УДК 517.518.224

К. В. Усков

ПОПЕРЕЧНИКИ МНОЖЕСТВ, СВЯЗАННЫХ С ПРОЦЕССОМ ЛЕВИ

Для любого натурального m найдена слабая асимптотика колмогоровских поперечников множества $\varphi(K_m)$, где φ — процесс Леви, определенный в пространстве $\mathbf{R}^m$ (m-параметрическое броуновское движение), $K_m = [0,1]^m$ — единичный куб в $\mathbf{R}^m$. Рассмотрена и сведена к исследованию системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка задача о точном значении поперечников множества $\varphi(K_1)$ (спираль Винера). Предложен алгоритм, позволяющий вычислять приближенные значения поперечников спирали Винера.

Постановка задачи. Напомним, что n-м поперечником по Колмогорову компакта K в гильбертовом пространстве H называется величина [1, 2]

$$d_n(K,H) = \inf_{a,L_n} d(K, a+L_n),$$

где a — вектор из H; L_n — подпространство размерности n в H; $d(K, a+ +L_n)$ — отклонение компакта K от плоскости $a+L_n$:

$$d(K, a+L_n) = \sup_{x\in K} d(x, a+L_n) = \sup_{x\in K} \inf_{y\in L_n} |x-(a+y)|.$$

В настоящей работе рассмотрим компакты, связанные с процессом Леви. Известно [3], что для любого вещественного гильбертова пространства $\widetilde{H}$ существуют вещественное гильбертово пространство и отображение $\varphi : \widetilde{H} \to H$ такие, что

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|^2 = |x-y|, \quad x,y\in\widetilde{H}, \quad \varphi(0_{\widetilde{H}}) = 0_H,$$

где $0_{\widetilde{H}}$, 0_H — нулевые элементы соответствующих пространств. Отображение φ называется процессом Леви, или многопараметрическим броуновским движением. Непосредственно из определения следует, что ковариационная функция процесса Леви определяется равенством

$$(\varphi(x),\, \varphi(y)) = \frac{1}{2}(|x|+|y|-|x-y|), \quad x,y\in\widetilde{H}. \tag{1}$$

При $\widetilde{H} = \mathbf{R}$ последнее равенство задает ковариационную функцию стандартного броуновского движения: $(\varphi(x),\ \varphi(y)) = \min(x,y),\ \ x,y \geq 0$.

Далее ограничимся рассмотрением процесса Леви с конечным числом параметров: $\dim H < \infty$, и будем полагать, что $H = \mathbf{R}^m$, $m \in \mathbf{N}$. Как видно из определения, отображение φ непрерывно и, следовательно, переводит в компакт любое замкнутое ограниченное множество из $\mathbf{R}^m$. В данной работе получим оценки величин $d_n(\varphi(K_m), H)$, где $K_m = [0,1]^m$ — единичный куб в $\mathbf{R}^m$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующим общим утверждением. Пусть K_1 — произвольный компакт, H — вещественное гильбертово пространство, $\varphi:\ K_1 \to H$ — любое непрерывное отображение, $K = \varphi(K_1)$. Рассмотрим на K_1 положительную вероятностную меру σ и введем в $L_2(K_1, \sigma)$ линейный самосопряженный оператор

$$(T_\sigma f)(x) = \int\limits_{K_1} (\varphi(x) - C,\ \varphi(y) - C) f(y)\, d\sigma(y),\ \ x \in K_1,\ \ C = \int\limits_{K_1} \varphi(x)\, d\sigma(x).$$

Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ — отличные от нуля собственные числа этого оператора, а $f_1, f_2, \ldots$ — соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(K_1, \sigma)$ и ортогональные функции $\mathbf{1}$, тождественно равной единице на K_1. Тогда

$$\sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j} \leq d_n(K,H) \leq \sqrt{\max_{x \in K_1} \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j f_j^2(x)},\ \ n \geq 0. \tag{2}$$

Данное утверждение доказано в работе [8] и является следствием интегральных неравенств, полученных в работе [4] для поперечников центральносимметричного компакта.

Слабая асимптотика поперечников $d_n(\varphi(K_m), H)$. Через A_m, B_m обозначим следующие величины, зависящие только от натурального параметра m:

$$\begin{aligned} A_m &= \left(\frac{m}{4\pi}\Gamma\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)^{1/2}\left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^{-(m+1)/2m}, \\ B_m &\left(\frac{\sqrt{m}}{2}\right)^{1/2}, \quad m \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{3}$$

Теорема. *Для произвольного $\varepsilon > 0$ начиная с некоторого $n = n(\varepsilon)$ выполнены неравенства*

$$A_m(1-\varepsilon) \leq d_n\big(\varphi(K_m),\, H\big) n^{\frac{1}{2m}} \leq B_m(1+\varepsilon).$$

Из теоремы очевидно следует слабая асимптотика поперечников множества $\varphi(K_m)$:

$$d_n(\varphi(K_m), H) \asymp n^{-\frac{1}{2m}}.$$

Доказательство. 1. Воспользуемся левой частью неравенств (2). Процесс Леви осуществляет непрерывное отображение K_m в H, следовательно,

$$d_n(\varphi(K_m), H) \geq \sqrt{\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j}, \quad n \geq 0,$$

