

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩЕМ ЭЛЕМЕНТЕ

*Предложена математическая модель эволюции температурного поля в составном тепловыделяющем элементе, имеющем форму круглого цилиндра. Получено в аналитической форме приближенное решение задачи в нелинейной постановке, когда теплофизические свойства материалов тепловыделяющего элемента зависят от температуры.*

**Постановка задачи.** Рассматривается нестационарный процесс теплопроводности в тепловыделяющем элементе, имеющем форму бесконечного круглого цилиндра радиуса  $R$ . Тепловыделяющий элемент составлен из двух однородных слоев  $0 \leq r < r_1$  и  $r_2 < r < R$ , разделенных тонкой прослойкой  $r_1 < r < r_2$ . Во внутренней части выделяется теплота с постоянной объемной тепловой мощностью  $P$ . На внешней поверхности цилиндра  $r = R$  происходит конвективный теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона с коэффициентом теплоотдачи  $\alpha$ . Удельные теплоемкости и коэффициенты теплопроводности слоев зависят от температуры  $u$  и равны соответственно  $c_1(u)$ ,  $c_2(u)$ ,  $c_3(u)$  и  $\lambda_1(u)$ ,  $\lambda_2(u)$ ,  $\lambda_3(u)$ . Объемные плотности этих слоев постоянны и равны соответственно  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$ . Температура окружающей среды и начальная температура составного цилиндра равны  $T_0 = \text{const}$ . В данной постановке задачи предположим, что поверхности соприкосновения слоев  $r = r_1$  и  $r = r_2$  являются идеальными тепловыми контактами.

**Математическая модель процесса.** Процесс распространения нестационарной температуры в среде, теплофизические параметры которой зависят от температуры, при наличии внутренних источников выделения тепла описывается уравнением

$$\rho(u)c(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\lambda(u)\text{grad } u) + P.$$

Учитывая, что в цилиндрической системе координат с осевой симметрией для функции  $u(r, t)$  справедливо равенство

$$\text{div}(\lambda(u)\text{grad } u) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r}\right),$$

запишем математическую модель рассматриваемого физического процесса в следующем виде:

$$\begin{aligned} r\rho_1c_1(u)\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_1(u)r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + rP, & t > 0, & 0 \leq r < r_1; \\ r\rho_2c_2(u)\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_2(u)r\frac{\partial u}{\partial r}\right), & t > 0, & r_1 < r < r_2; \\ r\rho_3c_3(u)\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_3(u)r\frac{\partial u}{\partial r}\right), & t > 0, & r_2 < r < R; \end{aligned} \quad (1)$$

$$u(r, 0) = T_0, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (2)$$

$$-\lambda_3(u)\frac{\partial u}{\partial r} = \alpha(u - T_0), \quad r = R, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Кроме того, решение  $u(r, t)$  задачи (1)–(3) должно удовлетворять условиям идеального теплового контакта на поверхностях  $r = r_1$  и  $r = r_2$ :

$$\begin{aligned} u|_{r=r_1-0} &= u|_{r=r_1+0}, & \lambda_1(u)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_1-0} &= \lambda_2(u)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_1+0}; \\ u|_{r=r_2-0} &= u|_{r=r_2+0}, & \lambda_2(u)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_2-0} &= \lambda_3(u)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_2+0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Lambda(u, r) = \begin{cases} r\lambda_1(u), & 0 \leq r < r_1, \\ r\lambda_2(u), & r_1 \leq r < r_2, \\ r\lambda_3(u), & r_2 \leq r \leq R; \end{cases}$$

$$C(u, r) = \begin{cases} r\rho_1c_1(u), & 0 \leq r < r_1, \\ r\rho_2c_2(u), & r_1 \leq r < r_2, \\ r\rho_3c_3(u), & r_2 \leq r \leq R; \end{cases}$$

$$P(r) = \begin{cases} rP, & 0 \leq r < r_1, \\ 0, & r_1 \leq r < R. \end{cases}$$

Отметим, что функции  $\Lambda(u, r)$  и  $C(u, r)$  при  $r = r_1$  и  $r = r_2$ , а функция  $P(r)$  при  $r = r_1$  имеют конечный скачок. Однако в силу условий (4) величина  $\Lambda(u, r)\frac{\partial u}{\partial r}$  является непрерывной при  $r = r_1$  и  $r = r_2$ . Это

позволяет уравнения (1) заменить одним обобщенным уравнением теплопроводности в области  $0 \leq r < R$ :

$$C(u, r) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \Lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + P(r),$$

