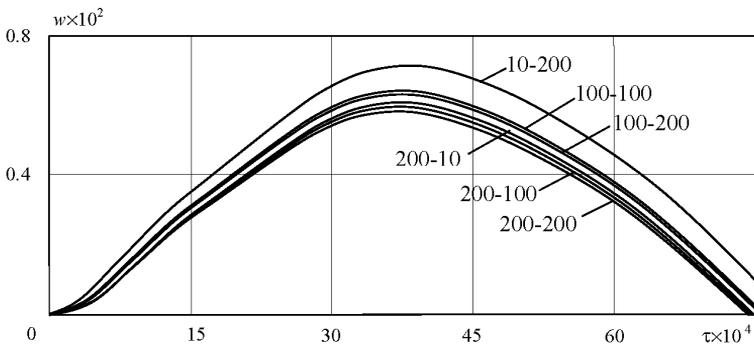


Рис. 4. Зависимость прогиба мишени от времени для различных значений E_r и E_θ (цифры у кривых)

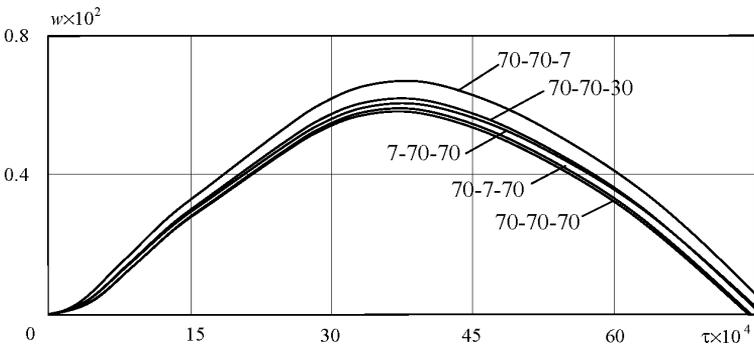


Рис. 5. Зависимость прогиба мишени от времени для различных значений $G_{r\theta}$, G_{rz} , $G_{\theta z}$ (цифры у кривых)

силу в месте ударного взаимодействия большее влияние оказывает модуль упругости в радиальном направлении и модуль сдвига в тангенциальной плоскости. При увеличении E_r контактная сила увеличивается, прогиб уменьшается, а при увеличении $G_{\theta z}$ эти характеристики взаимодействия тел уменьшаются. Также можно отметить, что уменьшение модуля сдвига в плоскости пластинки приводит к уменьшению контактной силы и времени взаимодействия, а также к увеличению динамического прогиба.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимощенко С. П. Zur Frage nach der Wirkung eines Stosse auf einer Balken // Zeitschrift fur mathematische Physik. – 1914. – Vol. 62. – P. 198–209.
2. Филиппов А. П. Поперечный упругий удар тяжелым телом по круглой плите // Механика твердого тела. – 1971. – № 6. – С. 102–109.
3. Conway H. D. Impact of an indenter on a large plate / H.D. Conway, H.C. Lee // Transactions of the ASME. J. of Applied Mechanics. – 1970. – Vol. 37. No. 1. – P. 234–235.
4. Phillips J. W., Calvit H. H. Impact of a rigid sphere on a viscoelastic plate // Transaction of the ASME, J. of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34. – No. 4. – P. 873–878.

5. Россихин Ю. А., Шитикова М. В. Удар упругого шара по балке Тимошенко и пластинке Уфлянда–Миндлина с учетом растяжения срединной поверхности // Изв. вузов. Строительство. – 1996. – № 6 – С. 28–34.
6. Локтев А. А. Ударное взаимодействие твердого тела и упругой ортотропной пластинки // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11. – № 4. – С. 478–492.
7. Россихин Ю. А., Шитикова М. В., Локтев А. А. Удар шара о нелинейно упругий буфер, установленный на плите перекрытия // Изв. вузов. Строительство. – 2004. – № 11. – С. 16–22.
8. Локтев А. А. Удар вязкоупругого тела по упругой изотропной пластинке // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13. – № 3. – С. 170–178.
9. Chen P., Xiong J., Shen Z. Thickness effect on the contact behavior of a composite laminate indented by a rigid sphere // Mechanics of Materials. – 2008. – V. 40. – P. 183–194.
10. Malekzadeh K., Khalili M. R., Mittal R. K. Response of composite sandwich panels with transversely flexible core to low-velocity transverse impact: A new dynamic model // Int. J. of Impact Engineering. – 2007. – V. 34. – P. 522–543.
11. Choi I. H., Lim C. H. Low-velocity impact analysis of composite laminates using linearized contact law // Composite Structures. – 2004. – V. 66. – P. 125–132.
12. Динамика удара: Пер. с англ. / Зукас Д.А. и др. – М.: Мир, 1985. – 296 с.
13. Бирюков Д. Г., Кадомцев И. Г. Динамический упругопластический контакт ударника и сферической оболочки // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43. – № 5. – С. 171–175.
14. Никбадзе М. У. Вариант системы уравнений теории тонких тел // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика и механика. – 2006. – № 1. – С. 30–35.

Статья поступила в редакцию 11.03.2010

Алексей Алексеевич Локтев в 2001 г. окончил Воронежский государственный архитектурно-строительный университет. Канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой Московской финансово-юридической академии. Автор 59 научных работ в области механики контактного взаимодействия, теории упругости, волновых процессов в телах, математического моделирования в механике и информационных технологиях.

A.A. Loktev graduated from the Voronezh State University for Architecture and Civil Engineering in 2001. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor, head of department of the Moscow Academy of Finance and Law. Author of 59 publications in the field of mechanics of contact interaction, theory of elasticity, wave processes in solids, mathematical simulation in mechanics and information technologies.