

Александр Анатольевич Борисов родился в 1958 г., окончил в 1980 г. Даугавпилское высшее военное авиационное инженерное училище. Канд. техн. наук, начальник управления 22 ЦНИИ МО РФ. Автор 60 научных работ в области надежности сложных технических систем.



A.A. Borisov (b. 1958) graduated from the Daugavpils Higher Airforce Engineer School in 1980. Ph. D. (Eng.), head of department of the military research institute. Author of 60 publications in the field of reliability of complex technical systems.

УДК 539.3

Ю. И. Д и м и т р и е н к о

АНИЗОТРОПНАЯ ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Разработан вариант теории течения для случая материалов с большими анизотропными упруго-пластическими деформациями. Сформулирована соответствующая динамическая задача и разработан численный метод решения двумерных осесимметричных задач. Представлен пример численного расчета задачи об ударе металлического ударника по мишени из композитного гибкого материала.

В последнее время в связи с появлением новых материалов: металлокомпозитов, композитных броневых материалов, сверхпластичных сплавов, монокристаллов и др. — возникла необходимость разработки теории деформирования анизотропных сред, находящихся в условиях конечных упруго-пластических деформаций. Вопросам теории больших упруго-пластических деформаций для изотропных сред посвящены многие работы, например работы [1, 2], модели же анизотропных сред в строгой математической постановке рассматривались значительно реже [3–6]. Исследование различных задач для анизотропных сред с большими пластическими деформациями в точной математической постановке еще только начинается [7, 8].

Целью настоящей работы является построение определяющих соотношений типа теории течения для конечных анизотропных упруго-пластических деформаций, формулировка динамической задачи для упруго-пластических сред в лагранжевой постановке и разработка численного метода решения двумерных осесимметричных задач.

Элементы теории больших деформаций. Рассмотрим тензор-градиент деформаций \mathbf{F} , преобразующий элементарный радиус-вектор $\overset{\circ}{\mathbf{x}}$ из отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$ в актуальную K [9]: $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{x}}$. Его представление в базисе отсчетной конфигурации имеет вид $\mathbf{F} = F_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{R}}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}^j$.

Образуем правый тензор деформаций Коши–Грина \mathbf{C} и правый тензор деформаций Альманзи \mathbf{A} , компонентами которых в базисах отсчетной конфигурации являются компоненты тензора деформаций ε_{ij} и ε^{ij} :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E}) = \varepsilon_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{R}}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}^j, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}), \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} - \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1T}) = \varepsilon^{ij} \overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_j, \quad \varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}^{ij} - g^{ij}),$$

где $g_{ij}, \overset{\circ}{g}_{ij}$ — метрические матрицы, а $g^{ij}, \overset{\circ}{g}^{ij}$ — обратные метрические матрицы в K и $\overset{\circ}{K}$; \mathbf{E} — метрический тензор.

С помощью полярного разложения [9] $\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}$ введем правый тензор искажений \mathbf{U} и тензор поворота \mathbf{O} , сопровождающий деформацию. Тензор \mathbf{U} и обратный ему тензор \mathbf{U}^{-1} в базисах отсчетной конфигурации имеют следующие компоненты:

$$\mathbf{U} = \left(\sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \overset{\circ}{p}_{\alpha}^i \overset{\circ}{p}_{\alpha}^j \right) \overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_j, \quad \mathbf{U}^{-1} = \left(\sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha}^{-1} \overset{\circ}{p}_{\alpha}^i \overset{\circ}{p}_{\alpha}^j \right) \overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_j, \quad (2)$$

где λ_{α} — собственные значения тензора \mathbf{U} ; $\overset{\circ}{p}_{\alpha}^i$ — компоненты собственных векторов в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{R}}_i$, которые могут быть выражены через компоненты метрических матриц путем решения характеристических уравнений

$$(\mathbf{U}^2 - \lambda_{\alpha}^2 \mathbf{E}) \overset{\circ}{p}_{\alpha} = 0, \quad (\mathbf{U}^{-2} - \lambda_{\alpha}^{-2} \mathbf{E}) \overset{\circ}{p}_{\alpha} = 0; \quad (3)$$

здесь $\mathbf{U}^2 = g_{ij} \overset{\circ}{\mathbf{R}}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}^j$, $\mathbf{U}^{-2} = g^{ij} \overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_j$.

