УДК 519.71

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.П. Крищенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: apkri@bmstu.ru

Предложен метод построения параметрических семейств решений для одного из интегральных уравнений при наличии граничных условий и ограничений в виде неравенств. Такая задача возникает в теории управления и связана с исследованием управляемости нелинейных систем и решением терминальных задач. Найденные семейства решений интегрального уравнения получены в виде аналитических выражений.

***Ключевые слова*:** задача терминального управления, интегральные уравнения, граничные условия, аппроксимация.

PARAMETRIC SETS OF INTEGRAL EQUATIONS SOLUTIONS

A.P. Krishchenko

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: apkri@bmstu.ru

The author offered the design method of parametrical solutions sets for one of the integral equations with the availability of boundary conditions and inequality constraints. Such problem arises in control theory and it is connected with research of nonlinear systems controllability and terminal problems solution. The found sets of solutions of the integral equation are received in the form of analytical expressions.

***Keywords*:** terminal control problem, integral equations, boundary conditions, approximation.

Введение. Исследование управляемости и решение терминальных задач с помощью методов, основанных на концепции обратной задачи динамики [1–6], может быть связано с необходимостью решения интегральных уравнений и неравенств специального вида. Это обусловлено тем, что решению терминальной задачи для нелинейной системы при наличии ограничений на состояние в некоторых случаях можно сопоставить функцию, которая является решением интегрального уравнения и удовлетворяет соответствующим дополнительным условиям. При этом для нахождения управления по такой функции желательно иметь для нее аналитическое выражение [6].

Как правило, множества решений возникающих интегральных уравнений бесконечномерны и найти аналитическое выражение для описания всех их элементов, к сожалению, не удается. Поэтому в настоящей статье предложен метод построения аналитических выражений для параметрических семейств решений указанных интегральных уравнений.

Постановка задачи. Найти функцию $\psi(y) \in C^1[y_0, y_*]$, удовлетворяющую условиям

$$\int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi(y)} = t_*; \tag{1}$$

$$0 < \psi_-(y) < \psi(y) < \psi_+(y), \quad y \in [y_0, y_*]; \tag{2}$$

$$\psi(y_0) = \psi_0, \quad \psi(y_*) = \psi_*, \tag{3}$$

где функции $\psi_\pm(y) \in C^1[y_0, y_*]$.

Несложно заметить, что для существования решения задачи (1)–(3) ее исходные данные должны удовлетворять условиям

$$\psi_-(y_0) < \psi_0 < \psi_+(y_0);\ \psi_-(y_*) < \psi_* < \psi_+(y_*);\ t_{\inf} < t_* < t_{\sup}, \tag{4}$$

где

$$t_{\inf} = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_+(y)}; \quad t_{\sup} = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_-(y)}.$$

Предварительные результаты. Пусть ограничение (2) на искомое решение является выпуклым, т.е. на отрезке $[y_0, y_*]$ функция $\psi_+(y)$ выпукла вверх, а функция $\psi_-(y)$ выпукла вниз, следовательно, множество

$$Y = \{(y, z) \in \mathbf{R}^2 :\ y \in [y_0, y_*],\ \psi_-(y) < z < \psi_+(y)\},$$

соответствующее ограничению (2), выпуклое.

Рассмотрим на плоскости yOz прямую $z = \psi_0(y)$, проходящую через точки (y_0, ψ_0) и (y_*, ψ_*) множества Y,

$$\psi_0(y) = \frac{\psi_* - \psi_0}{y_* - y_0}(y - y_0) + \psi_0. \tag{5}$$

Ее отрезок, ограниченный этими точками, содержится в множестве Y.

Обозначим через $d(y)$ функцию из $C^1[y_0, y_*]$, равную нулю на концах отрезка $[y_0, y_*]$. При любом $c \in \mathbf{R}$ график функции $z = \psi_c(y)$,

$$\psi_c(y) = \psi_0(y) + cd(y), \quad y \in [y_0, y_*], \tag{6}$$

соединяет указанные точки и существуют такие $c_- < 0 < c_+$, что при любом $c \in [c_-, c_+]$ этот график содержится в множестве Y. Следовательно, для таких функций $\psi_c(y)$ выполнено условие (2).

Примем

$$t(c) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_c(y)}.$$

Если значение t_* принадлежит отрезку, ограниченному точками $t(c_+)$ и $t(c_-)$, то уравнение $t(c) = t_*$ имеет решение $c = c_1$, которому соответствует функция

$$\psi_{c_1}(y) = \psi_0(y) + c_1 d(y), \tag{7}$$

являющаяся решением рассматриваемой задачи (1)–(3).