а решение этого уравнения следует понимать как обобщенное решение, для которого в силу непрерывности  $\Lambda(u, r) \frac{\partial u}{\partial r}$  выполняются условия (4). Поэтому задачу (1)–(4) можно записать в следующем виде:

$$C(u, r) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \Lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + P(r), \quad t > 0, \quad 0 \leq r < R; \quad (5)$$

$$u(r, 0) = T_0, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (6)$$

$$-\Lambda(u, r) \frac{\partial u}{\partial r} = R\alpha(u - T_0), \quad r = R, \quad t \geq 0. \quad (7)$$

**Построение разностно-дифференциального аналога начально-краевой задачи (5)–(7).** Применим к приближенному решению задачи (5)–(7) метод прямых [1]. Для этого проведем дискретизацию временной переменной  $t$ :  $t_k = kh$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , с достаточно малым шагом разбиения  $h > 0$ . Точность приближения определяется выбором шага. В работе [2] показано, что при  $h \rightarrow 0$  для широкого класса нелинейных параметров имеет место сходимость приближенного решения к точному.

Заменим в уравнении (5) производную  $\frac{\partial u}{\partial t}$  конечно-разностным отношением

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, t_k) \approx \frac{u(r, t_k) - u(r, t_{k-1})}{h}.$$

Кроме того, на каждом временном слое  $t = t_k$  проведем линеаризацию задачи, вычисляя все нелинейные параметры для предыдущего временного слоя  $t = t_{k-1}$ .

Обозначая  $u_k(r) = u(r, t_k)$ , определим функции  $\Lambda_k(r) = \Lambda(u_{k-1}(r), r)$ ,  $C_k(r) = C(u_{k-1}(r), r)$ ,  $\phi_k(r) = R\alpha(T_0 - u_{k-1}(r))$ ,  $u_0(r) = T_0$ .

В этом случае начально-краевая нелинейная задача (5)–(7) приводится к виду

$$L(u_k(r)) \equiv -\frac{d}{dr} \left( \Lambda_k(r) \frac{du_k}{dr} \right) + h^{-1} C_k(r) u_k = h^{-1} C_k(r) u_{k-1} + P(r), \quad (8)$$

$$|u_k(0)| < \infty, \quad \Lambda_k(r) \frac{du_k}{dr} = \phi_k(r), \quad r = R, \quad (9)$$

который является разностно-дифференциальным аналогом нелинейной начально-краевой задачи (5)–(7).

**Применение бесконечных систем к решению краевой задачи (8), (9).** Будем на каждом шаге итерации искать решение  $u_k(r)$  краевой задачи (8), (9) в виде ряда Фурье

$$u_k(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n b_n^{(k)} Y_n(r), \quad \delta_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } n = 0, \\ 1 & \text{при } n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (10)$$

по ортогональной на отрезке  $[0, R]$  системе собственных функций

$$Y_n(x) = \cos \omega_n r, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{R},$$

следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{aligned} Y''(r) + \omega^2 Y(r) &= 0, \\ Y'(0) &= 0, \quad Y'(R) = 0. \end{aligned}$$

Применим методику, изложенную в работах [3, 4], для нахождения коэффициентов  $b_n^{(k)}$  в разложении (10). Умножая уравнение (8) на  $Y_n(r)$  и интегрируя по  $r$  в пределах от 0 до  $R$ , получаем соотношение

$$\begin{aligned} \frac{2}{R} \int_0^R \frac{d}{dr} \left( \Lambda_k(r) \frac{du_k}{dr} \right) Y_n(r) dr - h^{-1} \frac{2}{R} \int_0^R C_k(r) u_k(r) Y_n(r) dr = \\ = -h^{-1} \frac{2}{R} \int_0^R C_k(r) u_{k-1}(r) Y_n(r) dr - \beta_n, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\beta_n$  — коэффициенты Фурье функции  $P(r)$ :

$$\beta_n = \frac{2}{R} \int_0^R P(r) Y_n(r) dr.$$

Интегрируя первое слагаемое в соотношении (11) по частям и учитывая граничное условие (9), а также учитывая, что  $\Lambda_k(0) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{R} (-1)^n \phi_k(R) - \frac{2}{R} \int_0^R \Lambda_k(r) \frac{du_k}{dr} \frac{dY_n}{dr} dr - h^{-1} \frac{2}{R} \int_0^R C_k(r) u_k(r) Y_n(r) dr = \\ = -h^{-1} \frac{2}{R} \int_0^R C_k(r) u_{k-1}(r) Y_n(r) dr - \beta_n. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим в полученное соотношение разложение (10) для функции  $u_k(r)$  и, меняя порядок интегрирования и суммирования, получим

$$I_1 = \frac{2}{R} \int_0^R \Lambda_k(r) \frac{du_k}{dr} \frac{dY_n}{dr} dr = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m b_m^{(k)} \left( \frac{2}{R} \int_0^R \Lambda_k(r) \frac{dY_m}{dr} \frac{dY_n}{dr} \right) dr,$$

$$I_2 = \frac{2}{R} \int_0^R C_k(r) u_k(r) Y_n(r) dr = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(k)} \left( \frac{2}{R} \int_0^R C_k(r) Y_m(r) Y_n(r) dr \right)$$