Тензоры \mathbf{C} , $(\mathbf{U} - \mathbf{E})$, $(\mathbf{E} - \mathbf{U}^{-1})$ и \mathbf{A} являются энергетическими тензорами деформаций $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ [9–11], которые совместно с соответствующими энергетическими тензорами напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ образуют мощность напряжений

$$w = \Delta \mathbf{P} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{F}, \quad \Delta = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho};$$

$$w = \overset{(n)}{\mathbf{T}} \cdot \frac{d}{dt} \overset{(n)}{\mathbf{C}}, \quad (4)$$

где $n = I, II, III, IV, V$; \mathbf{T} — тензор истинных напряжений Коши, $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}_j$; $\overset{\circ}{\rho}$ и ρ — плотности в отсчетной и в актуальной конфигурациях соответственно; \mathbf{P} — первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа:

$$\mathbf{P} = \Delta \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} = P^{mn} \overset{\circ}{\mathbf{R}}_m \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_n, \quad P^{mn} = \Delta T^{mi} F_i^n. \quad (5)$$

Энергетические тензоры напряжений имеют те же компоненты, что и тензор напряжений Коши, но в других базисах [9], в частности, $\overset{(I)}{\mathbf{T}}$ и $\overset{(V)}{\mathbf{T}}$ имеют следующие компоненты:

$$\overset{(I)}{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T} = T^{ij} \overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_j, \quad \overset{(V)}{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1T} = T^{ij} \overset{\circ}{\mathbf{R}}_i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}_j. \quad (6)$$

Аддитивные теории пластичности. Теории больших пластических деформаций подразделяются на мультипликативные, в которых тензор \mathbf{F} представляется в виде произведения $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$ градиента упругих деформаций \mathbf{F}^e и пластических \mathbf{F}^p , и аддитивные, в которых тензоры деформаций представляются в виде суммы тензора упругих и пластических деформаций. Рассмотрим далее только аддитивную теорию, полагая, что один из энергетических тензоров может быть представлен в виде суммы

$$\overset{(n)}{\mathbf{C}} = \overset{(n)}{\mathbf{C}}^e + \overset{(n)}{\mathbf{C}}^p, \quad (7)$$

причем $\overset{(n)}{\mathbf{C}}^e = \varepsilon_{ij}^e \overset{\circ}{\mathbf{R}}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}^j$, $\overset{(n)}{\mathbf{C}}^p = \varepsilon_{ij}^p \overset{\circ}{\mathbf{R}}^i \otimes \overset{\circ}{\mathbf{R}}^j$ для $n = I, V$; здесь ε_{ij}^e и ε_{ij}^p — компоненты упругих и пластических деформаций.

Если принимается истинным соотношение (7) для конкретного номера n , то, следовательно, рассматривается аддитивная модель A_n пластичности.

Уравнения состояния упруго-пластических анизотропных сред с конечными деформациями. Для упруго-пластических сред удельная свободная энергия является функцией от упругих, пластических деформаций и температуры: $\psi = \psi(\overset{(n)}{\mathbf{C}}^e, \overset{(n)}{\mathbf{C}}^p, \theta)$, а энергетический тензор напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ связан с тензором упругих деформаций $\overset{(n)}{\mathbf{C}}^e$ соотношением

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \overset{(n)}{\mathbf{C}}^e}. \quad (8)$$

Если рассматриваемая среда является анизотропной, то ψ является функцией от инвариантов I_γ , $\gamma = 1, \dots, k$, тензора \mathbf{C}^e :

$$\psi = \psi \left(I_1 \left(\mathbf{C}^e \right), \dots, I_k \left(\mathbf{C}^e \right), \theta \right), \quad k \leq 6. \quad (9)$$

Зависимость ψ от инвариантов тензора пластических деформаций полагаем при этом включенной в саму структуру функции (9). Число k определяется типом анизотропии (группой симметрии G_s [11]), его значения для различных групп симметрии приведены в работе [10]. Подставляя выражение (9) в соотношение (8) и применяя правила дифференцирования скалярной функции от инвариантов [10], получим

$$\mathbf{T} = \sum_{\gamma=1}^m \varphi_\gamma \mathbf{\Omega}_\gamma + 2 \sum_{\gamma=m+1}^q \varphi_\gamma {}^4\mathbf{\Omega}_\gamma \cdot \mathbf{C}^e + 3 \sum_{\gamma=q+1}^r \varphi_\gamma {}^6\mathbf{\Omega}_\gamma \cdot \mathbf{C}^e \otimes \mathbf{C}^e, \quad (10)$$

где $\mathbf{\Omega}_\gamma$, ${}^4\mathbf{\Omega}_\gamma$ и ${}^6\mathbf{\Omega}_\gamma$ — тензоры-константы второго, четвертого и шестого рангов, не зависящие от \mathbf{C}^e , \mathbf{C}^p , θ и принадлежащие конкретной группе симметрии G_s . Выражения для них приведены в работе [11].

Если материал можно рассматривать как полулинейный, то в соотношении (10) следует положить $m = 0$, $q = r = k$ и $\varphi_\gamma = \text{const}$. Тогда соотношение (10) можно представить в виде

$$\mathbf{T} = {}^4\mathbf{M} \cdot \mathbf{C}^e, \quad (11)$$

где ${}^4\mathbf{M}$ — тензор модулей упругости в группе G_s .