Этот подход был использован в работе [6] для решения задачи управления процессами в химическом реакторе. При его реализации требуется решать нелинейное уравнение $t(c) = t_*$. Чтобы исключить этот этап, воспользуемся равенством

$$t_* = \lambda_1 t(c_-) + (1 - \lambda_1) t(c_+),$$

где

$$\lambda_1 = \frac{t_* - t(c_+)}{t(c_-) - t(c_+)} \in [0,\ 1].$$

В результате получим

$$t_* = \int\limits_{y_0}^{y_*} \Big(\frac{\lambda_1}{\psi_{c_-}(y)} + \frac{1 - \lambda_1}{\psi_{c_+}(y)} \Big) dy,$$

поэтому решением задачи (1)–(3) является функция

$$\psi(y) = \Big(\frac{\lambda_1}{\psi_{c_-}(y)} + \frac{1 - \lambda_1}{\psi_{c_+}(y)} \Big)^{-1} = \frac{\psi_{c_-}(y)\psi_{c_+}(y)}{\psi_0(y) + (\lambda_1 c_+ + (1 - \lambda_1)c_-)d(y)}. \tag{8}$$

Если в качестве $d(y)$ выбирать функции из параметрических множеств, например,

$$\{(y - y_0)^\alpha (y_* - y)^\beta, \quad \alpha \geq 1, \beta \geq 1\}$$

или

$$\{\operatorname{arctg} \alpha(y - y_0) \operatorname{arctg} \beta(y_* - y), \quad \alpha > 0, \beta > 0\},$$

то получим параметрические семейства решений задачи (1)–(3).

Когда условие (2) не является выпуклым, в изложенной схеме решения задачи (1)–(3) линейную функцию (5) необходимо заменить функцией

$$\psi_0(y) = \lambda_0(y)\psi_+(y) + (1 - \lambda_0(y))\psi_-(y), \quad y \in [y_0,\ y_*],$$

где

$$\lambda_0(y) = \frac{a_* - a_0}{y_* - y_0}(y - y_0) + a_0.$$

Здесь

$$a_0 = \frac{\psi_0 - \psi_-(y_0)}{\psi_+(y_0) - \psi_-(y_0)} \in (0,\ 1); \quad a_* = \frac{\psi_* - \psi_-(y_*)}{\psi_+(y_*) - \psi_-(y_*)} \in (0,\ 1).$$

Основной результат. Решения задачи (1)–(3) вида (7) и (8) существуют, если для выбранных функций $\psi_0(y)$ и $d(y)$ значение t_* окажется на отрезке, ограниченном точками $t(c_+)$ и $t(c_-)$ и содержащемся в интервале $(t_{\rm inf}, t_{\rm sup})$. Для любых значений t_* из интервала $(t_{\rm inf}, t_{\rm sup})$ параметрические семейства решений задачи (1)–(3) можно построить методом, основанным на конструктивном доказательстве следующего утверждения.

Теорема 1. *Для существования решения задачи (1)–(3) необходимо и достаточно выполнения условий (4).*

Идея доказательства достаточности выполнения условий (4) для существования решения задачи (1)–(3) заключается в том, что сначала при заданном значении t_* для функций $\psi_+(y)$ и $\psi_-(y)$ строятся их аппроксимации — функции $\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)$ и $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)$ из $C^1[y_0, y_*]$, зависящие от параметров $\overline{\varepsilon}$, $\hat{\varepsilon}$ и удовлетворяющие условиям

$$\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y_0) = \psi_{-\hat{\varepsilon}}(y_0) = \psi_0, \quad \psi_{+\overline{\varepsilon}}(y_*) = \psi_{-\hat{\varepsilon}}(y_*) = \psi_*;$$
$$0 < \psi_-(y) < \psi_{-\hat{\varepsilon}}(y) < \psi_{+\overline{\varepsilon}}(y) < \psi_+(y), \quad y \in [y_0, y_*];$$
$$\int\limits_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)} < t_* < \int\limits_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)}.$$

Затем, используя последнее двойное неравенство, аналогично нахождению функции (8), строится решение задачи (1)–(3). Предложена следующая реализация этой идеи.