где $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ — собственные значения оператора T_σ, действующего на функции из $L_2(K_m, \sigma)$, ортогональные тождественной единице, согласно формуле

$$(T_\sigma f)(x) = \int\limits_{K_m} (\varphi(x),\, \varphi(y)) f(y)\, d\sigma(y) - \int\limits_{K_m} (C,\, \varphi(y)) f(y)\, d\sigma(y), \quad x \in K_m.$$

В качестве σ возьмем равномерную на K_m меру: $d\sigma(x) = dx$. Тогда, применяя равенство (1), получаем, что $T_\sigma = P + T_1$, где P — проектор на линейную оболочку функций $\mathbf{1}$, и $f(x) = |x|$, $x \in K_m$, а действие оператора T_1 на функции $f \in L_2(K_m)$ определяется формулой

$$(T_1 f)(x) = -\frac{1}{2} \int\limits_{K_m} |x - y| f(y)\, dy, \quad x \in K_m.$$

Через $N(s, T_\sigma)$ и $N(s, T_1)$ обозначим функции распределения собственных значений операторов T_σ и T_1 соответственно:

$$N(s, T_\sigma) = \sum_{\lambda_n > s} 1, \quad N(s, T_1) = \sum_{\lambda_n(T_1) > s} 1, \quad s > 0.$$

Из работ [5, 6] известно, что $s^q N(s, T_1) \to \gamma_m 2^{-q}$ при $s \to 0$, где

$$\gamma_m = \left(\frac{1}{2\pi} \Gamma\Big(\frac{m}{2} + \frac{1}{2}\Big)\right)^q \left(\Gamma\Big(\frac{m}{2} + 1\Big)\right)^{-1}, \quad q = \frac{m}{m+1}. \tag{4}$$

Поскольку операторы T_σ и T_1 совпадают с точностью до проектора на конечномерное подпространство, то (см. работу [5]) пределы функций $s^q N(s, T_\sigma)$ и $s^q N(s, T_1)$ при $s \to 0$ равны. Таким образом, $s^q N(s, T_\sigma) = \gamma_m 2^{-q}(1 + o(1))$ при $s \to 0$.

Поскольку T_σ — компактный самосопряженный оператор и $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$, полагая в последнем равенстве $s = \lambda_k$, получаем

$$\lambda_k = \frac{(\gamma_m)^{1/q}}{2(k-1)^{1/q}} (1 + o(1)), \quad k \to \infty.$$

Применив стандартную формулу суммирования

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}(1+o(1)), \quad \alpha > 1, \quad n \to \infty,$$

к полученным выражениям для λ_k, приходим к равенству

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k = \frac{(\gamma_m)^{1/q}}{2(1/q-1)n^{1/q-1}}(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

Подстановка значений γ_m и q из формул (4) в последнее соотношение приводит к искомой нижней оценке поперечников $d_n(\varphi(K_m), H)$.

2. Оценим величину $d_n(\varphi(K_m), H)$ сверху. Из определения поперечника ясно, что n-й поперечник не превосходит отклонения компакта от любого набора точек произвольной n-мерной плоскости. Следовательно, $d_n(\varphi(K_m), H) \le d(\varphi(K_m), \varphi(G))$, где G — произвольный набор из $n+1$ (или меньшего числа) точек куба K_m. В качестве G возьмем равномерную сетку в K_m. Для этого введем равномерную сетку на отрезке $[0, 1]$:

$$G_1 = \left\{ \frac{k}{N-1} \right\}_{k=0}^{N-1}, \quad N = [(n+1)^{1/m}]$$

(здесь $[x]$ — целая часть x), и положим $G = G_1^m$. Видно, что число элементов G, равное N^m, не превосходит $n+1$.

Теперь оценим расстояние между множествами $\varphi(K_m)$ и $\varphi(G)$. Заметим, что для любой точки $x \in [0, 1]^m$ найдется точка $y \in G_1^m$ такая, что $|x-y| \le \dfrac{\sqrt{m}}{2(N-1)}$; следовательно,

$$d^2(\varphi(K_m), \varphi(G)) = \max_{x \in K_m} \min_{y \in G} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 = \max_{x \in K_m} \min_{y \in G} |x-y| \le \frac{\sqrt{m}}{2(N-1)}.$$

Поскольку $N = [(n+1)^{1/m}] \sim n^{1/m}$ при $n \to \infty$, то из последнего неравенства следует искомая верхняя оценка величины $d_n(\varphi(K_m), H)$. Теорема доказана.

Отметим, что строгая асимптотика поперечников $d_n(\varphi(K_m), H)$ известна только для случая $m = 1$, когда соответствующим подбором меры σ удается обеспечить (см. работу [4, теорема 3]) асимптотическое равенство левой и правой частей (2). В работе [4] нижняя оценка найдена с использованием меры $d\sigma(x) = dx$ и асимптотически равна $A_1 n^{-1/2}$ (см. формулу (3)). Для построения верхней оценки использована мера

$d\sigma(x) = p(x)\,dx$, где p — специально подобранная кусочно постоянная функция. Из эквивалентности левой и правой частей (2) следует

$$d_n(\varphi(K_1), H) \sim A_1 n^{-1/2} = \frac{1}{\pi\sqrt{n}}.$$

Можно предположить, что при $m > 1$ строгая асимптотика величин $d_n(\varphi(K_m), H)$ также определяется через постоянную A_m из левой части неравенств, доказанных в теореме.

На этом завершим рассмотрение многопараметрического броуновского движения и далее обратимся к задаче о точном значении поперечников множества $\varphi(K_1)$.