Поскольку тензоры второго ранга \mathbf{C}^p и \mathbf{T} являются симметричными [9], то для них можно ввести спектральные представления [11]:

$$\mathbf{C}^p = \sum_{\gamma=1}^n \mathbf{P}_{(\gamma)}^p, \quad \mathbf{T} = \sum_{\gamma=1}^n \mathbf{P}_{(\gamma)}^n, \quad n \leq 6; \quad (12)$$

здесь ортогональные проекторы $\mathbf{P}_{(\gamma)}^p$ и $\mathbf{P}_{(\gamma)}^n$ являются линейными функциями от \mathbf{C}^p и \mathbf{T} соответственно: $\mathbf{P}_{(\gamma)}^p = {}^4\mathbf{A}_{(\gamma)} \cdot \mathbf{C}^p$, $\mathbf{P}_{(\gamma)}^n = {}^4\mathbf{A}_{(\gamma)} \cdot \mathbf{T}$, где ${}^4\mathbf{A}_{(\gamma)}$ — тензоры-константы, как и $\mathbf{\Omega}$, являющиеся принадлежностью группы G_s (выражения для них приведены в работе [11]).

С помощью ортогональных проекторов образуем совместные спектральные инварианты тензоров \mathbf{C}^p и \mathbf{T} :

$$Y_\gamma^2 = (\mathbf{P}_{(\gamma)}^n - H_\gamma \mathbf{P}_{(\gamma)}^p) \cdot (\mathbf{P}_{(\gamma)}^n - H_\gamma \mathbf{P}_{(\gamma)}^p), \quad \gamma = 1, \dots, n; \quad (13)$$

здесь $H_\gamma = H_\gamma(Y_\gamma^p)$ — функции спектральных инвариантов $Y_\gamma^p = (\mathbf{P}_{(\gamma)}^p \cdot \mathbf{P}_{(\gamma)}^p)^{1/2}$.

Обобщая постулаты теории течения [12], полагаем, что существует в пространстве ортогональных проекторов $\mathbf{P}_{(\gamma)}^n$ поверхность течения, состоящая из N отдельных частей $f_\beta = 0$, $\beta = 1, \dots, N$, где f_β — функции совместных инвариантов (13):

$$f_\beta = f_\beta(Y_1^p, \dots, Y_n^p), \quad \beta = 1, \dots, N. \quad (14)$$

С помощью спектральных представлений (12) ассоциативный закон пластического течения можно представить в виде

$$d\mathbf{P}_{(\gamma)}^p = \sum_{\beta=1}^N d\mu_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{P}_{(\gamma)}^n}, \quad (15)$$

где μ_β — коэффициенты пропорциональности (параметры нагружения).

С учетом выражений (12)–(15) соотношения для пластических деформаций имеют вид

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}^p = \sum_{\gamma=1}^n \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{Y_\gamma} \frac{d\mu_\beta}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial Y_\gamma} \mathbf{A}_{(\gamma)} \cdot \left(\mathbf{T} - H_\gamma \mathbf{C}^p \right). \quad (16)$$

Соотношения (16) удовлетворяют принципу объективности (материальной индифферентности) [13].

Уравнения сохранения. Запишем теперь уравнение неразрывности, уравнение движения и кинематическое уравнение рассматриваемой среды, используя лагранжеву (отсчетную) конфигурацию $\overset{\circ}{K}$:

$$\overset{\circ}{\rho} = \rho \det \mathbf{F}, \quad (17)$$

$$\overset{\circ}{\rho} \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{P}, \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{v}. \quad (19)$$

Рассмотрим также динамическое уравнение совместности [9], которое для $\overset{\circ}{K}$ запишем в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}^T = \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{v}. \quad (20)$$

Для динамических задач теории пластичности предпочтительно получить постановку “в скоростях”, для этого запишем определяющие соотношения (11) также “в скоростях”. Дифференцируя соотношения (11) по t , получаем

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}^{(n)} = {}^4\mathbf{B} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{C}^e. \quad (21)$$

Для полулинейных сред (11) тензор ${}^4\mathbf{B}$ совпадает с тензором ${}^4\mathbf{M}$. Используя соотношения (1) и (20) и принимая во внимание симметрию тензора ${}^4\mathbf{B}$ по третьему и четвертому индексам, формулу (21) представим в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}^{(l)} = {}^4\mathbf{M} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{v} \right)^T \cdot (\mathbf{E} - 2\mathbf{\Lambda}) - {}^4\mathbf{M} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{C}^p$$

для модели A_I и

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}^{(V)} = {}^4\mathbf{M} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \left(\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{v} \right)^T - {}^4\mathbf{M} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{C}^p \quad (22)$$

для модели A_V .

Постановка динамической задачи. Подставим выражение (17) для плотности ρ в выражение (5) и затем в уравнение движения (18); тогда система дифференциальных уравнений (16), (18)–(20), (22), заданных в области $\overset{\circ}{V}$ в конфигурации $\overset{\circ}{K}$, является замкнутой относительно неизвестных \mathbf{v} , \mathbf{u} , \mathbf{F} , \mathbf{T} и \mathbf{C}^p . Общее число скалярных уравнений и неизвестных в этой системе равно 27.