Для функций, входящих в постановку задачи (1)–(3), определим

$$m_- = \min_{y\in[y_0,\, y_N]} \psi_-(y) \quad m_+ = \min_{y\in[y_0,\, y_N]} \psi_+(y);$$
$$M_- = \max_{y\in[y_0,\, y_N]} \psi_-(y), \quad M_+ = \max_{y\in[y_0,\, y_N]} \psi_+(y);$$
$$m_{+-} = \min_{y\in[y_0,\, y_N]} (\psi_+(y) - \psi_-(y)).$$

Обозначим через ε_-, ε_0, ε_+, ε_* положительные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} &\varepsilon_+ < \min(m_{+-}/3,\ \psi_+(y_0) - \psi_0,\ \psi_+(y_*) - \psi_*);\\ &\varepsilon_- < \min(m_{+-}/3,\ \psi_0 - \psi_-(y_0),\ \psi_* - \psi_-(y_*));\\ &\varepsilon_0 < (y_* - y_0)/3, \quad \varepsilon_* < (y_* - y_0)/3. \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим гладкие функции

$$\xi(\tau) = \xi(\tau, \xi_0) = 1 - (1 - \xi_0)(1 - \tau)^2, \quad \tau \in [0,\ 1],$$

и

$$\eta(\tau) = \eta(\tau, \eta_*) = \xi(1 - \tau, \eta_0) = 1 - (1 - \eta_*)\tau^2, \quad \tau \in [0,\ 1],$$

зависящие от параметров $\xi_0, \eta_0 \in [0,\ 1]$. Значения этих функций принадлежат отрезку $[0,\ 1]$ и выполнены равенства

$$\xi(0) = \xi_0, \quad \xi(1) = 1, \quad \xi'(1) = 0;$$

$$\eta(0) = 1, \quad \xi(1) = \eta_0, \quad \eta'(0) = 0.$$

С помощью указанных функций определим

$$\lambda_1(y) = \xi(\tau, \xi_+),$$

где

$$\tau = \frac{y - y_0}{\varepsilon_0}; \quad \xi_+ = \frac{\psi_0 - \psi_-(y_0)}{\psi_+(y_0) - \psi_-(y_0) - \varepsilon_+},$$

аналогично

$$\lambda_2(y) = \eta(\nu, \eta_+).$$

Здесь

$$\nu = \frac{y - y_* + \varepsilon_*}{\varepsilon_*}; \quad \eta_+ = \frac{\psi_* - \psi_-(y_*)}{\psi_+(y_*) - \psi_-(y_*) - \varepsilon_+}.$$

В качестве аппроксимации функции $\psi_+(y)$ рассмотрим

$$\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y) = \begin{cases} (\psi_+(y) - \varepsilon_+)\lambda_1(y) + \psi_-(y)(1 - \lambda_1(y)), & y \in [y_0,\ y_0 + \varepsilon_0]; \\ \psi_+(y) - \varepsilon_+, & y \in [y_0 + \varepsilon_0, y_* - \varepsilon_*]; \\ (\psi_+(y) - \varepsilon_+)\lambda_2(y) + \psi_-(y)(1 - \lambda_2(y)), & y \in [y_* - \varepsilon_*, y_*], \end{cases}$$

где $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_0, \varepsilon_*)$.

Эта функция принадлежит $C^1[y_0,\ y_*]$, а ее график соединяет точки (y_0, ψ_0), (y_*, ψ_*) и содержится в множестве Y.

Обозначим

$$t_+(\overline{\varepsilon}) = \int\limits_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)}.$$

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\overline{\varepsilon}$, *что* $t_+(\overline{\varepsilon}) < t_{\inf} + \varepsilon$.

◀ Представим разность $t_+(\overline{\varepsilon}) - t_{\inf}$ в виде трех интегралов

$$t_+(\overline{\varepsilon}) - t_{\inf} = \int\limits_{y_0}^{y_*} \Big(\frac{1}{\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)} - \frac{1}{\psi_+(y)} \Big) dy = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{y_0}^{y_0 + \varepsilon_0} F(y) dy; \ I_2 = \int\limits_{y_0 + \varepsilon_0}^{y_* - \varepsilon_*} F(y) d;$$

$$I_3 = \int\limits_{y_* - \varepsilon_*}^{y_*} F(y) dy; \ F(y) = \frac{1}{\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)} - \frac{1}{\psi_+(y)}.$$