О точном значении поперечников спирали Винера. Множество $\varphi(K_1)$ — это кривая в гильбертовом пространстве H, заданная своей ковариационой функцией

$$(\varphi(x),\, \varphi(y)) = \min(x, y), \quad x, y \in [0, 1]. \tag{5}$$

Из равенства (5) следует, что для любых чисел $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, принадлежащих отрезку $[0, 1]$, векторы $\varphi(x_3) - \varphi(x_2)$ и $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ ортогональны в H. Всякая кривая в гильбертовом пространстве, обладающая подобным свойством, называется спиралью. По Колмогорову кривая $\varphi(K_1)$ называется спиралью Винера и обозначается W. Далее получим задачу о точном значении поперечников $d_n(W, H)$.

Для решения этой задачи модифицируем подход, позволивший в работе [4] получить строгую асимптотику поперечников $d_n(W, H)$: будем подбирать меру σ так, чтобы интегральные неравенства (2) переходили в равенство не асимптотически, а при каждом заданном n. Будем говорить, что в этом случае имеет место “совмещение интегральных оценок n-го поперечника”. Очевидно, что достаточным условием совмещения оценок является условие

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j f_j^2(x) = \mathrm{const}(x).$$

Используя разложение ядра линейного самосопряженного оператора, последнее условие можно представить в виде

$$|\varphi(x) - C|^2 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j^2(x) = \mathrm{const}(x). \tag{6}$$

Отметим, что константа в правой части двух последних равенств равна квадрату n-го поперечника.

При решении задачи совмещения интегральных оценок следует определить, в каком классе функций следует искать меру σ, обладающую необходимым свойством. Для примера рассмотрим задачу совмещения интегральных оценок поперечника $d_0(W,H)$. Проверим, что в классе мер, подчиненных мере Лебега, обеспечить выполнение условия (6) невозможно. С другой стороны, точечная мера $\sigma(\{0\}) = \sigma(\{1\}) = 1/2$ обеспечивает выполнение условия (6), но не является положительной мерой на отрезке $[0,1]$, как того требует теорема об интегральных неравенствах. Обобщить свойства рассмотренных мер и найти величину $d_0(W,H)$ позволяет мера следующего вида:

$$d\sigma(x) = p(x)\,dx, \quad x \in [0,1], \quad \sigma(\{0\}) = m_0, \quad \sigma(\{1\}) = m_1, \tag{7}$$

где p — положительная функция, непрерывная на отрезке $[0,1]$, $m_0, m_1 > 0$ и выполняется условие нормировки

$$m_0 + m_1 + \int_0^1 p(x)\,dx = 1.$$

Полагая $p(x) = \varepsilon$ для всех $x \in [0,1]$ и $m_0 = m_1 = \dfrac{1-\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon \in (0,1)$, из неравенств (2) имеем

$$\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{12}} \le d_0(W,H) \le \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{12}},$$

откуда

$$d_0(W,H) = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Исходя из разобранного примера, будем рассматривать меры вида (7) и определим, при каких условиях в данном классе мер возможно совмещение интегральных оценок поперечника $d_n(W,H)$, $n \ge 1$. Как будет видно далее, решение этого вопроса приводит к следующей системе уравнений для чисел λ_k и функции f_k:

$$\lambda_k f_k'' + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (f_j')^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{n} f_j^2\right)^{-1} f_k = 0; \tag{9}$$

$$\lambda_k f_k'(0) = -\left(2 + 2\sum_{j=1}^{n} f_j^2(0)\right)^{-1} f_k(0); \tag{10}$$

$$\lambda_k f_k'(1) = \left(2 + 2\sum_{j=1}^{n} f_j^2(1)\right)^{-1} f_k(1); \tag{11}$$

$$\lambda_k \int_0^1 \left(f_k'(x)\right)^2 dx = 1; \;\; k = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Утверждение. *Совмещение интегральных оценок поперечника* $d_n(W,H)$, $n \geq 1$, *в классе мер вида (7) возможно тогда и только тогда, когда система (9)–(12) совместна и, кроме того, каждая из функций* f_k, $k = 1, \ldots, n$, *имеет ровно* k *нулей в интервале* $(0,1)$. *При выполнении указанных условий искомая мера вида (7) и значение поперечника* $d_n(W,H)$ *определяются из равенств*

$$p = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j (f_j')^2}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n} f_j^2}, \quad m_0 = \frac{1}{2 + 2\sum\limits_{j=1}^{n} f_j^2(0)}, \quad m_1 = \frac{1}{2 + 2\sum\limits_{j=1}^{n} f_j^2(1)}; \tag{13}$$

$$d_n(W,H) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (2 + f_j^2(0) + f_j^2(1))}. \tag{14}$$

Доказательство. 1. Изучим свойства собственных чисел и собственных функций оператора T_σ, заданного мерой (7) и отображением φ с ковариационной функцией (5). Из определения оператора T_σ для любой функции $f \in L_2([0,1]), \sigma)$, ортогональной тождественной единице, имеем

$$(T_\sigma f)(x) = x m_1 f(1) + \int_0^x y f(y) p(y)\, dy + x \int_x^1 f(y) p(y)\, dy + \tau(f), \quad x \in [0,1],$$

где $\tau(f)$ — значение некоторого линейного функционала от f. Применяя стандартное рассуждение (двукратное дифференцирование по x), получаем, что уравнение $(T_\sigma f)(x) = \lambda f(x)$, где $\lambda \in \mathbf{R}$, $f \in L_2([0,1], \sigma)$, $f \perp \mathbf{1}$ равносильно следующим условиям:

$$\lambda f'' + p f = 0; \tag{15}$$

$$\lambda f'(0) = -m_0 f(0); \tag{16}$$

$$\lambda f'(1) = m_1 f(1). \tag{17}$$

Из леммы, доказанной в приложении 1, следует, что k-му по величине собственному значению λ_k задачи (15)–(17) соответствует собственная функция f_k, имеющая ровно k нулей в интервале $(0,1)$. Условие нормировки функции f_k в $L_2([0,1], \sigma)$ легко сводится к равенству (12).