Граничные условия в отсчетной конфигурации на поверхности контакта двух анизотропных сред в случае больших деформаций и отсутствия фазовых превращений имеют вид [9]

$$[\mathbf{v}] = 0, \quad [\mathbf{u}] = 0, \quad \overset{\circ}{n} \cdot [\mathbf{P}] = 0, \quad (23)$$

где $[\cdot]$ — скачок функций. Для свободных от нагрузок поверхностей $\overset{\circ}{\Sigma}$ справедливо равенство $\overset{\circ}{n} \cdot [\mathbf{P}] = 0$, где $\overset{\circ}{n}$ — вектор нормали к поверхности $\overset{\circ}{\Sigma}$ в $\overset{\circ}{K}$.

Присоединяя к системе уравнений (16), (18)–(20), (22), (23) начальные условия

$$t = 0: \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{C}^p = \mathbf{0}, \quad (24)$$

получаем постановку динамической задачи теории больших анизотропных упруго-пластических деформаций для модели анизотропной пластичности A_n .

Осесимметричная задача. Рассмотрим частный случай, когда область $\overset{\circ}{V}$ в $\overset{\circ}{K}$ и группа симметрии G_s имеют ось симметрии $0x^3$ в лагранжевой системе координат x^i , в качестве которой выберем цилиндрическую систему координат $x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = z$. Сформулируем задачу (16), (18)–(20), (22)–(24) в осесимметричной постановке.

Запишем такую постановку задачи для модели A_V в физических координатах, используя компонентную запись дифференциальных операторов и тензоров [11]:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\rho} \frac{\partial v_r}{\partial t} &= \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} + \frac{P_{rr} - P_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial P_{rz}}{\partial z}, \\ \overset{\circ}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial P_{zr}}{\partial r} + \frac{P_{zr}}{r} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} &= v_r, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = v_z, \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} T_{rr} \\ T_{\varphi\varphi} \\ T_{zz} \\ T_{rz} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} M_{1111} & M_{1122} & M_{1133} & 0 \\ M_{1122} & M_{1111} & M_{1133} & 0 \\ M_{1133} & M_{1133} & M_{3333} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2M_{1313} \end{pmatrix} \times \\ &\times \left(\begin{pmatrix} e_{rr} \\ e_{\varphi\varphi} \\ e_{zz} \\ e_{rz} \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^p \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^p \\ \varepsilon_{zz}^p \\ \varepsilon_{rz}^p \end{pmatrix} \right), \quad \Delta = \det F, \\ \frac{\partial F_{rr}}{\partial t} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \frac{\partial F_{\varphi\varphi}}{\partial t} = \frac{v_r}{r}, \quad \frac{\partial F_{zz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \frac{\partial F_{rz}}{\partial t} &= \frac{\partial v_r}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_{zr}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $T_{rr} = T_{11}, T_{\varphi\varphi} = T_{22}, T_{zz} = T_{33}$ и T_{rz} — физические компоненты тензора истинных напряжений в актуальной конфигурации; $e_{rr} = e_{11}, e_{\varphi\varphi} = e_{22}, e_{zz} = e_{33}$ и e_{rz} — физические компоненты тензора скоростей деформаций; $P_{rr} = P_{11}, P_{\varphi\varphi} = P_{22}, P_{zz} = P_{33}, P_{rz}$ и P_{zr} — физические компоненты тензора Пиола–Кирхгофа:

$$\begin{aligned} P_{rr} &= \Delta (T_{rr}F_{rr} + T_{rz}F_{rz}), \\ P_{\varphi\varphi} &= \Delta (T_{\varphi\varphi}F_{\varphi\varphi}), \\ P_{zz} &= \Delta (T_{rz}F_{zr} + T_{zz}F_{zz}), \\ P_{rz} &= \Delta (T_{rr}F_{zr} + T_{rz}F_{zz}), \\ P_{zr} &= \Delta (T_{rz}F_{rr} + T_{zz}F_{rz}), \\ \Delta &= F_{\varphi\varphi} (F_{rr}F_{zz} - F_{rz}F_{zr}), \end{aligned} \quad (26)$$

$$e_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} F_{rr} + \frac{\partial v_r}{\partial z} F_{rz}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r} F_{\varphi\varphi},$$

$$e_{zz} = \frac{\partial v_r}{\partial z} F_{rz} + \frac{\partial v_z}{\partial z} F_{zz}, \quad e_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} F_{rz} + \frac{\partial v_z}{\partial z} F_{rz} + \frac{\partial v_z}{\partial r} F_{rr} + \frac{\partial v_r}{\partial z} F_{zz} \right).$$

Рассмотрим для примера трансверсально-изотропную среду. Тогда соотношения (16) в физических координатах для осесимметричного случая имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{rr}^p}{\partial t} &= \frac{1}{2} S_2 (T_{rr} + T_{\varphi\varphi} - H_2 (\mathcal{E}_{rr}^p + \mathcal{E}_{\varphi\varphi}^p)) + \\ &+ \frac{1}{2} S_3 (T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H_3 (\mathcal{E}_{rr}^p - \mathcal{E}_{\varphi\varphi}^p)), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{\varphi\varphi}^p}{\partial t} &= \frac{1}{2} S_2 (T_{rr} + T_{\varphi\varphi} - H_2 (\mathcal{E}_{rr}^p + \mathcal{E}_{\varphi\varphi}^p)) - \\ &- \frac{1}{2} S_3 (T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H_3 (\mathcal{E}_{rr}^p - \mathcal{E}_{\varphi\varphi}^p)), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_{zz}^p}{\partial t} &= S_1 (T_{zz} - H_1 \mathcal{E}_{zz}^p), \quad \frac{\partial \mathcal{E}_{rz}^p}{\partial t} = S_4 (T_{rz} - H_4 \mathcal{E}_{rz}^p); \end{aligned} \quad (27)$$