Потребуем, чтобы каждый интеграл был меньше $\varepsilon/3$. После преобразований получаем

$$I_2 = \int\limits_{y_0+\varepsilon_0}^{y_*-\varepsilon_*} \frac{\varepsilon_+}{\psi_+(y)\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)} dy \leq$$

$$\leq \int\limits_{y_0+\varepsilon_0}^{y_*-\varepsilon_*} \frac{\varepsilon_+}{m_+(m_+-\varepsilon_+)} dy < \frac{\varepsilon_+(y_*-y_0)}{m_+(m_+-\varepsilon_+)} < \varepsilon/3;$$

$$I_1 \leq \int\limits_{y_0}^{y_0+\varepsilon_0} \Big(\frac{1}{\psi_-(y)} - \frac{1}{\psi_+(y)}\Big) dy \leq$$

$$\leq \int\limits_{y_0}^{y_0+\varepsilon_0} \Big(\frac{1}{m_-} - \frac{1}{M_+}\Big) dy = \frac{\varepsilon_0(M_+-m_-)}{m_-M_+} < \varepsilon/3.$$

Аналогично

$$I_3 \leq \frac{\varepsilon_*(M_+-m_-)}{m_-M_+} < \varepsilon/3.$$

Следовательно, если

$$\varepsilon_+ < \frac{\varepsilon {m_+}^2}{3(y_*-y_0)+\varepsilon m_+};\ \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon m_- M_+}{3(M_+-m_-)};\ \varepsilon_* < \frac{\varepsilon m_- M_+}{3(M_+-m_-)} \qquad (10)$$

и выполнены неравенства (9), то функция $\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)$ удовлетворяет условию $t_+(\overline{\varepsilon}) < t_{\inf} + \varepsilon$. ►

Для построения аппроксимации функции $\psi_-(y)$ обозначим

$$\lambda_3(y) = \xi(\tau, \xi_-),$$

где

$$\tau = \frac{y-y_0}{\varepsilon_0}; \quad \xi_- = \frac{\psi_0 - \psi_+(y_0)}{\psi_-(y_0) - \psi_+(y_0) + \varepsilon_-}.$$

Аналогично

$$\lambda_4(y) = \eta(\nu, \eta_-),$$

где

$$\nu = \frac{y - y_* + \varepsilon_*}{\varepsilon_*}; \quad \eta_- = \frac{\psi_* - \psi_+(y_*)}{\psi_-(y_*) - \psi_+(y_*) + \varepsilon_-}.$$

В качестве аппроксимации функции $\psi_-(y)$ запишем

$$\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y) = \begin{cases} (\psi_-(y)+\varepsilon_-)\lambda_3(y) + \psi_+(y)(1-\lambda_3(y)), & y \in [y_0,\ y_0+\varepsilon_0]; \\ \psi_-(y)+\varepsilon_-, & y \in [y_0+\varepsilon_0, y_*-\varepsilon_*]; \\ (\psi_-(y)+\varepsilon_-)\lambda_4(y) + \psi_+(y)(1-\lambda_4(y)), & y \in [y_*-\varepsilon_*, y_*], \end{cases}$$

где $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_-, \varepsilon_0, \varepsilon_*)$.

Эта функция принадлежит $C^1[y_0,\ y_*]$, а ее график соединяет точки (y_0, ψ_0), (y_*, ψ_*) и содержится в множестве Y. Кроме того, для

$$t_-(\hat{\varepsilon}) = \int_{y_0}^{y_*} \frac{dy}{\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)}$$

справедливо утверждение, аналогичное лемме 1.

Лемма 2. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $\hat{\varepsilon}$, *что* $t_-(\hat{\varepsilon}) > t_{\sup} - \varepsilon$.

◄ Как и при доказательстве леммы 1, представим разность $t_{\sup} - t_-(\hat{\varepsilon})$ в виде трех интегралов и примем, что каждый интеграл был меньше $\varepsilon/3$. В результате преобразований получим неравенства

$$\varepsilon_- < \frac{\varepsilon m_-^2}{3(y_* - y_0)}; \quad \varepsilon_0 < \frac{\varepsilon m_- M_+}{3(M_+ - m_-)}; \quad \varepsilon_* < \frac{\varepsilon m_- M_+}{3(M_+ - m_-)}. \qquad (11)$$

Следовательно, если параметры $(\varepsilon_-, \varepsilon_0, \varepsilon_*) = \hat{\varepsilon}$ выбраны с учетом выполнения неравенств (9), (11), то функция $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)$ удовлетворяет условию $t_-(\hat{\varepsilon}) > t_{\sup} - \varepsilon$. ►

Воспользуемся построенными аппроксимациями $\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)$, $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)$ для нахождения решения задачи (1)–(3).