2. Преобразуем условие совмещения интегральных оценок (6) для случая поперечника $d_n(W,H)$ и меры σ вида (7). Дважды дифференцируя равенство (6), получаем, что оно равносильно условиям

$$p=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(f_j')^2+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j f_j''; \tag{18}$$

$$m_0=\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j(0)f_j'(0); \tag{19}$$

$$m_1=\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j(1)f_j'(1). \tag{20}$$

Легко проверяется, что для решений (λ_k,f_k), $k=1,\ldots,n$, задачи (15)–(17) полученные условия равносильны равенствам (13).

3. С учетом пп. 1, 2 дальнейшее доказательство утверждения является очевидным, поэтому ограничимся выводом равенства (14). Напомним, что в случае выполнения условия (6) выражение, стоящее в правой части этого равенства, является квадратом искомой величины поперечника. Подставляя в условие (6) значения $x=0$, $x=1$ и интегрируя обе части равенства по мере σ, получаем

$$d_n^2(W,H)=|C|^2-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j^2(0);$$

$$d_n^2(W,H)=1-2\int_0^1 x\,d\sigma(x)+|C|^2-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j^2(1);$$

$$d_n^2(W,H)=\int_0^1 x\,d\sigma(x)-|C|^2-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j.$$

Исключая из этих равенств интегралы и $|C|^2$, получаем равенство (14). Утверждение доказано.

Таким образом, задача о точном значении поперечников $d_n(W,H)$ сведена к исследованию системы уравнений (9)–(12). В случае $n=1$, решив данную систему [8], получим точное значение поперечника $d_1(W,H)$:

$$d_1(W,H)=\sqrt{\frac{1}{4}-\mu^2},\quad \mu\ln\frac{1+2\mu}{1-2\mu}=1.$$

Далее для значений $n\geq 2$ опишем численный алгоритм, позволяющий получать приближенные значения поперечников $d_n(W,H)$ с заданной точностью. Результаты численных экспериментов позволяют предположить, что система (9)–(12) совместна также при $n \geq 2$. К сожалению, аналитическое доказательство этого предположения пока не получено.

О приближенном значении поперечников спирали Винера. Оставляя открытым вопрос о возможности совместить интегральные оценки величин $d_n(W,H)$, $n \geq 2$, рассмотрим задачу "максимизации нижней интегральной оценки" на множестве мер вида (7):

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j = \int_0^1 |\varphi(x) - C|^2 d\sigma(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \to \max .$$

С целью численного решения данной задачи непрерывную составляющую меры (7) заменим соответствующим дискретным аналогом, положив для произвольного натурального N

$$p(x) = p_k > 0, \quad x \in \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right], \quad k = 1, \ldots, N; \tag{21}$$

$$m_0 + m_1 + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} p_k = 1. \tag{22}$$

Опишем процедуру вычисления n наибольших собственных значений оператора T_σ, заданного мерой вида (7), (21). Пусть λ — собственное значение, f — соответствующая собственная функция, ортогональная тождественной единице. Легко показать (см. выше п. 1 доказательства утверждения), что $f \in C^1([0,\ 1])$, пара (λ, f) удовлетворяет краевым условиям (16), (17) и $\lambda f''(x) + p_k f(x) = 0$ при $x \in [(k-1)/N, k/N]$. Решив последнее уравнение, для любого $k = 1, \ldots, N$ получаем

$$\begin{bmatrix} f(k/N) \\ f'(k/N) \end{bmatrix} = M_k \begin{bmatrix} f((k-1)/N) \\ f'((k-1)/N) \end{bmatrix},$$

$$M_k = \begin{bmatrix} \cos \frac{1}{N}\sqrt{\frac{p_k}{\lambda}} & \sqrt{\frac{\lambda}{p_k}} \sin \frac{1}{N}\sqrt{\frac{p_k}{\lambda}} \\ -\sqrt{\frac{p_k}{\lambda}} \sin \frac{1}{N}\sqrt{\frac{p_k}{\lambda}} & \cos \frac{1}{N}\sqrt{\frac{p_k}{\lambda}} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

и, следовательно,

$$\begin{bmatrix} f(1) \\ f'(1) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

где $M = M_N M_{N-1} \dots M_1$. Из соотношения (24) и краевых условий (16), (17) получаем уравнение для собственных значений оператора T_σ:

$$\lambda^2 M_{21} - \lambda(m_0 M_{22} + m_1 M_{11}) + m_0 m_1 M_{12} = 0,$$

где $M_{ij} = M_{ij}(\lambda, m_0, m_1, p_1, \dots, p_N)$, $i, j = 1, 2,$ — элементы матрицы M.