здесь

$$S_\gamma = \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{Y_\gamma} \frac{d\lambda_\beta}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial Y_\gamma}, \quad \gamma = 1, \dots, 4,$$

$$Y_1 = T_{zz} - H_1 \mathcal{E}_{zz}^p, \quad Y_2 = T_{rr} + T_{\varphi\varphi} - H_2 (\mathcal{E}_{rr}^p + \mathcal{E}_{\varphi\varphi}^p),$$

$$Y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} |T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H_3 (\mathcal{E}_{rr}^p - \mathcal{E}_{\varphi\varphi}^p)|, \quad Y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} |T_{rz} - H_4 \mathcal{E}_{rz}^p|.$$

Для функций H_γ примем следующую модель степенного упрочнения:

$$\begin{aligned} H_1 &= H_1^0 |\mathcal{E}_{zz}^p|^{-n_1}, \quad H_2 = H_2^0 |\mathcal{E}_{rr}^p + \mathcal{E}_{\varphi\varphi}^p|^{-n_2}, \\ H_3 &= H_3^0 |\mathcal{E}_{rr}^p - \mathcal{E}_{\varphi\varphi}^p|^{-n_3}, \quad H_4 = H_4^0 |\mathcal{E}_{rz}^p|^{-n_4}, \end{aligned} \quad (28)$$

где H_γ^0 и n_γ — константы.

Для трансверсально-изотропной среды со слоистой структурой, слои которой ортогональны к оси Ox^3 , функции f_γ можно задать следующим образом:

$$2f_1 = \left(\frac{Y_1}{\sigma_{1S}} \right)^2 - 1 = 0, \quad 2f_2 = \sum_{\gamma=3}^4 \left(\frac{Y_\gamma}{\sigma_{\gamma S}} \right)^2 - 1 = 0, \quad N = 2, \quad (29)$$

где $\sigma_{\gamma S}$, $\gamma = 1, \dots, 4$, — первоначальные пределы текучести. Тогда функции S_γ имеют вид

$$S_\gamma = \frac{1}{\sigma_{\gamma S}^2} \frac{\partial \lambda_\gamma}{\partial t}, \quad \gamma = 1, \dots, 4. \quad (30)$$

Система уравнений (25)–(29) является замкнутой относительно функций $u_r, u_z, v_r, v_z, F_{rr}, F_{zz}, F_{rz}, F_{zr}, F_{\varphi\varphi}, T_{rr}, T_{zz}, T_{rz}, T_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{zz}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{rz}^p, \lambda_1, \lambda_2$, зависящих от r, z и t .

Результаты численного моделирования ударно-волновых процессов в пластине из композиционного материала. Рассмотрим задачу о прямом ударе цилиндрического металлического идеально упругого ударника по пластине из тканевого композитного материала, слои которого уложены ортогонально направлению удара. Пластические свойства тканевого композита обусловлены необратимым смятием (компрессией) отдельных слоев. Для численного расчета применим модифицированный метод Маккормака. Примем следующие значения констант для композита: $M_{1111} = 20$ ГПа, $M_{3333} = 2$ ГПа, $M_{1122} = 6$ ГПа, $M_{1133} = 1,2$ ГПа, $H_{10} = 10$ МПа, $n_3 = 0,9$, $\sigma_{1S} = 10$ МПа, $\rho = 1500$ кг/м³. Начальная скорость v_z^0 в момент удара о материал составляла 300 м/с, масса ударника — 4 г, диаметр ударника — 8 мм, толщина композита — 6 мм.

Ударно-волновые процессы рассматривались как в ударнике, так и в композитной пластине, при этом допускался отскок ударника от композита и вторичное возможное их взаимодействие. Некоторые из результатов расчетов приведены на рис. 1–5. На рис. 3–5 представлены двумерные графики $Q(r, z)$ для различных моментов времени ($t = 1, 2; 3, 6; 4, 8$ и 12 мкс) после начала удара; здесь $Q = \{v_z, F_{\varphi\varphi}, F_{zz}, T_{\varphi\varphi}\}$, r, z — лагранжевы координаты.