Проводя вычисления, получим

$$\frac{dY_m}{dr} \frac{dY_n}{dr} = \frac{\pi^2 nm}{2R^2} (Y_{n-m}(r) - Y_{n+m}(r)),$$

$$Y_m(r) Y_n(r) = \frac{1}{2} (Y_{n-m}(r) + Y_{n+m}(r)).$$

Тогда

$$I_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m b_m^{(k)} \frac{\pi^2 nm}{2R^2} (\xi_{n-m}^{(k)} - \xi_{n+m}^{(k)}),$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m b_m^{(k)} (\eta_{n-m}^{(k)} + \eta_{n+m}^{(k)});$$

здесь  $\xi_i^{(k)}$ ,  $\eta_i^{(k)}$  — коэффициенты Фурье функций  $\Lambda_k(r)$ ,  $C_k(r)$  соответственно:

$$\xi_i^{(k)} = \frac{2}{R} \int_0^R \Lambda_k(r) Y_i(r) dr, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\eta_i^{(k)} = \frac{2}{R} \int_0^R C_k(r) Y_i(r) dr, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя найденные выражения для  $I_1, I_2$  в соотношение (12), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2h}{R} (-1)^n \phi_k(R) - \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m b_m^{(k)} \frac{h\pi^2 nm}{2R^2} (\xi_{n-m}^{(k)} - \xi_{n+m}^{(k)}) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m b_m^{(k)} (\eta_{n-m}^{(k)} + \eta_{n+m}^{(k)}) = \\ & = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m b_m^{(k-1)} (\eta_{n-m}^{(k)} + \eta_{n+m}^{(k)}) - h\beta_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Преобразуем это выражение к виду бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов  $b_n^{(k)}$ :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \delta_m b_m^{(k)} C_{nm}^{(k)} = g_n^{(k)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где

$$C_{nm}^{(k)} = \frac{h\pi^2 nm}{2R^2} (\xi_{n-m}^{(k)} - \xi_{n+m}^{(k)}) + \frac{1}{2} (\eta_{n-m}^{(k)} + \eta_{n+m}^{(k)}),$$

$$g_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m b_m^{(k-1)} G_{nm}^{(k)} + h\beta_n + \frac{2h}{R} (-1)^n \phi_k(R).$$

Поскольку левая часть уравнения (8) при  $\Lambda_k(x) > 0$ ,  $C_k(x) > 0$  является самосопряженным положительно определенным дифференциальным оператором [5], то матрица бесконечной системы (13) симметрическая и положительно определенная.

Преобразуем бесконечную систему (13) к следующему виду:

$$\delta_n b_n^{(k)} + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} B_{nm}^{(k)} \delta_m b_m^{(k)} = S_n^{(k)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (14)$$

здесь

$$B_{nm}^{(k)} = \frac{C_{nm}^{(k)}}{C_{nn}^{(k)}}, \quad S_n^{(k)} = \frac{g_n^{(k)}}{C_{nn}^{(k)}}.$$

В этом случае [6] для коэффициентов  $B_{nm}^{(k)}$  и свободных членов  $S_n^{(k)}$  справедливы оценки

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |B_{nm}^{(k)}|^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |S_n^{(k)}|^2 < \infty. \quad (15)$$

Условия (15) позволяют применить для решения бесконечной системы (14) метод редукции (6), т.е. приближенное решение  $\{\bar{b}_0^{(k)}, \bar{b}_1^{(k)}, \dots, \bar{b}_{N-1}^{(k)}, 0, 0, \dots\}$ , сходящееся по норме в  $\ell_2$  к точному решению  $\{b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \dots, b_{N-1}^{(k)}, b_N^{(k)}, \dots\}$ , можно найти из конечной системы  $N$ -го порядка

$$\delta_n \bar{b}_n^{(k)} + \sum_{m=0}^{N-1} B_{nm}^{(k)} \delta_m \bar{b}_m^{(k)} = S_n^{(k)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (16)$$

Таким образом, приближенное аналитическое решение исходной задачи (1)–(4) в каждый момент времени  $t = t_k$  находится в форме тригонометрического полинома

$$u(r, t_k) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \delta_n \bar{b}_n \cos \frac{n\pi r}{R}, \quad 0 < r < R,$$

где коэффициенты  $\bar{b}_n^{(k)}$  определяются из решения линейной системы (16). В силу того, что  $C_{nm}^{(k)}$  — симметрическая положительно определенная матрица, то решение конечной системы  $N$ -го порядка (16) может быть получено методом Зейделя [7].