Левую часть уравнения на собственные значения обозначим $F_\sigma(\lambda)$. Для нахождения n наибольших нулей $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ функции F_σ (равных n наибольшим собственным значениям оператора T_σ) предлагается использовать следующий алгоритм. Для каждого $k = 1, \dots, n$ начиная с $k = 1$ вычисляются значения функции F_σ на концах отрезка $[\lambda_{k-1} - \Delta_k j, \lambda_{k-1} - \Delta_k (j-1)]$. Вычисления начинаем при $j = 1$ и далее j увеличиваем на единицу до тех пор, пока найденные значения функции имеют одинаковый знак. Если знаки различны, то на полученном отрезке функция имеет нуль, для нахождения которого применяется любой стандартный метод, например метод секущих. Найденный нуль обозначается λ_k, после чего значение k увеличивается на единицу и все шаги повторяются.

Параметры λ_0 и Δ_k алгоритма определяются на основании свойств собственных значений оператора T_σ. Во-первых, из неравенств (2) и равенства (8) очевидно, что собственные значения оператора не превосходят 1/4, поэтому полагаем $\lambda_0 = 1/4$. Во-вторых, из доказательства теоремы известно, что k-е собственное значение имеет порядок убывания $1/k^2$ при $k \to \infty$. Чтобы интервал перебора Δ_k был одного порядка малости с искомыми нулями, полагаем $\Delta_k / \Delta_{k-1} = (k-1)^2/k^2 \sim \lambda_k / \lambda_{k-1}$.

Величина Δ_1 выбирается достаточно малой для того, чтобы исключить попадание двух (или большего числа) нулей функции F_σ в интервал длины Δ_k при любом $k = 1, \dots, n$. Лемма, приведенная в приложении 1, позволяет проверить правильность выбора Δ_1. Вычислив значение λ_k, $k = 1, \dots, n$, следует восстановить соответствующую собственную функцию, и если эта функция имеет на интервале $(0, 1)$ отличное от k количество нулей, необходимо уменьшить величину Δ_1. Восстановить собственную функцию по значению λ_k позволяют соотношения (23), краевое условие (16) и условие нормировки функции в $L_2([0,1], \sigma)$. Отметим также, что допустимое значение Δ_1 зависит от номера поперечника. К примеру, при $n = 1$ можно положить $\Delta_1 = 5 \cdot 10^{-2}$, а при $n = 3$ использовать значение $\Delta_1 = 5 \cdot 10^{-3}$.

Итак, для оператора T_σ, заданного мерой вида (7), (21), имеем алгоритм вычисления n наибольших собственных значений $\lambda_k = \lambda_k(m_0, m_1, p_1, \dots, p_N)$, $k = 1, \dots, n$. Возвращаясь к задаче максимизации нижней интегральной оценки, выразим интегральное слагаемое через параметры меры σ:

$$\int_0^1 |\varphi(x)-C|^2 d\sigma(x) = m_1(1-m_1)+(1-2m_1)\int_0^1 xp(x)dx-$$
$$-2\int_0^1 xp(x)\int_x^1 p(y)\,dy\,dx = m_1(1-m_1)+(1-2m_1)\sum_{k=1}^{N}\frac{2k-1}{2N^2}p_k-$$
$$-\sum_{k=1}^{N}\frac{2k-1}{N^3}p_k\sum_{j=k+1}^{N}p_j-\sum_{k=1}^{N}\frac{3k-2}{3N^3}p_k^2.$$

Обозначив $F_0(m_0,m_1,p_1,\dots,p_N)$ правую часть последнего равенства, получаем задачу на условный экстремум функции $N+2$ переменных:

$$F_0(m_0,m_1,p_1,\dots,p_N)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(m_0,m_1,p_1,\dots,p_N)\to\max$$

при выполнении условия (22).

Необходимые условия экстремума образуют нелинейную систему алгебраических уравнений, для решения которой предлагается использовать метод Ньютона, приняв в качестве начального приближения равномерную меру: $m_0=m_1=0$, $p_k=1$, $k=1,\dots,N$, и нулевое значение множителя Лагранжа. Для вычисления матрицы Якоби применяется численное дифференцирование. Матрица пересчитывается на каждой итерации. Условием завершения итерационного процесса является достижение нормой невязки заданного порога малости.

По завершении итераций имеем максимальное значение нижней интегральной оценки для поперечника $d_n(W,H)$ (это значение, зависящее от размерности сетки N, обозначим $L_n(N)$) и соответствующие собственные значения оператора T_σ. Восстановив собственные функции оператора (необходимые для этого соотношения были указаны выше), находим верхнюю оценку поперечника:

$$U_n(N)=\max_{k=0,\dots,N}\left(\left|\varphi\left(\frac{k}{N}\right)-C\right|^2-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f_j^2\left(\frac{k}{N}\right)\right).$$

Любая точка из отрезка $[L_n(N),U_n(N)]$ является приближенным значением поперечника $d_n(W,H)$ с относительной погрешностью, не превосходящей $\delta=\Big(U_n(N)-L_n(N)\Big)\Big/L_n(N)$. Чтобы уменьшить полученное значение δ, параметр N увеличивается и оптимизационная процедура повторяется. Этим действием завершается алгоритм приближенного вычисления поперечников $d_n(W,H)$.

В таблице приведены двусторонние оценки поперечников $d_n(W,H)$, $n=1,2,3$, полученные при условии $\delta \le 10^{-4}$ и $\delta \le 5\cdot 10^{-5}$ на сетках с количеством узлов $N=25$ и $N=40$ соответственно. Для условия $\delta \le 5\cdot 10^{-5}$ в приложении 2 также приведены графики весовой функции p и первых собственных функций оператора T_σ, соответствующие оптимальной мере σ.