Отметим некоторые результаты расчетов. После начала соударения из-за относительно малой массы композитная пластина разгоняется и приобретает скорость v_z , большую, чем начальная скорость ударника (см. рис. 1). Из-за больших деформаций на лицевой поверхности образуется воронка, а на тыльной — выпуклость (см. рис. 2). Волна сжатия распространяется по направлению к тыльной стороне пластины, и после отражения происходит формоизменение в обратном направлении. Значения компонент тензора деформаций \mathbf{F} , характеризующих формоизменение, приведены на рис. 3. Максимальные значения $F_{zz} = 2,2$ и $F_{\varphi\varphi} = 1,2$ достигаются при $t = 6,4$ мкс на тыльной поверхности и в окрестности оси симметрии. В этих же зонах достигают максимальных значений компоненты $T_{\varphi\varphi}$ и T_{rr} тензора напряжений, причем эти

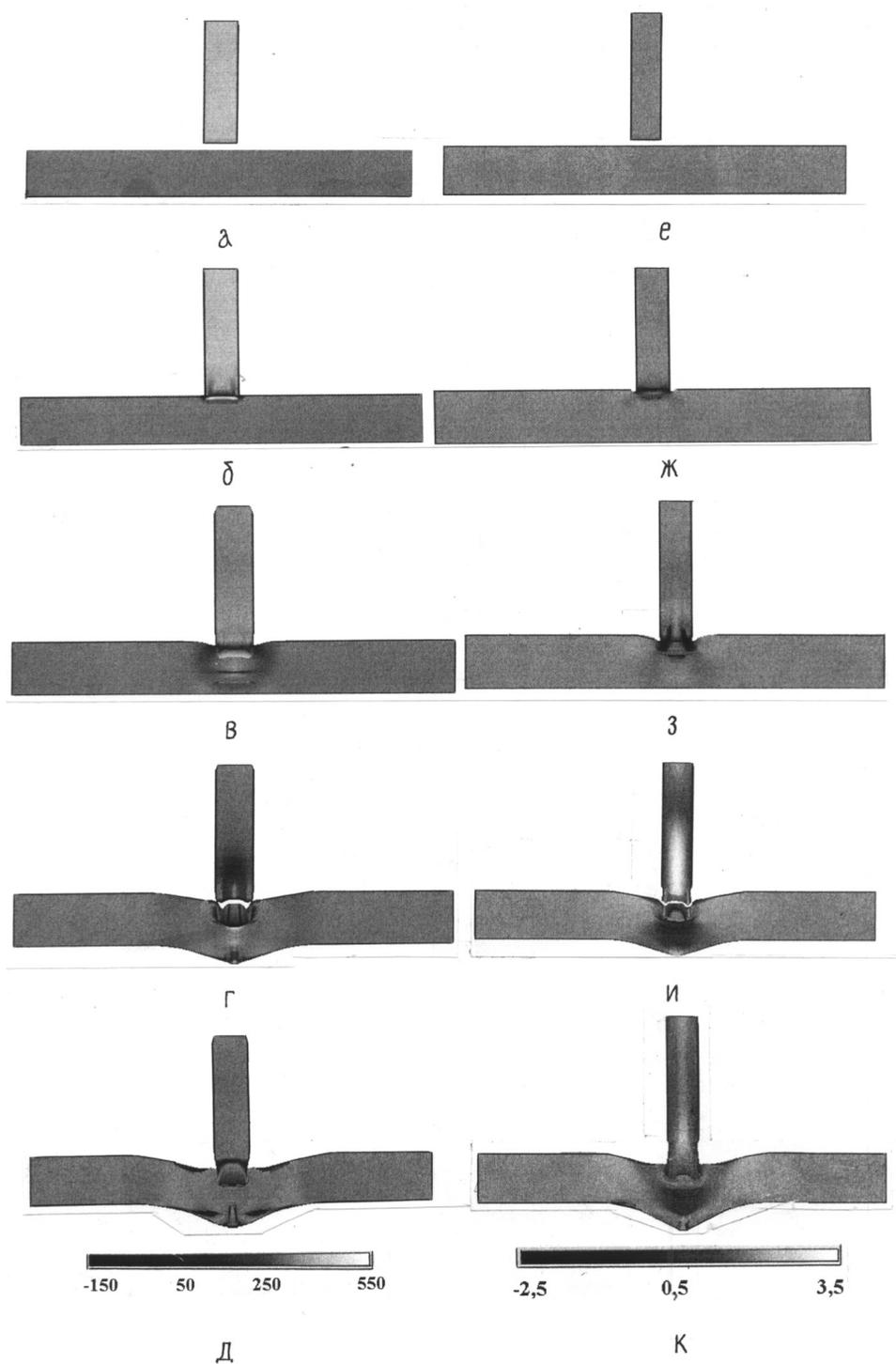


Рис. 1. Продольная скорость v_z (а–д), м/с, и компонента тензора напряжений Коши T_{rr} (е–к), ГПа, в металлической мишени и ударнике из композиционного упруго-пластического материала в различные моменты времени:

$t = -0,3$ (а, е); $0,33$ (б, ж); $2,7$ (в, з); 8 (г, и); 13 (д, к) мкс; скорость удара составляет 300 м/с, момент $t = 8$ мкс соответствует отскоку ударника от мишени