Число уравнений в системе (16) выбирается на основе оценки Рунге. Путем решения систем при  $N = N_1$  и  $N = N_2$ ,  $N_1 < N_2$ , проверяется выполнение неравенства

$$\max_r |u_{N_1}^{(k)} - u_{N_2}^{(k)}| < \delta.$$

Следует отметить, что в постановке прикладных задач функции  $\lambda(u)$  и  $c(u)$  обычно задаются табличными соотношениями. Поэтому при построении функций  $\Lambda_k(r)$  и  $C_k(r)$  прибегают к кусочно линейной аппроксимации.

**Пример численных расчетов.** На основе построенного алгоритма решения задачи (1)–(4) проведены численные расчеты температурного поля тепловыделяющего элемента, внутренняя часть которого изготовлена из двуоксида урана, а внешняя — из циркония. Тонкая прослойка между этими однородными слоями заполнена слабо теплопроводящей средой. Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи:  $R = 4,55$  мм,  $r_1 = 3,78$  мм,  $r_2 = 3,86$  мм,  $\rho_1 = 10900$  кг·м<sup>-3</sup>,  $\rho_2 = 5$  кг·м<sup>-3</sup>,  $\rho_3 = 6500$  кг·м<sup>-3</sup>,  $c_2 = 5192$  Дж·кг<sup>-1</sup>·К<sup>-1</sup>,  $\alpha = 600$  Вт×м<sup>-2</sup>·К<sup>-1</sup>,  $P = 9 \cdot 10^7$  Вт·м<sup>-3</sup>,  $T_0 = 300$  К.

Значения теплофизических параметров  $\lambda_1(u)$ ,  $\lambda_2(u)$ ,  $\lambda_3(u)$  и  $c_1(u)$ ,  $c_3(u)$  [8] приведены в табл. 1, 2. Шаг разбиения  $h$  по временной переменной выбран равным 0,1 с, размерность системы уравнений  $N = 150$ . При этом выполняется условие оценки Рунге с погрешностью  $\delta = 10$ .

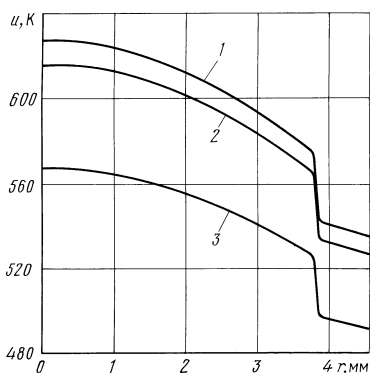
Таблица 1

$u, \text{K}$	273	300	350	400	450	500	550	600	650
$\lambda_1, \text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$	9,2	8,8	8	7,5	7,2	6,8	6,4	6,1	5,7
$\lambda_2, \text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$	0,14	0,15	0,17	0,18	0,2	0,22	0,24	0,25	0,26
$\lambda_3, \text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$	12,1	12,7	13,2	13,7	14,3	14,8	15,5	16,1	16,7

Таблица 2

$u, \text{K}$	273	300	350	400	450	500	550	600	650
$c_1, \text{Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$	230,2	273,8	251,8	265,8	273,9	282,1	287,2	292,4	296
$c_3, \text{Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$	275	280,7	291,4	302	308	314,1	320,1	326,2	331,9

На рисунке представлено распределение температуры в осевом сечении ТВЭЛа в различные моменты времени. Как показывают расчеты,



**Распределение температуры в осевом сечении ТВЭЛа в моменты времени  $t = 80$  с (1),  $t = 40$  с (2),  $t = 20$  с (3)**

переход в стационарный режим наступает с момента  $t = 80$  с.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
2. Лионс Ж. - Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
3. Малов Ю. И., Мартинсон Л. К. Приближенные аналитические методы решения краевых задач. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1989. – 26 с.
4. Малов Ю. И., Мартинсон Л. К. Алгоритмы приближенных решений краевых задач для систем квазилинейных уравнений. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1991. – 32 с.
5. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. – 368 с.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
7. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Наука, 1984. – 752 с.
8. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов ядерной физики: Справочник. – М.: Атомиздат, 1968. – 484 с.

Статья поступила в редакцию 17.04.2002

Юрий Иванович Малов родился в 1936 г., окончил в 1960 г. Волгоградский государственный педагогический институт. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных работ в области математической физики и математического моделирования.

Yu.I. Malov (b. 1936) graduated from the Volgograd State Pedagogical Institute in 1960. Ph. D. (Phys.-Math.), ass professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 70 publications in the field of mathematical physics and mathematical simulation.



Татьяна Александровна Нужненко родилась в 1979 г. Студентка МГТУ им. Н.Э. Баумана.

T.A. Nuzhnenko (b. 1979), student of the Bauman Moscow State Technical University