Оценки поперечников $d_n(W,H)$

Отн. погрешность	$\delta = 10^{-4}$			$\delta = 5\cdot 10^{-5}$		
N	25			40		
n	1	2	3	1	2	3
Оценка снизу	0,276217	0,209453	0,175184	0,276217	0,209453	0,175184
Точное значение	0,276217…	—	—	0,276217…	—	—
Оценка сверху	0,276221	0,209474	0,175201	0,276219	0,209456	0,175192

Отметим, что удается достичь весьма незначительного расхождения верхней и нижней оценок величин $d_n(W,H)$, $n \ge 2$. Это позволяет рассчитывать на возможность совмещения интегральных оценок поперечников $d_n(W,H)$ при $n \ge 2$ в классе мер (7).

Приложение 1. Сформулируем и докажем лемму о свойствах собственных значений λ и собственных функций f следующей краевой задачи:

$$f''(x) + \lambda p(x) f(x) = 0, \quad x \in [a,b], \tag{25}$$

$$f'(a) = -\lambda m_0 f(a), \tag{26}$$

$$f'(b) = \lambda m_1 f(b), \tag{27}$$

где m_0, m_1 — положительные числа, p — положительная непрерывная (или кусочно непрерывная) на отрезке $[a,b]$ функция.

Лемма. *Задача (25)–(27) имеет бесконечно много неотрицательных собственных значений $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, образующих монотонно возрастающую последовательность, где $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Кроме того, собственная функция, соответствующая λ_n, имеет ровно n нулей в интервале (a,b).*

Доказательство леммы, приводимое далее, в значительной мере повторяет представленное в работе [7] доказательство аналогичного утверждения для случая стандартных краевых условий:

$$f(a)\cos\alpha - f'(a)\sin\alpha = 0,$$

$$f(b)\cos\beta - f'(b)\sin\beta = 0, \quad \alpha,\beta \in [0,\pi).$$

В частности, воспользуемся следующим утверждением из работы [7]. Пусть p_1, p_2 — абсолютно непрерывные, а p_1', p_2', g_1, g_2 — кусочно непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, выполняются неравенства

$$0 < p_2(x) \le p_1(x),\ \ g_2(x) \ge g_1(x),\ \ x \in [a,b],$$

и f_i, $i = 1,2$, — нетривиальные решения уравнений

$$(p_i f_i')' + g_i f_i = 0, \quad i = 1,2.$$

Представим функции f_i и f_i' в виде

$$f_i(x) = \rho_i(x)\sin\theta_i(x), \quad f_i'(x) = \rho_i\cos\theta_i(x), \quad x \in [a,b], \quad i = 1,2.$$

Тогда из $\theta_2(a) \ge \theta_1(a)$ следует

$$\theta_2(x) \ge \theta_1(x), \quad x \in [a,b].$$

Если, кроме того, $g_2 > g_1$ на (a,b), то $\theta_2(x) > \theta_1(x)$ для всех $x \in (a,b]$.

Согласно работе [7] данное утверждение называется теоремой сравнения.

Доказательство. Очевидно, что $\lambda_0 = 0$ — собственное значение задачи (25)–(27). Соответствующая собственная функция пропорциональна **1** и в нуль на (a,b) не обращается. Пусть пара (λ, f) — одно из решений задачи (25)–(27), причем $\lambda \ne 0$ и, следовательно, функция f не равна тождественно константе на отрезке $[a,b]$. Умножая на f и интегрируя по отрезку $[a,b]$ обе части уравнения (25), получаем

$$\lambda\left(m_1 f^2(b) + m_0 f^2(a) + \int\limits_a^b p(x) f^2(x)\,dx\right) = \int\limits_a^b \left(f'(x)\right)^2 dx.$$

Из этого равенства следует, что отличные от нуля собственные значения задачи (25)–(27) положительны.

Через $f(x,\lambda)$ обозначим решение уравнения (25), определяемое следующими начальными условиями: $f(a,\lambda) = -1$, $f'(a,\lambda) = \lambda m_0$ (здесь и далее рассматриваются производные только по переменной x). Ясно, что функция $f(x,\lambda)$ удовлетворяет краевому условию (26) при любом λ.

Представим функцию $f(x,\lambda)$ и ее производную в виде $f = \rho\sin\theta$, $f' = \rho\cos\theta$. Отсюда, а также из уравнения (25) и начальных условий, заданных для функции $f(x,\lambda)$, следует, что функции $\rho(x,\lambda)$ и $\theta(x,\lambda)$ являются решениями уравнений

$$\begin{aligned}
&\rho' = (1-\lambda p)\rho\sin\theta\cos\theta,\\
&\theta' = \cos^2\theta + \lambda p\sin^2\theta,
\end{aligned} \tag{28}$$

удовлетворяющими граничным условиям $\rho(a,\lambda)\sin\theta(a,\lambda) = -1$, $\rho(a,\lambda)\cos\theta(a,\lambda) = \lambda m_0$. Очевидно, что при $\lambda > 0$ функцию θ можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство

$$\theta(a,\lambda) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda m_0}. \tag{29}$$

Поскольку функция $f(x,\lambda)$ вместе со своей производной на отрезке $[a,b]$ в нуль не обращается, функция $\rho^2 = f^2 + (f')^2$ положительна на $[a,b]$. Следовательно, нули функции $f(x,\lambda)$ определяются равенством $\theta(x,\lambda) = \pi k,\ \ k \in \mathbf{Z}$, а краевое условие (27) приводит к следующему уравнению на положительные собственные значения задачи (25)–(27):

$$\operatorname{tg}\theta(b,\lambda) = \frac{1}{\lambda m_1}, \quad \lambda > 0. \tag{30}$$