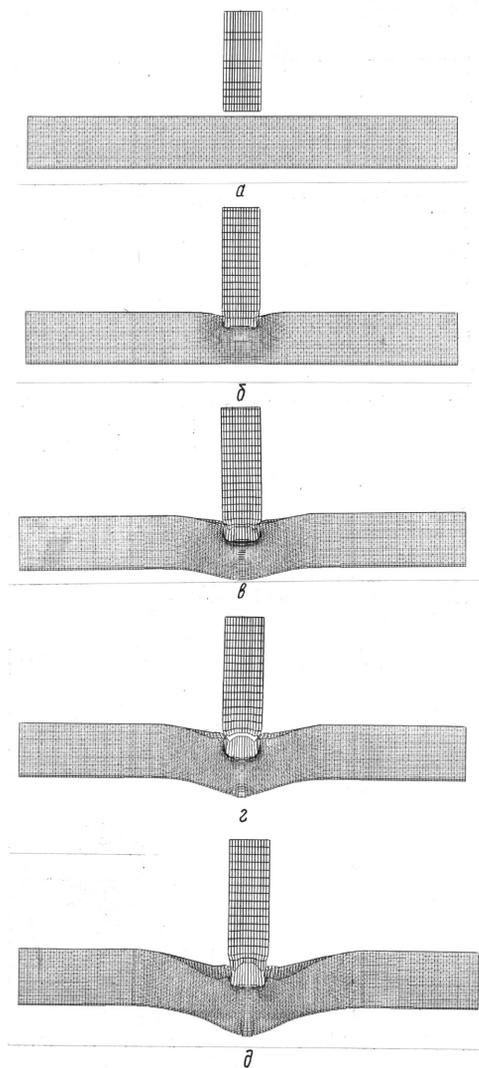


Рис. 2. Лагранжева конечно-разностная сетка в различные моменты времени удара:

$t = -0,3$ (а); $2,7$ (б); $6,4$ (в); 8 (г); 13 (д) мкс

значения положительны. Высокий уровень положительного напряжения является причиной разрыва волокон ткани и разрушения композитной пластины в целом при ударе. Напряжения T_{zz} до возникновения отраженной волны являются сжимающими. Их уровень ограничивается пределом текучести σ_{1S} , определяющим появление пластической деформации ϵ_{zz}^p (см. рис. 5). От величины пластической деформации ϵ_{zz}^p зависит также значение скорости v_z движения тыльной поверхности. Скорость v_z является важной характеристикой ударной стойкости композита. Увеличение пластической деформации приводит к снижению скорости v_z .

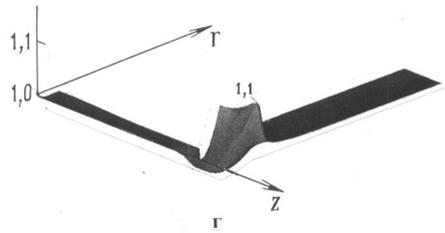
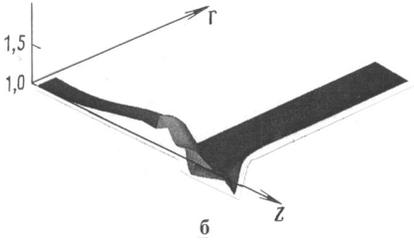
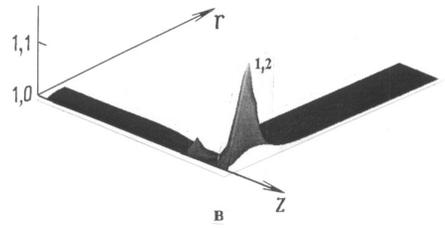
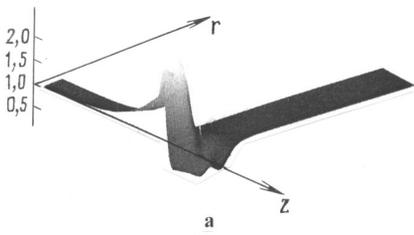


Рис. 3. Распределение компонент F_{zz} (а, б) и $F_{\varphi\varphi}$ (в, г) в различные моменты времени:

$t = 6,4$ (а, в); $9,4$ (б, г) мкс

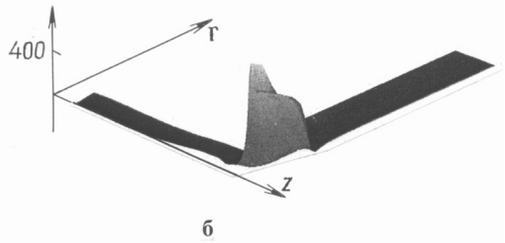
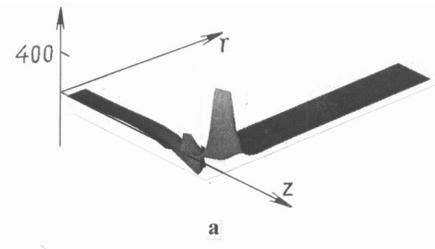


Рис. 4. Распределение напряжения $T_{\varphi\varphi}$ в различные моменты времени:

$t = 6,4$ (а); $9,4$ (б) мкс

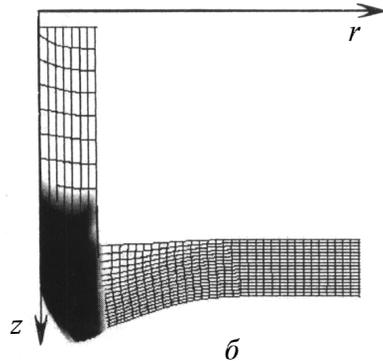
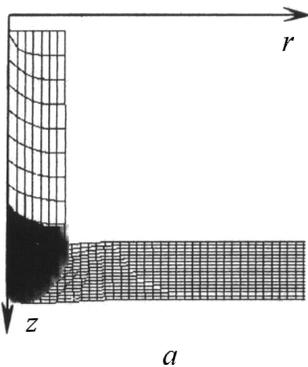


Рис. 5. Зоны пластической деформации в различные моменты времени:

$t = 3,4$ (а); $9,4$ (б) мкс

В целом, наличие больших деформаций приводит к существенному перераспределению напряженного состояния в композите.

Выводы. 1. Предложен вариант теории течения для анизотропных упруго-пластических сред с большими деформациями. Сформулирована динамическая задача упруго-пластичности среды в условиях больших анизотропных деформаций.

2. Представлена двумерная осесимметричная постановка динамической задачи. Разработан численный метод ее решения.

3. Приведен пример расчета задачи о высокоскоростном ударе по композитной трансверсально-изотропной упруго-пластической пластине. Показано, что пластические свойства приводят к повышению ударной стойкости композита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упруго-пластические деформации. – М.: Наука, 1986.
2. Simo J. C., Miehe C. Associative coupled thermoplasticity on finite strains: formulations, numerical analysis and implementation // *Comp.Meth. in Appl.Mech. & Eng.* – 1992. – V. 98. – P. 94–104.
3. Шемякин Е. И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1968.
4. Петров И. Б. Волновые и откольные явления в слоистых оболочках конечной толщины // *Механика твердого тела.* – 1986. – № 4. – С. 118–124.
5. Кондауров В. И., Кукуджанов В. Н. Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упруго-пластической среды с конечными деформациями // *Численные методы в механике твердого деформируемого тела.* – М.: ВЦ АН СССР, 1978. – С. 84–121.
6. Кравчук А. С., Майборода В. П., Холин Н. Н. Высокоскоростное деформирование конструкционных материалов. – М.: Машиностроение, 1986.
7. Дмитриенко Ю. И., Беленовская Ю. В. Моделирование ударно-волновых процессов в анизотропных материалах с большими деформациями // *Аэрокосмические технологии / Под ред. Р.П. Симоньянца.* – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – С. 78–85.
8. Дмитриенко Ю. И. Моделирование и численные методы в нелинейной механике многофазных сред. – М.: Изд-во НТЦ “Университетский”, 2003. – 80 с.
9. Dimitrienko Yu. I. *Tensor Analysis and Nonlinear Tensor Functions.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 662 p.
10. Дмитриенко Ю. И., Даштиев И. З. Модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”.* – 2001. – № 1. – С. 21–41.
11. Дмитриенко Ю. И. *Тензорное исчисление.* – М.: Высшая школа, 2001. – 576 с.
12. Седов Л. И. *Механика сплошных сред.* – М.: Наука, 1976.
13. Трусделл К. *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.* – М.: Мир, 1975.

Статья поступила в редакцию 4.07.2003



Юрий Иванович Димитриенко родился в 1962 г., окончил в 1984 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, академик РАИН. Автор более 100 научных работ в области термомеханики, механики композитов, механики многофазных сред, математического моделирования и численных методов решения задач математической физики.

Yu. I. Dimitrienko (b. 1962) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1984. D.Sc (Phys.-Math.), professor, head of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University, academician of the Russian Academy of Engineering Sciences. Author of over 100 publications in the field of thermal mechanics, composite mechanics, multiphase media mechanics, mathematical modelling and numerical methods for problems of mathematical physics.

ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ НА ЖУРНАЛ “ВЕСТНИК МГТУ имени Н.Э. БАУМАНА”

В журнале публикуются наиболее значимые результаты фундаментальных и прикладных исследований и совместных разработок, выполненных в МГТУ им. Н.Э. Баумана и других научных и промышленных организациях. Журнал издается в трех сериях: “Приборостроение”, “Машиностроение”, “Естественные науки” с периодичностью 10 номеров в год.

Журнал “Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана” в соответствии с постановлением Высшей аттестационной комиссии Министерства образования Российской Федерации включен в перечень периодических и научно-технических изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук.

К публикации в журнале “Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана” принимаются статьи, подготовленные в учебных, научных и промышленных организациях.

Подписка по каталогу “Газеты, журналы” агентства “Роспечать”

Индекс	Наименование серии	Объем выпуска	Подписная цена (руб.)	
		Полугодие	3 мес.	6 мес.
72781	“Машиностроение”	2	150	300
72783	“Приборостроение”	2	150	300
79982	“Естественные науки”	1	—	150