Примем $\varepsilon = t_* - t_{\inf}$, фиксируем любое значение $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_+, \varepsilon_0, \varepsilon_*)$, удовлетворяющее неравенствам (9), (10), в результате получим значения всех параметров, от которых зависит функция $\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)$. Аналогично, задав $\varepsilon = t_{\sup} - t_*$ и выбрав любое значение $\hat{\varepsilon} = (\varepsilon_-, \varepsilon_0, \varepsilon_*)$, удовлетворяющее неравенствам (9) и (11), находим значения всех параметров, от которых зависит функция $\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)$.

Для определения функции $\psi(y)$, т.е. решения задачи (1)–(3), рассмотрим функцию

$$\alpha(c) = \int_{y_0}^{y_*} \left(\frac{c}{\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)} + \frac{1-c}{\psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)} \right) dy = c t_+(\overline{\varepsilon}) + (1-c) t_-(\hat{\varepsilon}).$$

При

$$c = c_* = \frac{t_* - t_-(\hat{\varepsilon})}{t_+(\overline{\varepsilon}) - t_-(\hat{\varepsilon})} \in (0,\ 1)$$

выполнено равенство $\alpha(c) = t_*$ и функция

$$\psi(y) = \frac{\psi_{+\overline{\varepsilon}}(y) \psi_{-\hat{\varepsilon}}(y)}{c_* \psi_{-\hat{\varepsilon}}(y) + (1 - c_*) \psi_{+\overline{\varepsilon}}(y)}$$

является решением задачи (1)–(3).

Заключение. Рассмотрено интегральное уравнение, возникающее в теории управления. Предложены методы нахождения в аналитическом виде параметрических семейств его решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 14-01-00424 и 12-07-00329) и Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-53.2014.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Емельянов С.В.*, *Крищенко А.П.*, *Фетисов Д.А.* Исследование управляемости аффинных систем // ДАН. 2013. Т. 449. № 1. С. 15–18.
2. *Крищенко А.П.*, *Фетисов Д.А.* Преобразование аффинных систем и решение задач терминального управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2013. № 2. С. 3–16.
3. *Крищенко А.П.*, *Фетисов Д.А.* Терминальная задача для многомерных аффинных систем // ДАН. 2013. Т. 452. № 2. С. 144–149.
4. *Фетисов Д.А.* Исследование управляемости регулярных систем квазиканонического вида // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 3. С. 12–30.
5. *Фетисов Д.А.* Об одном методе решения терминальных задач для аффинных систем // Электронное научно-техническое издание “Наука и образование”. 2013. № 11. URL: http://technomag.edu.ru. DOI: 10.7463/1113.0622543.
6. *Касаткина Т.С.*, *Крищенко А.П.* Терминальное управление процессами в химических реакторах методом орбитальной линеаризации // Электронное научно-техническое издание “Наука и образование”. 2013. № 10. URL: http://technomag.edu.ru. DOI: 10.7463/1013.0612563.

REFERENCES

[1] Emel’yanov S.V., Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Study of affine systems controllability. *Dokl. RAN* [Proc. Russ. Acad. Sci.], 2013, vol. 449, no. 1, pp. 15–18 (in Russ.).

[2] Krishchenko A.P., Fetisov D.A. Transformation of affine systems and solution of terminal control problems. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2013, no. 2, pp. 3–16 (in Russ.).

[3] Krishchenko A.P., Fetisov D.A. The terminal problem for multidimensional of affine systems. *Dokl. RAN* [Proc. Russ. Acad. Sci.], 2013, vol. 452, no. 2, pp. 144–149 (in Russ.).

[4] Fetisov D.A. Study regular systems controllability of quasicanonical form. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2006, no. 3, pp. 12–30 (in Russ.).

[5] Fetisov D.A. A method for solving terminal problems for affine systems. *El. n.-t. izdanie. “Nauka i obrazovanie”* [Science & Education], 2013, no. 11. Available at: http://technomag.edu.ru (accessed 22.12.2013). DOI: 10.7463/1113.0622543

[6] Kasatkina T.S., Krishchenko A.P. Terminal control of processes in chemical reactors by orbital linearization method. *El. n.-t. izdanie. “Nauka i obrazovanie”* [Science & Education], 2013, no.10. Available at: http://technomag.edu.ru (accessed 22.12.2013). DOI: 10.7463/1013.0612563

Статья поступила в редакцию 17.02.2014

Александр Петрович Крищенко — д-р физ.-мат. наук, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ по нелинейной теории управления.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

A.P. Krishchenko — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Corresponding member of Russian Academy of Sciences, Chief of “Mathematical Simulation” department of Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of nonlinear theory of control.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.