Изучим свойства функции $\theta(x,\lambda)$. Во-первых, в силу теоремы сравнения $\theta(x,\lambda)$ является монотонно возрастающей функцией от λ при любом фиксированном $x \in (a,b]$. Во-вторых, при любом фиксированном $k = \mathbf{Z}$ выполнение равенства $\theta(x,\lambda) = \pi k$ возможно в силу уравнения (28) не более чем в одной точке $x \in (a,b]$. В-третьих, для произвольного $x \in (a,b]$ выполняется

$$\theta(x,\lambda) \to +\infty \ \text{ при } \ \lambda \to +\infty, \tag{31}$$

$$\theta(x,\lambda) \to -\frac{\pi}{2} \ \text{ при } \ \lambda \to 0. \tag{32}$$

Докажем свойство (31). Поскольку $\theta(a,\lambda) \to 0$ и $\theta'(a,\lambda) \to 1$ при $\lambda \to +\infty$, то существует точка $x_0 \in (a,b)$ такая, что $\theta(x_0,\lambda) > 0$ начиная с некоторого λ. Достаточно доказать, что $\theta(x,\lambda) - \theta(x_0,\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Функция p положительна и непрерывна (кусочно непрерывна) на отрезке $[a,b]$, поэтому существует постоянная P такая, что $p(x) \geq P > 0$ на отрезке $[x_0,x]$. Для решения $\widetilde{f}$ задачи Коши

$$\widetilde{f}'' + \lambda P\widetilde{f} = 0, \quad \widetilde{f}(x_0,\lambda) = f(x_0,\lambda), \quad \widetilde{f}'(x_0,\lambda) = f'(x_0,\lambda)$$

имеем $\widetilde{\theta}(x_0,\lambda) = \theta(x_0,\lambda)$. Следовательно, в силу теоремы сравнения получим

$$\theta(x,\lambda) - \theta(x_0,\lambda) \geq \widetilde{\theta}(x,\lambda) - \widetilde{\theta}(x_0,\lambda).$$

Соседние нули функции $\widetilde{f}$ отличаются на величину $\pi/\sqrt{\lambda P}$. Эта величина стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$ и, следовательно, $\sin\widetilde{\theta} = 0$ для произвольно большого числа точек из интервала (x_0,x). Поскольку при этом $\widetilde{\theta}' = 1$, правая часть последнего неравенства стремится к бесконечности. Значит, то же самое выполняется и для левой части этого неравенства. Свойство (31) доказано.

Для доказательства свойства (32) заметим, что $f(x,0) = -1$ для всех $x \in [a,b]$. Кроме того, $\theta(a,\lambda) \to -\pi/2$ при $\lambda \to 0$. Тогда $\theta(x,0) = -\pi/2$ для любого $x \in (a,b]$, и свойство (32) следует из непрерывности функции θ по переменной λ.

Далее применим свойства (31) и (32), положив $x = b$. Тогда при $\lambda \to 0$ имеем $\theta(b,\lambda) \to -\pi/2$. Функция $1/(\lambda m_1)$ монотонно убывает, а функция $\theta(b,\lambda)$ монотонно возрастает по переменной λ, поэтому существует значение $\lambda = \lambda_1 > 0$, для которого выполняется равенство (30), причем $\theta(b,\lambda_1) = \operatorname{arctg}(1/(\lambda_1 m_1))$. Поскольку $\theta(a,\lambda_1) \in (-\pi/2,0)$ и $\theta(b,\lambda_1) \in (0,\pi/2)$, то в одной из точек интервала (a,b) функция $\theta(x,\lambda_1)$ обращается в нуль, а во всех остальных точках значения функции отличны от πk для любого $k \in \mathbf{Z}$. Следовательно, соответствующая собственная функция $f(x,\lambda_1)$ имеет один нуль в интервале (a,b).

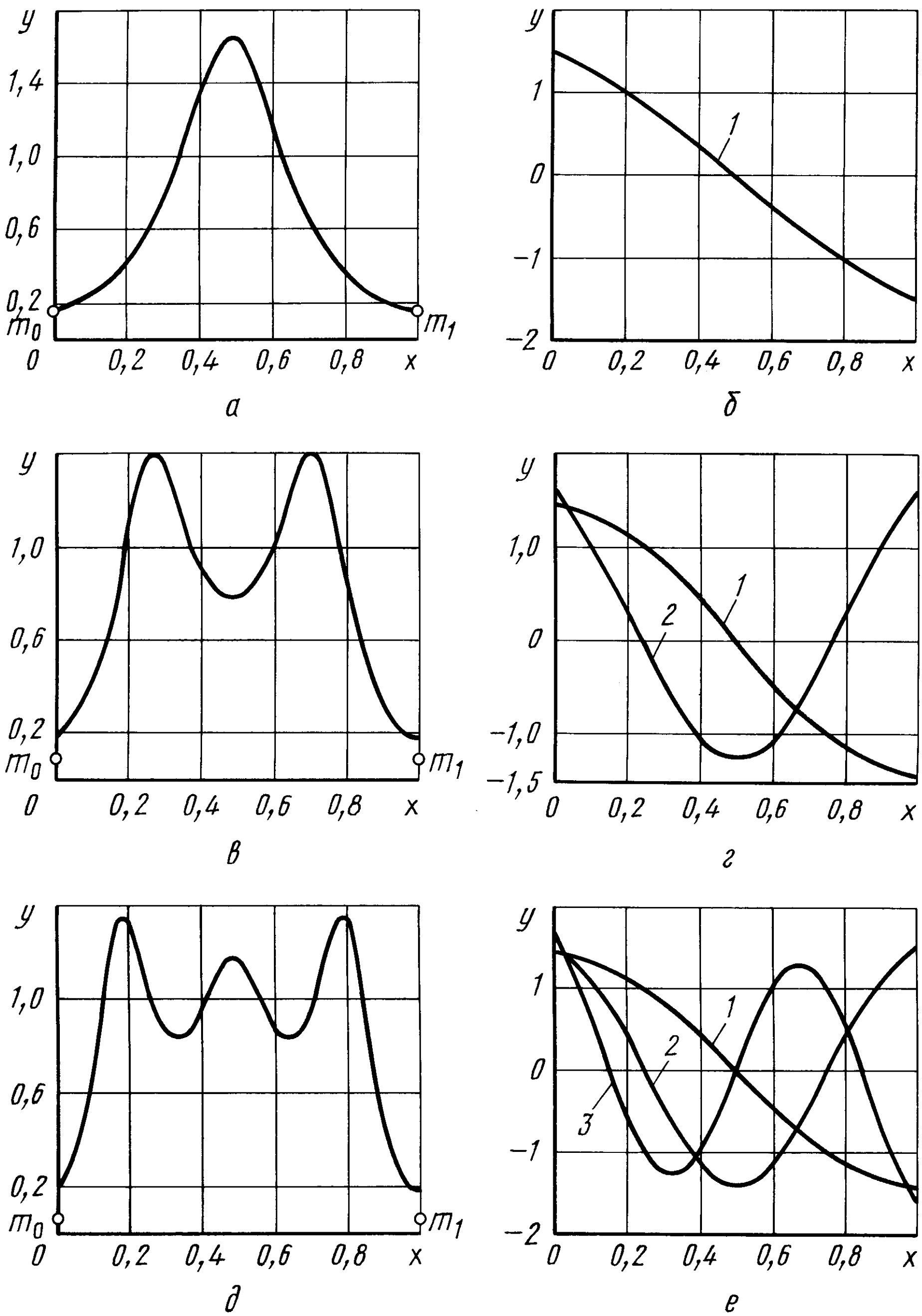
Собственное значение с номером n определяется равенством

$$\theta(b,\lambda_n) = \operatorname{arctg}\frac{1}{\lambda_n m_1} + \pi(n-1), \quad n \geq 1,$$

и соответствующая собственная функция $f(x,\lambda_n)$ имеет ровно n нулей в интервале (a,b). Лемма доказана.

Приложение 2. Для мер σ, доставляющих максимум нижней интегральной оценки поперечников $d_n(W,H)$, на рисунке приведены графики весовой функции p и первых n собственных функций $f_1,\ldots,f_n$ оператора T_σ, $n = 1,2,3$. Алгоритм поиска оптимальной меры σ реализован при следующих значениях параметров: шаг численного дифференцирования 10^{-4}, пороговое значение нормы невязки 10^{-6}, $\delta = 5\cdot 10^{-5}$, $N = 40$, $\Delta_1 = 5\cdot 10^{-2}$ при $n = 1$ и $\Delta_1 = 5\cdot 10^{-3}$ при $n = 2,3$.

В заключение автор благодарит Р.С. Исмагилова за помощь в подготовке настоящей работы.



Графики весовой функции $y = p(x)$ (*а, в, д*) **и первых** n **собственных функций** $f_1, \ldots, f_n$ **оператора** T_σ (*б, г, е*) **при** $n = 1$ (*а, б*), $n = 2$ (*в, г*), $n = 3$ (*д, е*):
1 — $f_1(x)$, *2* — $f_2(x)$, *3* — $f_3(x)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т и х о м и р о в В. М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во МГУ, 1968. – С. 14–15, 239–241.
2. K o l m o g o r o v A. Uber die beste Annaherung von Functionen einer gegebenen Functionalklassen // Annals Math. – 1936. – № 37. – S. 107–110.
3. К а р т ь е П. Введение в теорию многопараметрического броуновского движения // Математика. 18:2. – М.: Мир, 1974. – С. 169–170.
4. И с м а г и л о в Р. С. Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 2. – Вып. 2. – С. 32–35.
5. Б и р м а н М. Ш., С о л о м я к М. З. Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов // Вестник ЛГУ. – 1977. – № 13. – С. 14–15.
6. B i r m a n M. S., S o l o m y a k M. Z. Asymptotic behaviour of the spectrum of weakly polar integral operators // Izv. Akad. nauk SSSR. Ser. mat. – 1970. – V. 34. – № 5. – P. 1154–1155.
7. К о д д и н г т о н Э. А., Л е в и н с о н Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Ин. лит., 1958. – С. 227–230.
8. У с к о в К. В. О нахождении точного значения колмогоровских поперечников компакта в гильбертовом пространстве // Мат. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 4. – С. 570–575.

Статья поступила в редакцию 28.10.2002

Кирилл Владимирович Усков родился в 1976 г., окончил в 1999 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана.

K.V. Uskov (b. 1976) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1999. Post-graduate of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University.